

Vergleich multivariater Qualitätskontrollkarten

Masterarbeit
an der Fakultät Statistik

David Schindler

2. September 2013

Betreuung: Prof. Dr. Christine Müller

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Einführung in die Qualitätskontrolle	3
2.1. Qualitätskontrollkarte	3
2.2. Lauflänge und mittlere Lauflänge (ARL)	5
2.3. Wichtige Verteilungen	8
2.3.1. Multivariate Normalverteilung	8
2.3.2. χ^2 -Verteilung	8
3. Multivariate Kontrollkarten	9
3.1. T^2 -Karte	9
3.2. LR-Karte	13
3.3. MEWMA-Karte	19
3.4. MCUSUM-Karte	25
3.5. ELR-Karte	28
4. Vergleich der Qualitätskontrollkarten	31
4.1. Simulation der Kontrollgrenzen und der Dichten der Lauflänge unter Kontrolle	32
4.2. Vergleich von Prozessen außer Kontrolle	39
4.2.1. Verschiebung des Erwartungswertvektors	39
4.2.2. Verschiebung des Erwartungswertvektors und der Kovarianzmatrix .	46
5. Zusammenfassung	51

6. Diskussion	53
A. Anhang	57
Literaturverzeichnis	63

1. Einleitung

Die Sicherstellung konstanter Produktqualität ist für Unternehmen eine wesentliche Maßnahme, um das Vertrauen seiner Kunden zu gewinnen und trägt zur Wettbewerbsfähigkeit bei. Daher werden vielen Produktionsprozessen in Unternehmen fortlaufend Stichproben zu bestimmten Zeitpunkten i vom Umfang $m \geq 1$ entnommen, um anhand dieser zu beurteilen, ob die Fertigung wie gewünscht verläuft oder aber Störungen eingetreten sind. Wird eine Störung festgestellt, so ist ein Eingreifen in den Produktionsprozess zum entsprechenden Zeitpunkt erforderlich und der Prozess wird möglicherweise neu adjustiert. (Qualitäts-)Kontrollkarten oder Regelkarten ermöglichen die Überwachung eines fortlaufenden Produktionsprozesses. Zunächst wird dem Produktionsprozess eine Stichprobe von Beobachtungen mit jeweils $p \geq 1$ Merkmalen entnommen. Anschließend werden anhand der Stichprobe (oft automatisch in Sekundenschnelle) die interessierenden zu überwachenden $l \geq 1$ Kenngrößen des Prozesses bestimmt. Mit Hilfe dieser Prozesskenngrößen wird eine Teststatistik berechnet, die grafisch in einer Regelkarte gegen den Zeitpunkt i abgetragen wird. Überschreitet oder unterschreitet die abgetragene Teststatistik eine Kontrollgrenze, so löst die Kontrollkarte einen Alarm aus und eine Störung wurde festgestellt. Verläuft der Produktionsprozess wie gewünscht (der Prozess ist somit unter Kontrolle), kann die Regelkarte dennoch fälschlicherweise einen Alarm auslösen - ein Fehlalarm tritt auf. Die Anforderungen an eine Qualitätskontrollkarte stellen sich somit dazu, dass diese zum einen möglichst wenige Fehlalarme auslöst und zum anderen möglichst schnell zu einem Alarm führt, sobald der Prozess einer Störung unterliegt/ außer Kontrolle gerät.

In dieser Masterarbeit sind ausschließlich Qualitätskontrollkarten von Interesse, bei denen die Beobachtungen des zu überwachenden Produktionsprozesses $p > 1$ Merkmale besitzen. Eine Einführung in die Qualitätskontrolle bietet Kapitel 2. Ausführlich wird hier der Aufbau einer zweiseitigen und einseitigen Qualitätskontrollkarte beschrieben. Darüber hinaus werden die Lauflänge (RL), die mittlere Lauflänge (ARL) und die Operationscharakteristik-Funktion (OC-Funktion) definiert. Mit den Definitionen der multivariaten Normalverteilung und der (nicht-)zentralen χ^2 -Verteilung schließt das Kapitel. Im folgenden Kapitel 3 werden fünf multivariate Kontrollkarten vorgestellt: Die T^2 -Karte (nach Hotelling (1947)), die LR-Karte (motiviert in Zhang et al. (2010)), die MEWMA-Karte (nach Lowry et al. (1992)), die MCUSUM-Karte (nach Crosier (1988)) und die ELR-Karte (nach Zhang et al. (2010)). Die Vorstellung jeder Kontrollkarte endet mit einer jeweiligen Diskussion. Das Kapitel 4 besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden zum einen zu der LR-, MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte Kontrollgrenzen für die Dimensionen $p = 2, 3$ und 5 zu einer vorgegebenen ARL unter Kontrolle von 200 bzw. 370 simuliert und zum anderen werden die jeweiligen Dichten der Lauflänge unter Kontrolle grafisch dargestellt. Im zweiten Teil wird die ARL der einzelnen Regelkarten von Prozessen, die außer Kontrolle geraten sind, untersucht. In Kapitel 5 werden die Erkenntnisse dieser Arbeit zusammenfassend dargestellt. Abschließend wird in Kapitel 6 auf einen gefundenen Fehler bei Zhang et al. (2010) eingegangen und die gewonnenen Erkenntnisse werden diskutiert.

2. Einführung in die Qualitätskontrolle

Dieses Kapitel dient als Einstieg in die Qualitätskontrolle. Allgemein werden in dieser Arbeit Vektoren und Matrizen in mathematischen Formeln mit fettgedruckten Buchstaben dargestellt. Ist im Folgenden die Rede von „Beobachtungen“, so ist in der Regel eine noch nicht realisierte Beobachtung, also eine Zufallsvariable, gemeint, die mit einem großen Buchstaben bezeichnet wird. Zu Beginn dieses Kapitels wird eine Qualitätskontrollkarte in ihrer allgemeinsten Form vorgestellt. Im zweiten Teil wird die mittlere Lauflänge (ARL) definiert, die als Vergleichskriterium unterschiedlicher Kontrollkarten, bei außer Kontrolle geratenen Prozessen, verwendet wird. Das Kapitel schließt mit der Einführung der multivariaten Normalverteilung und der (nicht-)zentralen χ^2 -Verteilung.

2.1. Qualitätskontrollkarte

Nach Weihs und Jessenberger (1999, Seite 285) wird in einer (Qualitäts-)Kontrollkarte eine gemessene, errechnete oder geschätzte Teststatistik einer Stichprobe von Beobachtungen $\mathbf{X}_{ij} \in \mathbb{R}^p$ mit $j = 1, \dots, m$ auf der y -Achse gegen die Stichprobennummer $i = 1, 2, \dots$ auf der x -Achse abgetragen. Neben dem Verlauf oder auch Pfad der Teststatistik sind in der allgemeinsten Form einer Kontrollkarte (siehe Abbildung 2.1) fünf horizontale Linien abgetragen. Die mittlere Linie kennzeichnet den Sollwert der Teststatistik. Die beiden gestrichelten Linien in Abbildung 2.1 stellen eine obere bzw. untere Warngrenze (Lower und Upper Warning Limit, kurz: LWL und UWL) dar, während die äußeren beiden Linien die obere und untere Kontroll- oder auch Eingreifgrenze (Lower und Upper

Control Limit, kurz: LCL und UCL) markieren. Falls der Wert einer neuen beobachteten Teststatistik außerhalb der Kontrollgrenzen liegt, so ist der Prozess statistisch außer Kontrolle und es wird ein Alarm ausgelöst. Die Abbildung 2.1 stellt beispielhaft solch eine Kontrollkarte für den Verlauf einer fiktiven Teststatistik dar. Handelt es sich bei der in der Kontrollkarte abgetragenen Teststatistik beispielsweise um eine quadrierte Abweichung von einem Sollwert, so ist ersichtlich, dass solch eine Kontrollkarte nur eine obere Kontrollgrenze besitzt. In diesem Fall wird von einer einseitigen Kontrollkarte gesprochen, die durch 0 nach unten beschränkt ist. Die Abbildung A.1 aus dem Anhang zeigt beispielhaft eine einseitige Kontrollkarte.

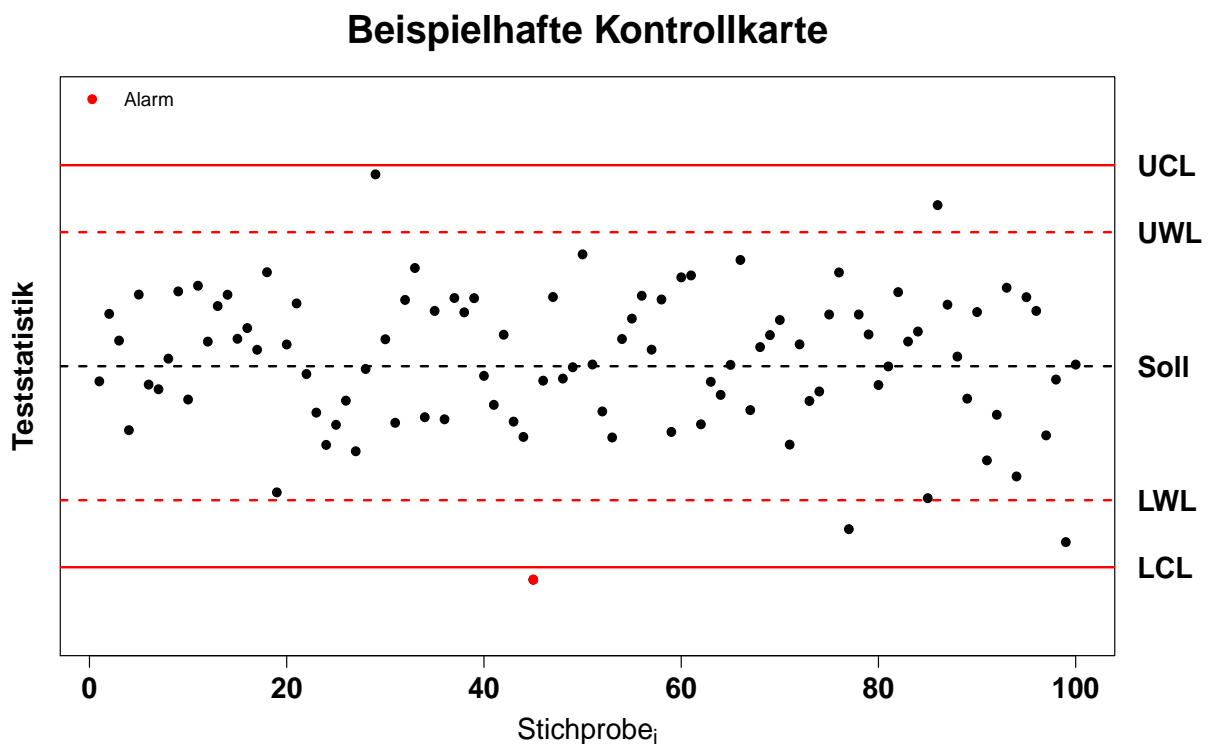


Abbildung (2.1): Diese Abbildung zeigt beispielhaft eine Kontrollkarte, die einen Alarm bei der Stichprobe 45 auslösen würde, da der Wert der abgetragenen Teststatistik die untere Kontrollgrenze zu diesem Zeitpunkt unterschreitet.

In der Auswertung dieser Arbeit ist lediglich das Auftreten eines Alarms einer jeweils untersuchten Kontrollkarte von Interesse, sodass nur das Überschreiten der oberen Kontrollgrenze $UCL = h_{UCL}$ bzw. das Unterschreiten der unteren Kontrollgrenze $LCL = h_{LWL}$ der i -ten realisierten Teststatistik registriert wird. Für die Wahl der in der Kontrollkarte abgetragenen Teststatistik und somit auch der zur jeweiligen Teststatistik gehörenden Kontrollgrenzen, gibt es verschiedene Ansätze, die in Kapitel 3 vorgestellt werden.

2.2. Lauflänge und mittlere Lauflänge (ARL)

Als Vergleichskriterium unterschiedlicher Kontrollkarten bezüglich ihres Reagierens auf eine auftretende Prozessänderung, dient die Lauflänge (RL, Run Length) oder auch die mittlere Lauflänge (ARL, Average Run Length) bis zum Auftreten eines Alarms. Die In-Control-ARL (IC-ARL₀) entspricht der durchschnittlichen Zeit bis zum Auftreten eines Alarms einer jeweiligen Regelkarte bei einem Prozess unter Kontrolle. Ein Alarm bei einem Prozess unter Kontrolle wird auch Fehlalarm genannt, da der Alarm auf gewöhnliche Prozessschwankungen zurückzuführen ist. Im Folgenden entspricht der Sollwert $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_l)' \in \mathbb{R}^l$ einem Vektor der Länge l , wobei jedes s_i mit $1 \leq i \leq l$ für einen Sollwert einer jeweiligen zu überwachenden Prozesskenngröße $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)' \in \mathbb{R}^l$ unter Kontrolle steht. Nach Weihs und Jessenberger (1999, Seite 308 f.) ist die ARL der Erwartungswert der Lauflänge und ist abhängig von Θ . Wird die Stichprobe einem Prozess mit gewünschtem Sollwert \mathbf{S} (also $\mathbf{S} = \Theta$ und der Prozess ist unter Kontrolle) entnommen, so sollte die ARL möglichst groß sein, während in allen anderen Fällen die ARL möglichst klein sein sollte. Um den Erwartungswert der Lauflänge in Abhängigkeit von Θ zu bestimmen, wird zunächst die Operationscharakteristik-Funktion (OC-Funktion) nach Weihs und Jessenberger (1999, Seite 306) eingeführt:

$$\begin{aligned}
 L(\Theta) &:= P_{\Theta}(\text{Teststatistik liegt im Annahmebereich}) \\
 &= \underbrace{P_{\Theta}(\text{Teststatistik} \in [h_{LCL}, h_{UCL}])}_{\text{bei einer Kontrollkarte, vgl. Abbildung 2.1}} \quad , \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

wobei h_{UCL} die obere und h_{LCL} die untere Kontrollgrenze bezeichnet. Die Funktion $L(\Theta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von Θ an, sich für einen statistisch unter Kontrolle stehenden Prozess zu entscheiden. Liegt Θ elementweise nahe bei dem Sollwert \mathbf{S} (d.h. der Prozess ist in statistischer Kontrolle), so wird $L(\Theta)$ nahe bei 1 liegen, während $L(\Theta)$ möglichst 0 entsprechen sollte, falls Θ (stark) vom Sollwert \mathbf{S} in einem oder mehreren interessierenden Prozesskenngrößen $1, \dots, l$ abweicht (d.h. der Prozess ist außer statistischer Kontrolle).

In der Literatur (siehe beispielsweise Weihs und Jessenberger (1999, Seite 311)) wird von Kontrollkarten ohne Gedächtnis gesprochen, wenn die realisierte Teststatistik der i -ten Stichprobe nur von den Beobachtungen der i -ten Stichprobe abhängig ist. Es ist ersichtlich, dass für konstantes Θ sowohl $L(\Theta)$ aus Gleichung (2.1) als auch $1 - L(\Theta)$ feste Größen sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Alarms zu jedem Zeitpunkt i ist $1 - L(\Theta)$. Es folgt direkt, dass die Lauflänge bei der Überwachung von Prozesskenngrößen mit einer Kontrollkarte ohne Gedächtnis geometrisch verteilt ist mit dem Parameter $1 - L(\Theta)$. Der Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable mit Parameter $1 - L(\Theta)$ ist $\frac{1}{1-L(\Theta)}$. Nach Rinne und Mittag (1995, Seite 376) ergibt sich die ARL für eine Kontrollkarte ohne Gedächtnis mit festem Θ bei unabhängigen Stichproben zu:

$$ARL(\Theta) = E(RL|\Theta) = \frac{1}{1 - L(\Theta)} \quad . \quad (2.2)$$

Liegt der Vektor Θ elementweise nahe an dem Sollwert \mathbf{S} , so ist $1 - L(\Theta)$ gering und die $ARL(\Theta)$ groß, während sich bei großen Abweichungen vom Sollwert \mathbf{S} eine kleine $ARL(\Theta)$ ergibt.

Im Folgenden wird für einen Prozess mit $\Theta = \mathbf{S}$ eine Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ vorgegeben, mit der sich für einen Prozess unter Kontrolle entschieden wird. In diesem Fall ist α die Wahrscheinlichkeit sich für einen Prozess außer Kontrolle zu entscheiden, obwohl der Prozess tatsächlich unter Kontrolle ist. Viele Regelkarten treffen die Annahme, dass die Beobachtungen der Stichproben eines zu überwachenden Produktionsprozesses unabhängig identisch verteilt (u.i.v.) sind und aus einer bestimmten Verteilung (meist Normalverteilung) stammen. Hängt die i -te Teststatistik nur von der i -ten Stichprobe ab (Kontrollkarte ohne

Gedächtnis), so lässt sich aus der Verteilung der einzelnen Stichproben auch die Verteilung der Teststatistik herleiten. Mit Hilfe der OC-Funktion $L(\Theta)$ aus Gleichung (2.1) können bei einem Prozess unter Kontrolle ($\mathbf{S} = \Theta$) die untere und obere Kontrollgrenze (jeweils mit gleicher Überschreitungs- bzw. Unterschreitungswahrscheinlichkeit) folgendermaßen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{S}) &= P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{Teststatistik} \in [h_{LCL}, h_{UCL}]) &&= 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{TS} \geq h_{LCL} \wedge \text{TS} \leq h_{UCL}) &&= 1 - \alpha \\
&\Leftrightarrow \underbrace{P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{TS} \leq h_{LCL})}_{=\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{TS} \geq h_{UCL})}_{=\frac{\alpha}{2}} &&= \alpha \\
&\Leftrightarrow \underbrace{P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{TS} \leq h_{LCL})}_{=\frac{\alpha}{2}} + 1 - \underbrace{P_{\Theta=\mathbf{S}}(\text{TS} \leq h_{UCL})}_{=1-\frac{\alpha}{2}} &&= \alpha \\
&\Rightarrow h_{LCL} = F_{\text{TS}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad h_{UCL} = F_{\text{TS}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Die Teststatistik wird mit TS abgekürzt und $F_{\text{TS}}^{-1}(\alpha)$ bezeichnet das α -Quantil der Verteilungsfunktion der Teststatistik bei einem Prozess unter Kontrolle. Handelt es sich bei der verwendeten Regelkarte um eine einseitige Regelkarte, so ergibt sich analog zur vorhergehenden Rechnung für die untere Kontrollgrenze $h_{LCL} = 0$ und für die obere Kontrollgrenze $h_{UCL} = F_{\text{TS}}^{-1}(1 - \alpha)$. Wird bei einem Prozess unter Kontrolle ($\mathbf{S} = \Theta$) eine feste IC-ARL₀ vorgegeben, so ergibt sich für eine Kontrollkarte ohne Gedächtnis für α und die IC-ARL₀ folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
ARL(\mathbf{S}) = \text{IC-ARL}_0 &= \frac{1}{1 - L(\mathbf{S})} = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\text{IC-ARL}_0} = \alpha \quad .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

In der Literatur sind meist Kontrollkarten mit einer IC-ARL₀ von 100, 200, 370 und 500 von Interesse. Die zugehörigen α -Werte ergeben sich mit Gleichung (2.3) zu 0.05, 0.005, 0.0027 und 0.002. Die IC-ARL₀ von 370 ist von besonderer Bedeutung, da bei einer univariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ mit bekanntem Erwartungswert μ_0 und bekannter Varianz σ_0^2 eine Beobachtung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.73% in das Six-Sigma-Intervall $[\mu_0 - 3 \cdot \sigma_0; \mu_0 + 3 \cdot \sigma_0]$ fällt. In diesem Fall ergibt sich $\alpha = 0.0027$

und im Mittel liegt eine von 370 Beobachtungen aus der $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ -Verteilung außerhalb dieses Six-Sigma-Intervalls.

2.3. Wichtige Verteilungen

2.3.1. Multivariate Normalverteilung

Viele multivariate Regelkarten treffen die Annahme, dass die Beobachtungen der i -ten Stichprobe $\mathbf{X}_{ij} = (X_{ij1}, \dots, X_{ijp})' \in \mathbb{R}^p$ mit $j = 1, \dots, m$ bei einem zu überwachenden Prozess unter Kontrolle u.i.v. Realisierungen einer multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit bekannter symmetrischer und positiv definiter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ und bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ sind. Nach Bilodeau und Brenner (1999, Seite 58) ergibt sich die Dichtefunktion einer $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilten Zufallsvariable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ zu:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad , \quad (2.4)$$

wobei $|\boldsymbol{\Sigma}|$ die Determinante der Kovarianzmatrix bezeichnet und p die Dimension von \mathbf{x} .

2.3.2. χ^2 -Verteilung

Seien X_1, \dots, X_p stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen mit $i = 1, \dots, p$ und $\mu_1 = \dots = \mu_p = 0$, so ist nach Hartung (2009, Seite 152) die Verteilung der Summe $\sum_{i=1}^p X_i^2$ eine zentrale χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden. Sind ein oder mehrere Erwartungswerte $\mu_i \neq 0$, so ist die Verteilung der Summe $\sum_{i=1}^p X_i^2$ eine nicht-zentrale χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\delta^2 = \sum_{i=1}^p \mu_i^2$. Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^p X_i^2 \sim \chi_p^2(\delta^2) \quad .$$

3. Multivariate Kontrollkarten

In diesem Kapitel werden insgesamt fünf multivariate Qualitätskontrollkarten vorgestellt. Bei der T^2 -Karte und der LR-Karte handelt es sich von den in dieser Arbeit vorgestellten Kontrollkarten, um Kontrollkarten ohne Gedächtnis. Für einen Prozess, der sich unter Kontrolle befindet, wird für die T^2 -Karte gezeigt, dass die Verteilung der realisierten Teststatistik der i -ten Stichprobe eine χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden ist - bei der LR-Karte kann die Verteilung der realisierten Teststatistik der i -ten Stichprobe durch eine χ^2 -Verteilung mit $\frac{1}{2} p (p + 3)$ Freiheitsgraden approximiert werden. Die MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte sind multivariate Kontrollkarten mit Gedächtnis, d.h. die in diesen Kontrollkarten jeweils abgetragene Realisierung der Teststatistik ist nicht unabhängig von vorangegangenen Stichproben. In der späteren Auswertung in Kapitel 4 werden die Kontrollgrenzen dieser Kontrollkarten mit Hilfe einer Simulationsstudie bestimmt. Das Vorstellen einer jeweiligen Kontrollkarte wird durch eine Diskussion abgeschlossen. In dieser werden Vor- und Nachteile einer jeweiligen Kontrollkarte kurz gegenübergestellt und die Wahl von zusätzlichen Parametern, die beim Anwenden der jeweiligen Regelkarte von zentraler Bedeutung sind, wird erörtert.

3.1. T^2 -Karte

Ist der zu überwachende Produktionsprozess unter Kontrolle, so ergeben sich die Voraussetzungen der T^2 -Karte nach Hotelling (1947) dazu, dass die voneinander unabhängigen identisch verteilten Beobachtungen Realisierungen einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ mit

bekannter symmetrischer positiv definiten Kovarianzmatrix $\Sigma_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ und bekanntem Erwartungswertvektor $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ sind. Sei m die Anzahl an $\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{im}$ Beobachtungen der i -ten Stichprobe, wobei $\mathbf{X}_{ij} = (X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijp})' \in \mathbb{R}^p$ mit $j = 1, \dots, m$ und $\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{ij}$ ist, dann ergibt sich die T^2 -Teststatistik der i -ten Stichprobe nach Hotelling (1947) zu:

$$T_i^2 := m (\bar{\mathbf{X}}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \mu_0) \quad . \quad (3.1)$$

Die T^2 -Karte löst einen Alarm aus, sobald der realisierte T^2 -Wert der i -ten Stichprobe eine Grenze h_1 , die in Abhängigkeit der Dimension p und einer vorher festgelegten IC-ARL₀ gewählt wird, überschreitet. Da $T_i^2 > 0$ gilt, ist ersichtlich, dass diese Kontrollkarte durch eine obere Kontrollgrenze beschränkt ist und es sich somit um eine einseitige Kontrollkarte (vgl. Abschnitt 2.1) handelt. Zur Bestimmung von h_1 folgt zunächst ein Satz.

Satz (1):

Sei μ_0 der Erwartungswertvektor des zu überwachenden Produktionsprozesses unter Kontrolle und sind die Beobachtungen $\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{im}$ der i -ten Stichprobe u.i.v. Realisierungen einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_0)$ mit bekannter symmetrischer Kovarianzmatrix $\Sigma = \Sigma_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ und bekanntem Erwartungswertvektor $\mu_1 \in \mathbb{R}^p$, so ist nach Hotelling (1947) die Statistik T_i^2 aus Gleichung (3.1) χ^2 -verteilt mit p Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\delta = \left(m (\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Beweis (1):

$$\begin{aligned} \Sigma \in \mathbb{R}_+^{p \times p} &\Rightarrow \exists \Sigma^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+^{p \times p} \text{ mit } \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I}_{p \times p} \text{ und } \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma^{-1} \\ \bar{\mathbf{X}}_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{1}{m} \Sigma\right) &\Rightarrow \sqrt{m} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{X}}_i \sim \mathcal{N}\left(\sqrt{m} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu_1, m \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{m}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\sqrt{m} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu_1, \mathbf{I}_{p \times p}\right) \end{aligned}$$

Definiere: $\mathbf{Z} := [Z_1, Z_2, \dots, Z_p]' = \sqrt{m} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{X}}_i - \mu_0)$ mit

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{\sqrt{m} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mu_1 - \mu_0)}_{\tilde{\mu}}, \mathbf{I}_{p \times p}\right)$$

$$\text{und } Z_k \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_k, 1) \quad \text{für } k = 1, \dots, p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^p Z_k^2 \sim \chi_p^2(\delta^2)$$

$$\text{mit } \delta^2 = \left(\sqrt{m} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \right)' \left(\sqrt{m} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \right) = m (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_i^2 &= m (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) = \sqrt{m} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sqrt{m} \\ &= \mathbf{Z}'\mathbf{Z} \sim \chi_p^2(\delta^2) \end{aligned}$$

□

Ist der zu überwachende Produktionsprozess unter Kontrolle (d.h. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_0$), so ergibt sich der Nichtzentralitätsparameter δ der χ^2 -Verteilung zu 0. Unter der Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Stichproben untereinander ist nach Kapitel 2.2 die obere Kontrollgrenze h_1 der T^2 -Karte gleich dem entsprechenden $(1 - \alpha)$ -Quantil der zentralen χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden zu wählen. Die Tabelle 3.1 zeigt entsprechende Werte für h_1 in Abhängigkeit der IC- ARL_0 und der Dimension p . Der Zusammenhang zwischen der IC- ARL_0 und dem zu wählenden $1 - \alpha$ Quantil der χ^2 -Verteilung ergibt sich analog zur Gleichung (2.3) für Kontrollkarten ohne Gedächtnis zu: $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{\text{IC-ARL}_0}$.

p	ARL	$1 - \alpha$	h_1	ARL	$1 - \alpha$	h_1	ARL	$1 - \alpha$	h_1	ARL	$1 - \alpha$	h_1
1	100	0.99	6.63	200	0.995	7.88	370	0.9973	9.00	500	0.998	9.55
2	100	0.99	9.21	200	0.995	10.60	370	0.9973	11.83	500	0.998	12.43
3	100	0.99	11.34	200	0.995	12.84	370	0.9973	14.15	500	0.998	14.80
4	100	0.99	13.28	200	0.995	14.86	370	0.9973	16.25	500	0.998	16.92
5	100	0.99	15.09	200	0.995	16.75	370	0.9397	18.20	500	0.998	18.91
10	100	0.99	23.21	200	0.995	25.19	370	0.9973	26.90	500	0.998	27.72

Tabelle (3.1): Kontrollgrenzen der T^2 -Karte mit einer IC- ARL_0 von 100, 200, 370 und 500 in Abhängigkeit der Dimension $p = 1, \dots, 5, 10$.

Diskussion der T^2 -Karte

Die Teststatistik der T^2 -Karte (siehe Gleichung (3.1)) hängt nur von der i -ten Stichprobe ab, sodass es sich um eine Kontrollkarte ohne Gedächtnis handelt. Der Vorteil von Kontrollkarten ohne Gedächtnis und somit auch der T^2 -Karte ist, dass ein Alarm direkt auf die aktuelle Stichprobe zurückgeführt werden kann. Die Interpretation dieses Alarms ist in der Regel auch leicht: Der Mittelwert $\bar{\mathbf{X}}_i$ der i -ten Stichprobe weicht entweder in einem oder mehreren Parametern (stark) vom Mittelwert unter Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_0$ ab oder aber die Korrelationsstruktur, die durch $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}$ in die Teststatistik mit einfließt, der zu kontrollierenden Mittelwerte untereinander scheint in der Stichprobe außer Kontrolle zu sein. Ein weiterer Vorteil der T^2 -Karte ist, dass die Verteilung der Teststatistik bekannt ist, sodass die Karte sehr leicht anwendbar ist. Ein allgemein schwerwiegender Nachteil von Kontrollkarten ohne Gedächtnis ist, dass kontinuierliche leichte Verschiebungen vom Sollwert \mathbf{S} in der Regel erst spät oder gar nicht erkannt werden.

Gerät der Prozess in der Form außer Kontrolle, dass sich bei gleichbleibender Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$ der Erwartungswertvektor von $\boldsymbol{\mu}_0$ zu $\boldsymbol{\mu}_1$ verschiebt, so kann die OC-Funktion aus Gleichung (2.1) ebenfalls exakt bestimmt werden. In Beweis (1) wurde gezeigt, dass die Verteilung der Teststatistik außer Kontrolle ($\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$) keiner zentralen χ^2 -Verteilung mehr (vgl. Kapitel 2.3.2) folgt, sondern einer nicht-zentralen χ^2 -Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter δ , der sich ergibt zu:

$$\delta = \left(m (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.2)$$

Hängen alle zu vergleichenden Regelkarten in dieser Form von dem Nichtzentralitätsparameter δ ab, so erleichtert diese Eigenschaft einen Vergleich der Regelkarten bezüglich der ARL außer Kontrolle. Der Vergleich der ARL außer Kontrolle kann in diesem Fall anhand von δ vorgenommen werden.

3.2. LR-Karte

Bei der in Zhang et al. (2010) motivierten LR-Karte (Likelihood-Ratio Control Chart) handelt es sich, wie bei der bereits vorgestellten T^2 -Karte, um eine Kontrollkarte ohne Gedächtnis. Ist der zu überwachende Prozess unter Kontrolle, so ergeben sich die Annahmen der LR-Karte dazu, dass die m Beobachtungen \mathbf{X}_{ij} mit $j = 1, \dots, m$ der i -ten Stichprobe jeweils u.i.v. Realisierungen einer $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ mit bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ und bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ sind. Durch Anwenden der Transformation $\tilde{\mathbf{X}}_{ij} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_0)$ folgt, dass bei einem Prozess unter Kontrolle $\tilde{\mathbf{X}}_{ij}$ gemäß $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p \times p})$ verteilt ist. Die in diesem Abschnitt folgenden Berechnungen basieren immer auf der transformierten Variable $\tilde{\mathbf{X}}_{ij}$.

Die Grundidee der LR-Karte und seiner dazugehörigen in Gleichung (3.5) vorgestellten Teststatistik ist, dass für jede Stichprobe i folgende Hypothese getestet wird:

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{0} \text{ und } \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{I}_{p \times p} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\mu}_i \neq \mathbf{0} \text{ oder } \boldsymbol{\Sigma}_i \neq \mathbf{I}_{p \times p} \quad . \quad (3.3)$$

Dieses Testproblem kann mit einem Likelihood-Ratio Test (Einführung z.B. Mood et al. (1974, Kapitel 9: Abschnitt 3)) gelöst werden. Allgemein besitzt diese Klasse von Tests bei dem gegebenen Testproblem aus Gleichung (3.3) die beste Güte unter der Nullhypothese. Bei der Normalverteilung wird häufig nicht der Likelihood-Ratio Quotient als Teststatistik betrachtet, sondern -2 -mal der logarithmierte Likelihood-Ratio Quotient, da die Verteilung dieses transformierten Quotienten bekannt ist. Nach Schervish (1995, Seite 458) ergibt sich -2 -mal die logarithmierte Likelihood-Ratio Teststatistik der transformierten i -ten Stichprobe mit m Beobachtungen zu:

$$\begin{aligned} LR_i = -2 \log(LR_{m_i}) &= -2 \log \left(\frac{\sup_{\boldsymbol{\Theta} \in \Omega_H} f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \boldsymbol{\Theta})}{\sup_{\boldsymbol{\Theta} \in \Omega} f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \boldsymbol{\Theta})} \right) = -2 \log \left(\frac{f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{m,H})}{f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)} \right) \quad (3.4) \\ &= -2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{m,H}) \right) + 2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m) \right) \quad . \end{aligned}$$

Es bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ den Parameterraum, $\Omega_H \subset \Omega$ den Parameterraum unter der Nullhypothese, $\tilde{\mathbf{X}}_i = (\tilde{\mathbf{X}}_{i1}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_{im})'$ die transformierten Beobachtungen der i -ten Stichprobe

und $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)' \in \Omega$ die wahren aber unbekannt zu kontrollierenden Parameter. Desweiteren ist $\hat{\Theta}_m = (\hat{\theta}_{1_m}, \dots, \hat{\theta}_{l_m})' \in \Omega$ der Vektor der zu schätzenden interessierenden Parameter für das wahre aber unbekannt Θ , während $\hat{\Theta}_{m,H} = (\hat{\theta}_{1_{m,H}}, \dots, \hat{\theta}_{l_{m,H}})' \in \Omega_H$ der Vektor der zu schätzenden interessierenden Parameter unter der Nullhypothese ist. Für die auf Θ bedingte Likelihood der transformierten Beobachtungen der i -ten Stichprobe gilt:

$$f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \Theta) = f(\tilde{\mathbf{X}}_{i1} | \Theta) \cdot \dots \cdot f(\tilde{\mathbf{X}}_{im} | \Theta) \quad .$$

Der Vektor $\hat{\Theta}_m$ wird mit Hilfe einer Maximum-Likelihood Schätzung (Einführung z.B. bei Mood et al. (1974, Seite 279 ff.)) für jeden Parameter $\theta_1, \dots, \theta_l$ bestimmt. Der Vektor $\hat{\Theta}_{m,H}$ aus dem Testproblem (3.3) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{m,H} &= (\hat{\theta}_{1_{m,H}}, \dots, \hat{\theta}_{l_{m,H}})' \\ &= \underbrace{(\mu_1, \dots, \mu_p)}_{=\mathbf{0}'} \underbrace{(\sigma_{11}^2, \dots, \sigma_{pp}^2)}_{=\mathbf{1}'} \underbrace{(\sigma_{12}, \dots, \sigma_{1p}, \sigma_{23}, \dots, \sigma_{2p}, \dots, \sigma_{(p-1)p})}_{=\mathbf{0}'} \\ &= \mathbf{c} \in \mathbb{R}^l \\ \text{mit } l &= p + \sum_{i=1}^p i = p + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{2p + p^2 + p}{2} = \frac{1}{2} p(p+3) \quad . \end{aligned}$$

Satz (2):

Nach Schervish (1995) ergibt sich die Likelihood-Ratio Teststatistik aus Gleichung (3.4) für das gegebene Testproblem aus Gleichung (3.3) für die transformierte i -te Stichprobe, die aus m u.i.v. Beobachtungen besteht, zu:

$$LR_i = -2 \log(LR_{m_i}) = m p \left(\frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{S}_i) - \log(|\mathbf{S}_i|^{\frac{1}{p}}) - 1 \right) + m \|\bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i\|^2 \quad . \quad (3.5)$$

Es bezeichnet \mathbf{S}_i den Maximum-Likelihood Schätzer für die Kovarianzmatrix und $\|\bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i\|^2$ ist die quadrierte euklidische Norm des Mittelwertvektors der transformierten i -ten Stichprobe. Die Spur von \mathbf{S}_i wird mit $\text{tr}(\mathbf{S}_i)$ bezeichnet und $|\mathbf{S}_i|$ ist die Determinante der Matrix \mathbf{S}_i .

Beweis (2):

Unter der Nullhypothese gilt $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_{p \times p}$. Die Maximum-Likelihood Schätzer für die Parameter einer $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ -Verteilung anhand der transformierten i -ten Stichprobe ergeben sich für $\boldsymbol{\mu}_i$ und $\boldsymbol{\Sigma}_i$ nach Mukhopadhyay (2009, Seite 70 f.) zu:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ML_i} = \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{X}}_{ij} \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ML_i} = \mathbf{S}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' .$$

Die logarithmierte Likelihood-Ratio Teststatistik aus Gleichung (3.4) lässt sich für die transformierte i -te Stichprobe mit m Beobachtungen für das gegebenen Testproblem (3.3) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} -2 \log(LR_{m_i}) &= -2 \log \left(\prod_{j=1}^m \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\mathbf{I}_{p \times p}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{X}}_{ij}' \mathbf{I}_{p \times p} \tilde{\mathbf{X}}_{ij}\right)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\mathbf{S}_i|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{S}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)\right)} \right) \\ &= -2 \log \left(|\mathbf{S}_i|^{\frac{m}{2}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{X}}_{ij}' \mathbf{I}_{p \times p} \tilde{\mathbf{X}}_{ij}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{S}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)\right)} \right) \\ &= -m \log(|\mathbf{S}_i|) + \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i + \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{I}_{p \times p} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i + \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{S}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) \\ &= -m \log(|\mathbf{S}_i|) + \sum_{i=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{I}_{p \times p} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) + \sum_{i=1}^m \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i' \mathbf{I}_{p \times p} \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i \\ &\quad + \underbrace{2 \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{I}_{p \times p} \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i}_{=0} - \text{tr} \left(\sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{S}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) \right) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} -m \log(|\mathbf{S}_i|) + \text{tr} \left(\sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{I}_{p \times p} \right) + m \|\bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i\|^2 \\ &\quad - \text{tr} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i) (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i)' \mathbf{S}_i^{-1}}_{m \mathbf{S}_i} \right) \\ &= m p \left(\frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{S}_i) - \frac{1}{p} \log(|\mathbf{S}_i|) - 1 \right) + m \|\bar{\tilde{\mathbf{X}}}_i\|^2 . \end{aligned}$$

□

¹Falls für die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ das Produkt \mathbf{ABC} und \mathbf{CAB} existiert, so gilt: $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$.

Satz (3):

Unter der Annahme der Nullhypothese gilt nach Schervish (1995) für die Likelihood-Ratio Statistik aus Gleichung (3.4) folgende Konvergenz in Verteilung für $m \rightarrow \infty$:

$$LR_i = -2 \log(LR_{m_i}) \xrightarrow{D} \chi_l^2 \quad \text{mit } l = \frac{1}{2} p (p + 3) \quad . \quad (3.6)$$

Beweis (3):

Eine Normalverteilung mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ und symmetrischen $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ (d.h. $\sigma_{q,z} = \sigma_{z,q}$) besteht aus insgesamt $l = \frac{1}{2} p (p + 3)$ Parametern, die jeweils unter der Alternativhypothese H_1 mit einer Maximum-Likelihood Schätzung anhand der transformierten i -ten Stichprobe $\tilde{\mathbf{X}}_i$ bestimmt werden. Unter der Nullhypothese H_0 sind diese zu schätzenden Parameter $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{m,H} = (\theta_1, \dots, \theta_l)' = \mathbf{c}$ bekannt und fest. Die asymptotische Verteilung der Likelihood-Ratio Statistik in dem Punkt \mathbf{c} lässt sich über die Taylorreihe 2. Ordnung unter gewissen Voraussetzungen (vgl. Schervish (1995, Seite 459)) wie folgt annähern:

$$\begin{aligned} \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\mathbf{c})) &= \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)) + (\mathbf{c} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)' \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_l} \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)) \end{pmatrix}}_{= \mathbf{0}, \text{ da } \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m \text{ ML-Schätzer}} \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{c} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)' \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_q \partial \theta_z} \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)) \right)}_{\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)} \Big|_{q,z} (\mathbf{c} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m) + \underbrace{Rest}_{\rightarrow \mathbf{0}, \text{ für } \hat{\boldsymbol{\Theta}}_m \rightarrow \mathbf{c}} \quad . \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)$ der zweiten Ableitungen (oder auch Hesse Matrix genannt) wird elementweise durch $\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_q \partial \theta_z} \log(f(\tilde{\mathbf{X}}_i|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)) \right)_{q,z}$ dargestellt, wobei q und z mit $1 \leq q, z \leq l$ für das jeweilige Element der Matrix stehen. Die Matrix $-\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_m)$ verhält sich für großes m wie $m \cdot \mathcal{I}(\mathbf{c})$, wobei $\mathcal{I}(\mathbf{c})$ die Fisherinformationsmatrix bezeichnet (siehe Schervish (1995, Theorem 7.63)). Anschließend wird der Ausdruck auf -2 -mal das logarithmierte

Likelihood Ratio zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
& -2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \mathbf{c}) \right) + 2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\Theta}_m) \right) \\
& = -m (\mathbf{c} - \hat{\Theta}_m)' \frac{1}{m} \mathcal{H}(\hat{\Theta}_m) (\mathbf{c} - \hat{\Theta}_m) + \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rest}} \\
& \hspace{15em} \rightarrow \mathbf{0}, \text{ für } m \rightarrow \infty \\
& \hspace{15em} (\text{unter } H_0)
\end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen nach Schervish (1995, Theorem 7.63) gilt:

$$\sqrt{m} \mathcal{I}(\mathbf{c})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{c} - \hat{\Theta}_m) \xrightarrow{D} \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{l \times l}) \quad .$$

Durch Anwendung von Slutsky² (siehe Chow und Teicher (1978, Seite 249)) und dem Continuous Mapping Theorem³ (siehe Schervish (1995, Theorem B.88)) folgt der Satz:

$$\begin{aligned}
& -2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \mathbf{c}) \right) + 2 \log \left(f(\tilde{\mathbf{X}}_i | \hat{\Theta}_m) \right) \\
& = \underbrace{\sqrt{m} (\mathbf{c} - \hat{\Theta}_m)' \mathcal{I}(\mathbf{c})^{\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow{D} \mathbf{Z}' \text{ mit } \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{l \times l})} \underbrace{\mathcal{I}(\mathbf{c})^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{m} (-\mathcal{H}(\hat{\Theta}_m)) \mathcal{I}(\mathbf{c})^{-\frac{1}{2}}}_{\xrightarrow{\text{stoch.}} \mathcal{I}(\mathbf{c})} \underbrace{\mathcal{I}(\mathbf{c})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{c} - \hat{\Theta}_m) \sqrt{m}}_{\xrightarrow{D} \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{l \times l})} \\
& \hspace{15em} \xrightarrow{\text{stoch.}} \mathbf{I}_{l \times l} \\
& \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{(Slutsky)} \xrightarrow{D} \mathbf{Z}' \text{ mit } \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{l \times l})} \\
& \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{(Continuous Mapping Theorem)} \xrightarrow{D} \mathbf{Z}' \mathbf{Z} \sim \chi_l^2 \text{ mit } l = \frac{1}{2} p (p+3)} \quad .
\end{aligned}$$

□

Analog zur T^2 -Karte werden beim Anwenden der LR-Karte die Realisierungen der Teststatistik LR_i aus Gleichung (3.5) gegen die Stichprobennummer i fortlaufend abgetragen. Da $LR_i > 0$ gilt, besitzt diese Kontrollkarte nur eine obere Kontrollgrenze. Folglich löst die LR-Karte einen Alarm aus, sobald ein Wert der abgetragenen Teststatistik LR_i eine Grenze h_2 überschreitet. Durch Ausnutzen von Satz (3) ist die Grenze h_2 für $m \rightarrow \infty$ gleich dem entsprechenden $(1 - \alpha)$ -Quantil der zentralen χ^2 -Verteilung mit $\frac{1}{2} p (p + 3)$ Freiheitsgraden zu wählen. Die Tabelle 3.2 zeigt entsprechende Werte für h_2 in Abhängigkeit der IC-ARL₀ und der Dimension p für hinreichend großes m .

² $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\text{stoch.}} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{Y}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}$

³ $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X} \Rightarrow g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{D} g(\mathbf{X})$

p	ARL	$1 - \alpha$	h_2	ARL	$1 - \alpha$	h_2	ARL	$1 - \alpha$	h_2	ARL	$1 - \alpha$	h_2
1	100	0.99	9.21	200	0.995	10.60	370	0.9973	11.83	500	0.998	12.43
2	100	0.99	15.09	200	0.995	16.75	370	0.9973	18.21	500	0.998	18.91
3	100	0.99	21.67	200	0.995	23.59	370	0.9973	25.26	500	0.998	26.06
4	100	0.99	29.14	200	0.995	31.32	370	0.9973	33.20	500	0.998	34.09
5	100	0.99	37.57	200	0.995	40.00	370	0.9973	42.08	500	0.998	43.07
10	100	0.99	94.42	200	0.995	98.11	370	0.9973	101.22	500	0.998	102.69

Tabelle (3.2): Kontrollgrenzen der LR-Karte mit einer IC- ARL_0 von 100, 200, 370 und 500 in Abhängigkeit der Dimension $p = 1, \dots, 5, 10$ für hinreichend großes m .

Diskussion der LR-Karte

Um zu verstehen wie sich Prozessänderungen/-verschiebungen auf die Teststatistik der LR-Karte auswirken, wird analog zu Zhang et al. (2010) zunächst der zweidimensionale Fall näher betrachtet. Der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix haben folgende Struktur:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)' \in \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad ,$$

wobei $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+$ gilt und $\rho \in [-1, 1]$ den Korrelationskoeffizienten⁴ bezeichnet. Da \mathcal{S} für großes m fast sicher gegen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\tilde{\mathbf{X}}$ fast sicher gegen $\boldsymbol{\mu}$ konvergiert, ist es sinnvoll in Gleichung (3.5) \mathcal{S} durch $\boldsymbol{\Sigma}$ bzw. $\tilde{\mathbf{X}}_i$ durch $\boldsymbol{\mu}$ zu ersetzen. Es ergibt sich für den zweidimensionalen Fall folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} LR_i &= m p \left(\frac{1}{p} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{1}{p} \log(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \rho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2) - 1 \right) + m (\mu_1^2 + \mu_2^2) \\ &= m [(\sigma_1^2 - \log(\sigma_1^2)) + (\sigma_2^2 - \log(\sigma_2^2)) - \log(1 - \rho^2) - 2] \\ &\quad + m (\mu_1^2 + \mu_2^2) \quad . \end{aligned} \tag{3.7}$$

⁴ $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{COV(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sqrt{VAR(\mathbf{X})} \sqrt{VAR(\mathbf{Y})}} = \frac{\sigma_{\mathbf{XY}}}{\sigma_{\mathbf{X}} \sigma_{\mathbf{Y}}} \quad .$

Die Funktion $f(x) = x - \log(x)$ mit $x \in (0, \infty)$ hat an der Stelle $x = 1$ das Minimum 1 und ist monoton fallend (steigend) für $x \in (0, 1)$ bzw. $x \in (1, \infty)$. Die Funktion $g(x) = -\log(1 - x^2)$ mit $x \in (-1, 1)$ hat als minimalen Wert 0 für $x = 0$ und ist monoton fallend (steigend) für $x \in (-1, 0)$ bzw. $x \in (0, 1)$. Der Wert der Teststatistik LR_i wird somit je größer, desto gravierender σ_1^2 , σ_2^2 , ρ , μ_1 oder μ_2 betragsmäßig von ihren Sollwerten 1, 1, 0, 0 und 0 abweichen. Befindet sich der Prozess unter Kontrolle, d.h. $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\rho = 0$ und $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, so lässt sich ein theoretischer Wert von $LR_i = 0$ herleiten. In der Auswertung ist zu erwarten, dass die LR-Karte im Gegensatz zur T^2 -Karte nicht nur bei Verschiebungen des Erwartungswertvektors, sondern auch bei Veränderungen der Kovarianzmatrix (hinreichend schnell) zu einem Alarm führt. Löst die LR-Karte einen Alarm aus, so weicht entweder der Mittelwert $\bar{\mathbf{X}}_i$ der transformierten i -ten Stichprobe in einem oder mehreren Parametern (stark) vom Mittelwert unter Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_0$ ab oder aber Korrelationsstruktur der zu kontrollierenden Mittelwerte untereinander scheint in der Stichprobe außer Kontrolle sein.

Beim Anwenden der LR-Karte ist zu beachten, dass die Determinante der durch den ML-Schätzer geschätzten Kovarianzmatrix \mathbf{S}_i aus Gleichung (3.5) für $m \leq p$ immer 0 ergibt - die geschätzte Kovarianzmatrix ist in diesem Fall singulär. Somit ist $\log(|\mathbf{S}_i|)$ immer $-\infty$ für jede transformierte Stichprobe i und die Teststatistik LR_i immer ∞ . Die LR-Karte ist somit nur anwendbar für $m > p$. Die Kontrollgrenzen h_2 der LR-Karte in Tabelle 3.2 sind nur approximativ für einen hinreichend großen Stichprobenumfang m der i -ten Stichprobe gültig. Im Kapitel 4.1 wird für die IC- ARL_0 200 und 370 und die Dimensionen $p = 2, 3, 5$ die exakten Kontrollgrenzen für gültige m der entsprechenden Dimension simuliert und mit den approximativen Werten verglichen.

3.3. MEWMA-Karte

Im Gegensatz zur T^2 -Karte und der LR-Karte handelt es sich bei der MEWMA-Karte (Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart) nach Lowry et al.

(1992), um eine multivariate Kontrollkarte mit Gedächtnis, die eine Verallgemeinerung der univariaten EWMA-Karte (siehe beispielsweise Weihs und Jessenberger (1999, Seite 316)) ist. Wie der Name der Karte bereits sagt, wird in der Kontrollkarte eine Teststatistik basierend auf dem multivariaten gewichteten Mittelwert der Stichproben, der fortlaufend mit abklingenden Gewichten gegen 0 für ältere Stichproben berechnet wird, abgetragen. Die Voraussetzungen der MEWMA-Karte sind äquivalent zur T^2 -Karte, d.h. die Beobachtungen sind bei einem Prozess unter Kontrolle u.i.v. Realisierungen einer $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ mit bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ und bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$. Im Gegensatz zu Lowry et al. (1992) wird in dieser Arbeit nicht von einer Beobachtung je Zeitpunkt ausgegangen, sondern von einer Stichprobe der Größe m . Für die Berechnung der Teststatistik der MEWMA-Karte, wird zunächst der gleitende Durchschnitt \mathbf{Z}_i der i -ten Stichprobe definiert:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}_i + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}) \mathbf{Z}_{i-1} \quad . \quad (3.8)$$

Die Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist eine Diagonalmatrix mit Einträgen $0 < r_k (= r_{kk}) \leq 1$ mit $k = 1, \dots, p$ und es gilt $\mathbf{Z}_0 = \boldsymbol{\mu}_0$, wobei $\boldsymbol{\mu}_0$ der Erwartungswertvektor unter Kontrolle und $\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{ij}$ der Mittelwertvektor der i -ten Stichprobe ist. Die Teststatistik der MEWMA-Karte ergibt sich zu:

$$E_i^2 = (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}^{-1} (\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \quad , \quad (3.9)$$

wobei $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ die Kovarianzmatrix von \mathbf{Z}_i ist und $\boldsymbol{\mu}_0$ der Erwartungswertvektor unter Kontrolle. Die MEWMA-Karte löst einen Alarm aus, sobald der E^2 -Wert der i -ten Stichprobe eine Grenze h_3 überschreitet. Da $E_i^2 > 0$ gilt, ist ersichtlich, dass diese Kontrollkarte ebenfalls nur eine obere Kontrollgrenze besitzt. Für die Bestimmung von $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ folgt zunächst ein Satz.

Satz (4):

Unter den Annahmen, dass

- die Beobachtungen $\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{im}$ der i -ten Stichprobe u.i.v. Realisierungen einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ und bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ sind,
- die Stichproben unabhängig identisch voneinander verteilt sind
- und die Einträge der Diagonalmatrix \mathbf{R} konstant $r = r_1 = \dots = r_p \in (0, 1]$ sind,

ergibt sich nach Lowry et al. (1992) die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ aus Gleichung (3.9) zu:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i} = \frac{1}{m} \frac{r (1 - (1 - r)^{2i})}{2 - r} \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.10)$$

$$\text{und es gilt } \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i} = \frac{1}{m} \frac{r}{2 - r} \boldsymbol{\Sigma} \text{ für } i \rightarrow \infty \quad . \quad (3.11)$$

Beweis (4):

Durch vollständige Induktion wird zunächst gezeigt, dass \mathbf{Z}_i aus Gleichung (3.8) zu jedem Zeitpunkt i gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= \sum_{q=1}^i \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i-q} \bar{\mathbf{X}}_q \right) + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^i \boldsymbol{\mu}_0 \\ &= \sum_{u=0}^{i-1} \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \bar{\mathbf{X}}_{i-u} \right) + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^i \boldsymbol{\mu}_0 \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Induktionsanfang ergibt sich zu:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}_1 + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}) \boldsymbol{\mu}_0 \quad .$$

Es folgt der Induktionsschritt, wobei ausgenutzt wird, dass \mathbf{R} und somit auch $\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}$ Diagonalmatrizen sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{i+1} &= \sum_{q=1}^{i+1} \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i+1-q} \bar{\mathbf{X}}_q \right) + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i+1} \boldsymbol{\mu}_0 \\
&= \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}_{i+1} + \sum_{q=1}^i \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i+1-q} \bar{\mathbf{X}}_q \right) + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i+1} \boldsymbol{\mu}_0 \\
&= \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}_{i+1} + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}) \underbrace{\left(\sum_{q=1}^i \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^{i-q} \bar{\mathbf{X}}_q \right) + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^i \boldsymbol{\mu}_0 \right)}_{\mathbf{Z}_i} \\
&= \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}_i + (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}) \mathbf{Z}_i \quad .
\end{aligned}$$

Anschließend wird die Varianz von \mathbf{Z}_i aus Gleichung (3.12) bestimmt:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{Z}_i} &= Var \left\{ \sum_{u=0}^{i-1} \left(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \bar{\mathbf{X}}_{i-u} \right) + \underbrace{(\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^i \boldsymbol{\mu}_0}_{\text{konstant}} \right\} \\
&= \sum_{u=0}^{i-1} Var(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \bar{\mathbf{X}}_{i-u}) \quad \text{mit } \bar{\mathbf{X}}_{i-u} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{i-u,j} \\
&= \sum_{u=0}^{i-1} Var(\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{i-u,j}) \\
&= \sum_{u=0}^{i-1} (\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u) \underbrace{Var\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{i-u,j}\right)}_{\stackrel{\text{(u.i.v.)}}{=} \frac{1}{m} Var(\mathbf{X}_{i-u,1})} ((\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \mathbf{R}) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{u=0}^{i-1} (\mathbf{R} (\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u) \underbrace{Var(\mathbf{X}_{i-u,1})}_{= \Sigma} ((\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R})^u \mathbf{R}) \quad .
\end{aligned}$$

Da die Matrizen \mathbf{R} und somit auch $\mathbf{I}_{p \times p} - \mathbf{R}$ Diagonalmatrizen sind, ergibt sich das Element (q, z) mit $1 \leq q, z \leq p$ von Σ_{Z_i} zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{q,z}^{Z_i} &= \frac{1}{m} \sum_{u=0}^{i-1} (r_q (1 - r_q)^u) \sigma_{q,z} (1 - r_z)^u r_z \\ &= \frac{1}{m} r_q r_z \sigma_{q,z} \underbrace{\sum_{u=0}^{i-1} ((1 - r_q) (1 - r_z))^u}_{\text{geometrische Reihe}^5} \\ &= \frac{1}{m} r_q r_z \sigma_{q,z} \frac{1 - (1 - r_q)^i (1 - r_z)^i}{1 - ((1 - r_q) (1 - r_z))} \\ &= \frac{1}{m} r_q r_z \sigma_{q,z} \frac{1 - (1 - r_q)^i (1 - r_z)^i}{r_z + r_q - r_q r_z} . \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $r_1 = r_2 = \dots = r_p = r$ sind (insbesondere $r_q = r_z$) lässt sich in einem letzten Schritt Σ_{Z_i} umformen zu:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Z_i} &= \frac{1}{m} \frac{1 - (1 - r)^{2i}}{2r - r^2} r^2 \Sigma \\ &= \frac{1}{m} \frac{1 - (1 - r)^{2i}}{2 - r} r \Sigma . \end{aligned}$$

Der Grenzwert für Σ_{Z_i} ergibt sich zu:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Sigma_{Z_i} = \frac{1}{m} \frac{r}{2 - r} \Sigma .$$

□

Mit Hilfe des vorangegangenen Satzes kann die Teststatistik E_i^2 gemäß Gleichung (3.9) berechnet werden. Da sich die i -te Teststatistik rekursiv aus der i -ten Stichprobe und vorangegangenen Stichproben zusammensetzt und somit abhängig von der Vergangenheit ist, ist es nicht möglich die exakte Verteilung der Teststatistik zu bestimmen. Vielmehr muss die gewählte Kontrollgrenze h_3 in Abhängigkeit von \mathbf{R} und der IC-ARL₀ mit Hilfe von einer Simulation bestimmt werden. Werte für h_3 sind zum Teil in der Literatur vertafelt,

⁵ $\sum_{u=0}^i a^u = \frac{1-a^{i+1}}{1-a}$, mit $a \in (0, 1)$

siehe z.B. Lowry et al. (1992) und für die univariate EWMA-Karte Weihs und Jessenberger (1999, Seite 317 f.).

Diskussion der MEWMA-Karte

Bei der MEWMA-Karte handelt es sich um eine Kontrollkarte mit Gedächtnis, d.h. vorangegangene Stichproben fließen durch \mathbf{Z}_i nach Gleichung (3.8) in die Teststatistik der Kontrollkarte (vgl. Gleichung (3.9)) mit ein. Ein allgemeiner Vorteil von Kontrollkarten mit Gedächtnis ist, dass diese auf kleine Veränderungen zu überwachender Prozessparameter in der Regel schneller reagieren als Kontrollkarten ohne Gedächtnis. Da die Teststatistik nicht nur von der aktuellen, sondern auch von den vorangegangenen Beobachtungen abhängt, ist die Interpretation eines Alarms der MEWMA-Karte nicht so leicht wie bei der T^2 -Karte. Ein Alarm deutet bei Kontrollkarten mit Gedächtnis darauf hin, dass in der (nahen) Vergangenheit der Prozess in der Form außer Kontrolle geraten ist, dass sich beispielsweise der Prozessmittelwert der (vorangegangenen) Stichproben (leicht) verschoben hat.

Die Kontrollgrenze h_3 der MEWMA-Karte kann nicht exakt berechnet werden, sondern muss in Abhängigkeit von \mathbf{R} und der IC- ARL_0 mit Hilfe einer Simulation bestimmt werden. Die Wahl von \mathbf{R} wird z.B. in Lowry et al. (1992) und Lucas und Saccucci (1990) diskutiert. Allgemein wird empfohlen $r_1 = \dots = r_p = r$ zu wählen. Unter dieser Voraussetzung kann gezeigt werden (siehe Lowry et al. (1992)), dass die ARL der MEWMA-Karte nur von der Stichprobengröße m , dem Erwartungswertvektor unter Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_0$, außer Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_1$ und der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$ in der gleichen Form wie die T^2 -Karte (siehe Gleichung (3.2)) vom Nichtzentralitätsparameter δ der χ^2 -Verteilung abhängt. Wird nun ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ und eine IC- ARL_0 vorgegeben, so kann ein optimales \mathbf{R} mit den Einträgen $r_1 = \dots = r_p = r_{opt}$ auf der Hauptdiagonalen mit Hilfe einer Simulationsstudie gefunden werden. In Lowry et al. (1992) und Lucas und Saccucci (1990) wurden beispielsweise solch ein r_{opt} für den multivariaten bzw. univariaten Fall bestimmt. Sowohl multivariat als auch univariat gilt: Je kleiner die Prozessverschiebung, die zu einem Alarm führen soll, desto kleiner sollte r gewählt werden. Soll beispielsweise auf ein $\delta = 1$ optimal reagiert

werden, so ist es empfehlenswert $r \in [0.1, 0.2]$ zu wählen. Für den Fall $r = 1$ ergibt sich die T^2 -Karte als Spezialfall der MEWMA-Karte. In Lowry et al. (1992) wurde die MEWMA-Karte basierend auf Kontrollgrenzen mit der approximativen Kovarianzmatrix Σ_{Z_i} nach Gleichung (3.11) mit Kontrollgrenzen basierend auf der wahren Kovarianzmatrix nach Gleichung (3.10) gegenübergestellt. Da die Out-of-control-ARL (OC-ARL) bei Prozessen, die mit einer bereits eingetretenen Prozessänderung starten, bei Verwendung der wahren Kovarianzmatrix schneller gegen 1 konvergiert als bei Verwendung der approximativen Kovarianzmatrix, wird in dieser Arbeit im Folgenden immer von der wahren Kovarianzmatrix aus Gleichung (3.10) ausgegangen. Die besseren OC-ARL Eigenschaften bei Verwendung der wahren Kovarianzmatrix sind dadurch zu erklären, dass der Vorfaktor der exakten Kovarianzmatrix aus Gleichung (3.10) größer oder gleich dem Vorfaktor der approximativen Kovarianzmatrix aus Gleichung (3.11) ist. Da für die Berechnung der Teststatistik E_i^2 aus Gleichung (3.9) die Inverse der Kovarianzmatrix von Bedeutung ist, führen bei Verwendung der exakten Kovarianzmatrix schon kleinere Abweichungen von anfänglichen Stichprobenmittelwerten vom Erwartungswertvektor unter Kontrolle zu größeren Teststatistiken, wodurch frühe Alarme ausgelöst werden. Ein Nachteil der MEWMA-Karte ist, dass bei klein gewähltem r und einer starken Prozessverschiebung die MEWMA-Karte nicht so schnell einen Alarm auslöst, wie beispielsweise die T^2 -Karte. Ein weiteres Szenario, in dem die MEWMA-Karte nicht so schnell zu einem Alarm führt, ist, dass zunächst Prozessschwankungen der Form $\gamma = \mu_1 - \mu_0$ auftreten und anschließend sich der Prozess hin zu $\mu_0 - \gamma$ verschiebt. In diesem Fall wird die Teststatistik E_i^2 aus Gleichung (3.9) zunächst schnell groß, nimmt anschließend Werte bei 0 an, bevor sie dann wieder groß wird.

3.4. MCUSUM-Karte

In Crosier (1988) werden zwei Vorschläge zur multivariaten Verallgemeinerung der univariaten CUSUM-Karte (siehe beispielsweise Weihs und Jessenberger (1999, Seite 311 ff.))

gemacht. In dieser Arbeit wird lediglich diejenige MCUSUM-Karte (Multivariate Cumulative Sum Control Chart) vorgestellt, die schneller zu einem Alarm führt, wenn der Prozess außer Kontrolle gerät. Nach Crosier (1988) werden MCUSUM-Karten in der Regel dazu verwendet, um eine Verschiebung des Erwartungswertvektors von Beobachtungen, die bei einem Prozess unter Kontrolle Realisierungen einer multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ mit bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ und bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ sind, aufzudecken. Im univariaten Fall kann sich der Mittelwert einer Stichprobe bestehend aus m Beobachtungen zum festen Zeitpunkt i lediglich in zwei Richtungen vom Erwartungswert verschieben - entweder der Mittelwert einer Stichprobe ist größer oder kleiner als der Sollwert. Folglich werden bei der Anwendung der CUSUM-Karte zu jeder Stichprobe fortlaufend zwei Teststatistiken berechnet - die eine registriert hinreichend große positive Abweichungen und die andere hinreichend große negative Abweichungen des Mittelwerts der i -ten Stichprobe vom Sollwert. Ein Alarm wird ausgelöst, wenn eine der beiden Teststatistiken eine kritische Grenze überschreitet. Nach Crosier (1988) werden in der multivariaten Verallgemeinerung der CUSUM-Karte zu jedem Beobachtungszeitpunkt i zunächst C_i und \mathbf{s}_i wie folgt berechnet:

$$C_i = \left[(\mathbf{s}_{i-1} + \bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' m \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{s}_{i-1} + \bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

$$\text{und } \mathbf{s}_i = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{wenn } C_i \leq k \\ (\mathbf{s}_{i-1} + \bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{k}{C_i}\right) & \text{wenn } C_i > k \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+ \quad . \quad (3.14)$$

Es bezeichnet $\bar{\mathbf{X}}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_{ij}$ den Mittelwert der i -ten Stichprobe bestehend aus m Beobachtungen und $\boldsymbol{\mu}_0$ den Erwartungswertvektor einer Stichprobe unter Kontrolle. Darüber hinaus ist $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ und $k \in \mathbb{R}_+$ ein Kontrollkartenparameter. Die in der MCUSUM-Karte abgetragene Realisierung der Teststatistik der i -ten Stichprobe ergibt sich nach Crosier (1988) zu:

$$CU_i = \left[\mathbf{s}_i' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{s}_i \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.15)$$

Da bei der Berechnung der Teststatistik CU_i die Wurzel einer quadrierten Teststatistik verwendet wird, handelt es sich auch hier um eine einseitige Kontrollkarte. Die

MCUSUM-Karte löst einen Alarm aus, sobald der CU_i -Wert der i -ten Stichprobe eine Kontrollgrenze h_4 überschreitet. Da CU_i bedingt ist auf die vorangegangenen Stichproben, ist die Verteilung von CU_i nicht bekannt und die Kontrollgrenzen müssen in Abhängigkeit von k aus Gleichung (3.14) und der IC- ARL_0 simuliert werden. Für die univariate CUSUM-Karte sind einige Werte für h_4 z.B. in Weihs und Jessenberger (1999, Seite 314) vertafelt.

Diskussion der MCUSUM-Karte

Bei der MCUSUM-Karte handelt es sich wie bei der MEWMA-Karte um eine Kontrollkarte mit Gedächtnis. Ein Alarm ist somit analog zur MEWMA-Karte nicht nur auf die aktuelle, sondern auch auf vorangegangene Stichproben zurückzuführen - der Mittelwertvektor der letzten Stichproben hat sich von $\boldsymbol{\mu}_0$ verschoben. Der Vektor \boldsymbol{s}_i aus Gleichung (3.14) kann als kumulierte Summe gewichteter Abweichungen zwischen dem Mittelwertvektor vorangegangener Stichproben und dem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_0$ unter Kontrolle verstanden werden. Der Term $(1 - \frac{k}{C_i})$ stellt das Gewicht der Abweichung der i -ten Stichprobe dar. Ist die Abweichung des i -ten Stichprobenmittelwertvektors vom Erwartungswertvektor groß, so ist C_i und auch $(1 - \frac{k}{C_i})$ groß. Der Vektor \boldsymbol{s}_i und somit auch die Teststatistik CU_i aus Gleichung (3.15) ist nur größer 0, sofern C_i größer k ist. Für die Wahl von k empfiehlt Pignatiello (1990) $k = 0.5 \cdot \delta$, wobei δ den Nichtzentralitätsparameter der χ^2 -Verteilung aus Gleichung (3.2) bezeichnet. In Crosier (1988) wird gezeigt, dass die ARL der MCUSUM-Karte, analog zur MEWMA-Karte und T^2 -Karte, nur von der Stichprobengröße m , dem Erwartungswertvektor unter Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_0$, außer Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_1$ und der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Sigma}$ in der gleichen Form wie die T^2 -Karte (siehe Gleichung (3.2)) vom Nichtzentralitätsparameter δ abhängt. In der späteren Auswertung wird sowohl die MEWMA- als auch die MCUSUM-Karte so adjustiert, dass diese auf eine Prozessverschiebung von $\delta = 1$ optimal reagieren. Für diesen Fall ergibt sich also $k = 0.5$. Ein Vorteil der MCUSUM-Karte gegenüber der MEWMA-Karte ist die Interpretation eines Alarms. Der Vektor \boldsymbol{s}_i der i -ten Stichprobe gibt Aufschluss darüber, in welche Richtung

sich die aktuellen Prozessmittelwerte μ_1, \dots, μ_p jeweils verschoben haben. Wie bei der MEWMA-Karte handelt es sich bei der MCUSUM-Karte, um eine Kontrollkarte, die darauf ausgelegt ist, eine Verschiebung des Erwartungswertvektors $\boldsymbol{\mu}_0$ des Prozesses unter Kontrolle bei bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0$ aufzudecken. Da in der Praxis jedoch auch Situationen auftreten, bei denen sich die Kovarianzmatrix ändert, sind in der Auswertung auch Situationen von Interesse, bei denen die Kovarianzmatrix außer Kontrolle gerät.

3.5. ELR-Karte

Bei der ELR-Karte (Exponentially Weighted Likelihood-Ratio Control Chart) nach Zhang et al. (2010) handelt es sich, wie bei der bereits vorgestellten MEWMA- und MCUSUM-Karte, um eine Kontrollkarte mit Gedächtnis. Die ELR-Karte ist eine Art Erweiterung der LR-Karte aus Kapitel 3.2. Die Voraussetzungen der ELR-Karte ergeben sich analog zur LR-Karte dazu, dass die m Beobachtungen \mathbf{X}_{ij} mit $j = 1, \dots, m$ der i -ten Stichprobe jeweils unabhängig identisch verteilte Realisierungen einer multivariaten $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ -Verteilung mit bekanntem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ und bekannter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_0 \in \mathbb{R}_+^{p \times p}$ sind. Durch Anwenden der Transformation $\tilde{\mathbf{X}}_{ij} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_0)$ folgt, dass bei einem Prozess unter Kontrolle $\tilde{\mathbf{X}}_{ij}$ gemäß $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p \times p})$ verteilt ist. Die in diesem Abschnitt folgenden Berechnungen basieren analog zur LR-Karte immer auf der transformierten Variable $\tilde{\mathbf{X}}_{ij}$.

Ähnlich wie bei der MEWMA-Karte (vgl. Abschnitt 3.3) wird für die Berechnung der Teststatistik der ELR-Karte nach Zhang et al. (2010) ein gleitender Durchschnitt für den Mittelwert \mathbf{u}_i und zusätzlich einer für die Varianz \mathbf{v}_i eingeführt:

$$\mathbf{u}_i = r \tilde{\mathbf{X}}_i + (1 - r)\mathbf{u}_{i-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_i = r \mathbf{S}_i + (1 - r)\mathbf{v}_{i-1} \quad , \quad (3.16)$$

wobei $\mathbf{S}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \mathbf{u}_i)(\tilde{\mathbf{X}}_{ij} - \mathbf{u}_i)'$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_0 = \mathbf{I}_{p \times p}$ gilt; $r \in (0, 1]$ wird als Glättungsparameter bezeichnet. Die Teststatistik der ELR-Karte leitet sich direkt aus der Gleichung (3.5) aus dem Kapitel 3.2 ab. Die Maximum-Likelihood Schätzer, die beim

Anwenden der LR-Karte von zentraler Bedeutung sind, werden in Gleichung (3.5) einfach durch die fortlaufend berechneten Größen \mathbf{u}_i bzw. \mathbf{v}_i ersetzt. Für die Teststatistik ELR_i folgt direkt:

$$ELR_i = m p \left(\frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{v}_i) - \log(|\mathbf{v}_i|^{\frac{1}{p}}) - 1 \right) + m \|\mathbf{u}_i\|^2 \quad . \quad (3.17)$$

Die ELR-Karte löst einen Alarm aus, sobald die Teststatistik ELR_i eine Grenze $h_5 > 0$ überschreitet. Da die Teststatistik ELR_i analog zur MEWMA-Karte und MCUSUM-Karte von vorangegangenen Stichproben abhängig ist, muss h_5 in Abhängigkeit der IC-ARL₀, der Dimension p und r mit Hilfe einer Simulation bestimmt werden. Einige Werte für die zu wählende Grenze h_5 können bei Zhang et al. (2010, Tabelle 1) nachgeschlagen werden. Die entsprechende Tabelle zeigt auch die Abbildung A.2 aus dem Anhang.

Diskussion ELR-Karte

Die ELR-Karte baut auf den gleichen Grundlagen wie die LR-Karte aus Kapitel 3.2 auf. Das Testproblem, welches der ELR-Karte zugrunde liegt, wurde im Kapitel der LR-Karte in Gleichung (3.3) vorgestellt. Der entscheidende Unterschied beim Anwenden der ELR-Karte im Vergleich zur LR-Karte ist, dass das Testproblem nicht mit Hilfe einer Maximum-Likelihood Schätzung (siehe Gleichung (3.5)) zum i -ten Zeitpunkt für die transformierte i -te Stichprobe gelöst wird, sondern mit Hilfe einer Teststatistik (siehe Gleichung (3.17)), die sich aus einer neuen Stichprobe und aus vorangegangenen Stichproben zusammensetzt. Die ELR-Karte ist somit in dem Sinne eine Erweiterung der LR-Karte, als dass diese eine LR-Karte mit Gedächtnis darstellt und für $m \leq p$ anwendbar ist. Ist $m > p$, so kann der Glättungsparameter r der ELR-Karte (siehe Gleichung (3.16)) als 1 gewählt werden und die LR-Karte aus Kapitel 3.2 ergibt sich als Spezialfall der ELR-Karte.

Nach Zhang et al. (2010) können die fortlaufend berechneten Größen \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i nach Gleichung (3.16), sofern $m \cdot i > p$ ist, als Schätzer für das wahre $\boldsymbol{\mu}$ bzw. die wahre Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ verwendet werden, sodass die Teststatistik der ELR-Karte nach Gleichung (3.17) bei einer Verschiebung/Veränderung des Sollwertes eines oder mehrerer

Parameter(s) anwächst. Entsprechend schnell wird die Grenze h_5 überschritten und die ELR-Karte löst einen Alarm aus.

Analog zur MEWMA-Karte führt beim Anwenden der ELR-Karte ebenfalls ein kleiner Glättungsparameter $r \in (0, 1]$ bei einer kleinen Prozessverschiebung eines oder mehrerer Parameter schneller zu einem Alarm als ein großer Glättungsparameter (vgl. Zhang et al. (2010)). Darüber hinaus empfehlen Zhang et al. (2010) zur Berechnung von \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i (siehe Gleichung (3.16)) den gleichen Glättungsparameter zu verwenden.

4. Vergleich der Qualitätskontrollkarten

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 3 vorgestellten Kontrollkarten miteinander verglichen. In einem ersten Teil werden zunächst die jeweiligen Kontrollgrenzen der jeweiligen Kontrollkarten zu der fest vorgegebenen IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 bestimmt. Zusätzlich werden die simulierten Dichten der Lauflängen zur Bestimmung der IC- ARL_0 von 200 grafisch dargestellt. Lediglich bei der T^2 -Karte sind die Kontrollgrenzen zu einer vorgegebenen IC- ARL_0 und Dimension p der Beobachtungen bekannt (siehe Kapitel 3.1). In Kapitel 3.2 wurden die approximativen Kontrollgrenzen der LR-Karte für einen hinreichend großen Stichprobenumfang m der i -ten Stichprobe bestimmt. Es wird für die Dimensionen 2, 3 und 5 mit Hilfe von Simulationen überprüft, ab welchem m die entsprechenden approximativen Kontrollgrenzen der LR-Karte für die IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 aus Tabelle 3.2 gültig sind. Für die MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte werden die Kontrollgrenzen zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 für die Dimensionen 2, 3 und 5 simuliert. Im zweiten Teil des Kapitels werden außer Kontrolle geratene Produktionsprozesse, hinsichtlich ihrer Out-of-Control-ARL (OC-ARL) untersucht. Es sind sowohl Verschiebungen des Erwartungswertvektors, als auch Veränderungen der Kovarianzmatrix von Interesse.

Für die gesamte Auswertung wird das statistische Softwarepaket **R 3.0.0** (R Core Team (2013)) mit dem zusätzlichen Paket *mvtnorm* (Genz et al. (2012)) zur Erzeugung der multivariaten Zufallszahlen verwendet. Zur grafischen Darstellung wird das zusätzliche Paket *ggplot2* (Wickham (2009)) in das Programm eingebunden.

4.1. Simulation der Kontrollgrenzen und der Dichten der Lauflänge unter Kontrolle

Zu Beginn dieses Abschnitts werden zunächst ausgewählte Kontrollgrenzen der MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte mit Hilfe einer Simulationsstudie bestimmt. Diese Kontrollgrenzen werden in Abhängigkeit der Dimension p der Beobachtungen, der Stichprobengröße m zu jedem Beobachtungszeitpunkt i , der IC- ARL_0 und möglichen Kontrollkartenparametern (\mathbf{R} , k bzw. r) simuliert. Dabei sind die Dimensionen $p = 2, 3$ und 5 und Stichprobengrößen von $m = 1, 2, 3, 5$ und 10 , wie sie in der Praxis häufig auftreten, von Interesse. Passende Kontrollgrenzen werden jeweils zu einer IC- ARL_0 (ARL bei einem Prozess unter Kontrolle) von 200 und 370 mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen simuliert. Bei der MEWMA-Karte werden die Kontrollgrenzen für ein konstantes \mathbf{R} mit den Einträgen $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_p)' = (0.2, \dots, 0.2)'$ auf der Hauptdiagonalen (siehe Kapitel 3.3) bestimmt. Der Kontrollkartenparameter der MCUSUM-Karte wird fest mit $k = 0.5$ (siehe Kapitel 3.4) gewählt. Folglich sind die MEWMA- und die MCUSUM-Karte so adjustiert, dass sie beide optimal auf Verschiebungen von $\delta = 1$, wobei δ der Nichtzentralitätsparameter der χ^2 -Verteilung nach Gleichung (3.2) ist, reagieren. Der Glättungsparameter der ELR-Karte wird analog zur MEWMA-Karte in der weiteren Auswertung mit $r = 0.2$ (siehe Kapitel 3.5) festgesetzt. Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse beruhen alle auf jeweils 10.000 simulierten Läufen (Runs). Ein Run endet, sobald die jeweils fortlaufend berechnete Teststatistik zu einem Zeitpunkt i eine Grenze $h_{Run} \in \mathbb{R}_+$ überschreitet. Unter Kontrolle entstammen alle Beobachtungen einer multivariaten Normalverteilung mit $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$ und $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_{p \times p}$. Für jedes $h_0 \in [0, h_{Run}]$ kann nun die Anzahl an Stichprobenziehungen eines jeweiligen Runs bestimmt werden, die benötigt wird, um die Grenze h_0 zu überschreiten. Der Mittelwert der benötigten Stichprobenziehungen aller 10.000 Runs zu einer vorgegebenen Grenze h_0 ist die simulierte Average Run Length ARL_{sim} zu einer vorgegebenen Grenze h_0 . Diejenige Grenze h_0 mit seiner dazugehörigen ARL_{sim} wird ausgewählt, für die der betragsmäßige Abstand $|\text{IC-}ARL_0 - ARL_{sim}|$ minimiert wird - die gefundene ARL_{sim} ist somit diejenige ARL_{sim} , die am nächsten an die vorgegebene IC- ARL_0 heranreicht. Die

folgenden Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 zeigen die simulierten Kontrollgrenzen zur MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte.

	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 5$		$m = 10$	
p	ARL_{sim}	h_3	ARL_{sim}	h_3	ARL_{sim}	h_3	ARL_{sim}	h_3	ARL_{sim}	h_3
2	199.68	9.72	199.86	9.73	200.08	9.72	200.13	9.71	199.65	9.68
2	370.74	11.02	370.47	11.08	370.57	11.06	370.38	11.01	369.91	11.04
3	199.85	11.92	199.74	11.91	200.24	11.92	199.95	11.92	200.35	11.93
3	369.39	13.35	369.71	13.31	369.37	13.36	369.97	13.35	369.56	13.36
5	200.53	15.78	199.54	15.80	200.24	15.81	200.04	15.84	200.07	15.77
5	370.45	17.36	370.09	17.36	370.66	17.39	369.80	17.40	370.40	17.38

Tabelle (4.1): Diese Tabelle zeigt simulierte Kontrollgrenzen h_3 der MEWMA-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 für $r_1 = \dots = r_p = 0.2$ in Abhängigkeit der Dimension $p = 2, 3, 5$, der Stichprobengröße $m = 1, 2, 3, 5, 10$ und der simulierten ARL_{sim} .

	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 5$		$m = 10$	
p	ARL_{sim}	h_4	ARL_{sim}	h_4	ARL_{sim}	h_4	ARL_{sim}	h_4	ARL_{sim}	h_4
2	200.18	5.48	200.87	5.49	199.46	5.48	200.65	5.49	200.02	5.49
2	370.10	6.21	369.50	6.20	369.42	6.20	368.81	6.22	371.64	6.20
3	199.21	6.87	200.52	6.86	199.12	6.86	199.72	6.87	199.56	6.86
3	370.19	7.73	368.94	7.71	370.42	7.70	371.13	7.70	370.65	7.71
5	200.32	9.40	199.68	9.37	200.40	9.36	199.41	9.40	200.49	9.39
5	369.39	10.42	369.92	10.40	369.75	10.40	369.72	10.42	369.46	10.42

Tabelle (4.2): Diese Tabelle zeigt simulierte Kontrollgrenzen h_4 der MCUSUM-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 für $k = 0.5$ in Abhängigkeit der Dimension $p = 2, 3, 5$, der Stichprobengröße $m = 1, 2, 3, 5, 10$ und der simulierten ARL_{sim} .

	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 5$		$m = 10$	
p	ARL_{sim}	h_5	ARL_{sim}	h_5	ARL_{sim}	h_5	ARL_{sim}	h_5	ARL_{sim}	h_5
2	199.06	1.71	201.65	1.73	200.03	1.73	199.88	1.74	197.04	1.74
2	365.85	1.87	372.82	1.90	365.18	1.90	364.75	1.91	367.84	1.92
3	199.03	2.47	197.64	2.48	198.74	2.49	197.73	2.49	201.15	2.50
3	374.20	2.67	367.59	2.68	368.01	2.69	372.77	2.70	365.19	2.70
5	199.36	4.33	201.59	4.34	201.07	4.34	202.20	4.32	199.98	4.31
5	372.89	4.57	369.44	4.59	368.93	4.58	368.53	4.57	367.64	4.56

Tabelle (4.3): Diese Tabelle zeigt simulierte Kontrollgrenzen h_5 der ELR-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 für $r = 0.2$ in Abhängigkeit der Dimension $p = 2, 3, 5$, der Stichprobengröße $m = 1, 2, 3, 5, 10$ und der simulierten ARL_{sim} .

Die MEWMA- und MCUSUM-Karte hängen in gleicher Form wie die T^2 -Karte vom Nichtzentralitätsparameter δ (siehe Gleichung (3.2)) ab. Ist der Produktionsprozess unter Kontrolle, so ergibt sich $\delta = 0$. Es folgt direkt, dass die IC- ARL_0 bei diesen drei Regelkarten unabhängig von der Stichprobengröße m ist. Die Tabellen 4.1 und 4.2 bestätigen dies. Die jeweils gefundenen Kontrollgrenzen h_3 bzw. h_4 in den Zeilen der Tabellen 4.1 und 4.2 für die gewählte Stichprobengröße $m = 1, 2, 3, 5$ und 10 spiegeln lediglich die Varianz der durchgeführten Simulationen wieder und können als Durchschnittswert (siehe Tabelle 4.4) zusammengefasst werden. In Crosier (1988) sind für die MCUSUM-Karte für eine IC- $ARL_0 = 200$, $p = 2$ bzw. 5 und $k = 0.5$ Kontrollgrenzen von 5.50 bzw. 9.46 vertafelt. Die Tabelle 4.4 liefert für diese beiden Fälle Kontrollgrenzen von 5.49 und 9.38 mit einer Standardabweichung von 0.01 bzw. 0.02. Da in Crosier (1988) die Kontrollgrenzen mit deutlich weniger Simulationen und einer anderen Methodik bestimmt wurden, werden in der weiteren Auswertung in dieser Arbeit die gefundenen zusammengefassten Kontrollgrenzen aus Tabelle 4.4 verwendet.

	$p = 2$		$p = 3$		$p = 5$	
	IC-ARL ₀		IC-ARL ₀		IC-ARL ₀	
	200	370	200	370	200	370
h_3	9.71	11.04	11.92	13.35	15.80	17.38
SD_{h_3}	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.02
h_4	5.49	6.21	6.86	7.71	9.38	10.41
SD_{h_4}	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01

Tabelle (4.4): Diese Tabelle zeigt die zusammengefassten Kontrollgrenzen h_3 der MEWMA-Karte und h_4 der MCUSUM-Karte mit ihren Standardabweichungen (SD) in Abhängigkeit der Dimension $p = 2, 3, 5$ und der IC-ARL₀ von 200 und 370.

Auch die Kontrollgrenzen der ELR-Karte in Tabelle 4.3 wirken auf den ersten Blick unabhängig von m . In den Zeilen ist jedoch für steigendes m eine jeweils steigende oder auch fallende Kontrollgrenze h_5 zu erkennen. Allgemein scheint eine jeweilige Kontrollgrenze für großes m gegen einen festen Wert zu konvergieren. Die Abbildung A.2 aus dem Anhang zeigt simulierte Kontrollgrenzen der ELR-Karte nach Zhang et al. (2010). In dem Artikel wurde eine jeweilige Kontrollgrenze mit einer Genauigkeit von 20.000 Runs auf drei Nachkommastellen genau bestimmt. Das Abfallen/Ansteigen der jeweiligen Kontrollgrenze für wachsendes m ist in der Abbildung A.2 noch deutlicher zu erkennen – genauso wie die Konvergenz einer jeweiligen Kontrollgrenze gegen einen festen Wert für großes m . Das Konvergieren einer jeweiligen Kontrollgrenze für großes m ist zu erwarten, da die Teststatistik einer Stichprobe i für großes m einer festen Verteilung, nämlich der χ^2 -Verteilung (siehe Kapitel 3.2), folgt. Abschließend gilt festzuhalten, dass die simulierten Kontrollgrenzen h_5 der ELR-Karte aus Tabelle 4.3 im Einklang mit den Kontrollgrenzen nach Zhang et al. (2010), die die Abbildung A.2 im Anhang zeigt, stehen.

In einem nächsten Schritt sind die jeweiligen Dichten der simulierten Lauflängen der Kontrollkarten bei einem Prozess unter Kontrolle von Interesse. Bei Kontrollkarten ohne Gedächtnis (wie die T^2 - und LR-Karte) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrollkarte

einen Alarm bei einem Prozess unter Kontrolle zum Zeitpunkt i auslöst konstant α . Wie in Kapitel 2.2 bereits ausgenutzt wurde, ist die Lauflänge einer Kontrollkarte ohne Gedächtnis unter Kontrolle geometrisch verteilt mit Parameter α . Die Dichte der Lauflänge für Kontrollkarten ohne Gedächtnis kann somit direkt bestimmt werden und muss nicht simuliert werden. Die Abbildung 4.1 zeigt für den Fall der T^2 -Karte somit die Dichte einer geometrischen Verteilung mit Parameter $\alpha = 0.005$, was einer IC- ARL_0 von $\frac{1}{\alpha} = 200$ entspricht. Die abgebildete Dichte der Lauflänge der T^2 -Karte ist somit repräsentativ für jede andere Kontrollkarte ohne Gedächtnis (insbesondere auch für die LR-Karte). Die Breite eines Rechtecks in den Histogrammen in Abbildung 4.1 wurde fest mit 6 gewählt, d.h. die erste Säule eines jeweiligen Histogramms entspricht der durchschnittlichen Wahrscheinlichkeit für das Auslösen eines Alarms der jeweiligen Kontrollkarte nach einer der ersten sechs Stichproben eines Runs. Bei der T^2 -Karte ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrollkarte bei einer weiteren Stichprobe einen Alarm auslöst, zu jedem Zeitpunkt $\alpha \cdot 100\% = 0.5\%$ - d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Run eine Lauflänge von mehr als 1.000 erreicht ist genau $(1 - \sum_{i=0}^{999} 0.995^i \cdot 0.005) \cdot 100\% = 0.665\%$. Somit haben von den anfänglich gewählten 10.000 Runs etwa 67 eine theoretische Lauflänge von über 1.000, die in dem Histogramm für die T^2 -Karte in Abbildung 4.1 nicht mehr abgebildet werden. Die Histogramme der MEWMA- und der T^2 -Karte ähneln einander stark. Bei dem Histogramm zur Lauflänge der ELR- und MCUSUM-Karte ist auffällig, dass ein Run (im Vergleich zur MEWMA- und T^2 -Karte) eine eher geringe Wahrscheinlichkeit besitzt, innerhalb der ersten 6 Stichproben (erste Säule des Histogramms) einen Alarm auszulösen. Folglich kommt ein „schneller anfänglicher Alarm“ (FIR, fast initial response (siehe Crosier (1988))) bei diesen beiden Kontrollkarten eher selten vor. Beim später folgenden Vergleich der Kontrollkarten mit Gedächtnis ist somit zu erwarten, dass die MEWMA-Karte bei mittelmäßig großen und großen Erwartungswertverschiebungen einen Vorteil gegenüber der MCUSUM- und ELR-Karte hat, da es bei dieser Kontrollkarte für die fortlaufend berechnete Teststatistik der ersten (sechs) Stichproben „leichter“ möglich ist, die kritische Kontrollgrenze h_3 direkt zu überschreiten und somit einen Alarm auszulösen.

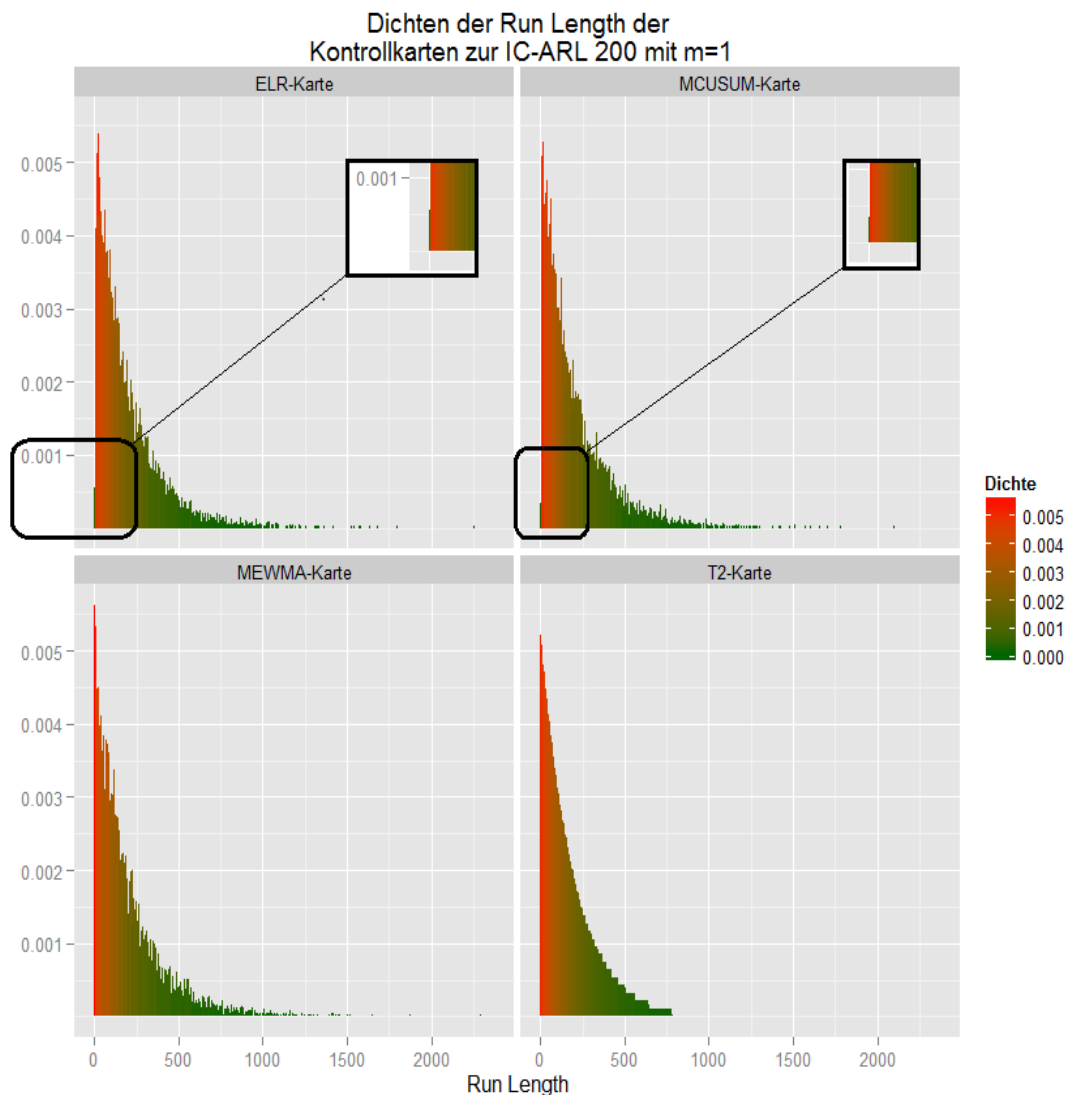


Abbildung (4.1): Diese Abbildungen zeigen beispielhaft die Dichten der Lauflängen der ELR-, MEWMA-, MCUSUM- und T^2 -Karte zu einer $IC-ARL_0$ von 200 anhand von je 10.000 (simulierten) Runs mit der Stichprobengröße $m = 1$.

Abschließend wird in diesem Abschnitt die Güte der Approximation der Kontrollgrenze h_2 der LR-Karte (siehe Tabelle 3.2 in Kapitel 3.2) durch die χ^2 -Verteilung mit $l = \frac{1}{2} p (p + 3)$ Freiheitsgraden für wachsendes m untersucht. Da der Likelihood-Ratio Test nur für einen zu überwachenden Produktionsprozess mit Stichprobenumfang $m > p$ durchführbar ist, ergibt sich der kleinste wählbare Stichprobenumfang bei der LR-Karte zu beliebigem Zeitpunkt i

p	m	ARL_{sim}	h_2	m	ARL_{sim}	h_2	m	ARL_{sim}	h_2	$1 - \alpha$	$\chi^2_{1-\alpha, l}$
2	3	200.09	37.28	4	199.66	26.89	5	200.25	23.52	0.995	16.75
2	10	200.03	19.32	20	200.48	17.94	50	200.46	17.20		
2	3	370.21	40.94	4	370.39	29.41	5	370.41	25.67	0.9973	18.21
2	10	369.84	20.99	20	369.57	19.48	50	369.26	18.68		
3	4	199.89	55.61	5	200.17	39.89	6	200.02	34.67	0.995	23.59
3	10	199.66	28.55	20	200.02	25.66	50	199.78	24.36		
3	4	369.96	60.51	5	369.97	42.97	6	370.04	37.25	0.9973	25.26
3	10	369.66	30.56	20	369.73	27.53	50	369.81	26.09		
5	6	199.94	98.50	7	200.26	71.97	8	199.93	62.50	0.995	40.00
5	10	200.17	54.50	20	200.01	45.43	50	199.73	41.90		
5	6	370.12	106.12	7	369.73	76.51	8	370.00	66.27	0.9973	42.08
5	10	369.74	57.41	20	369.76	47.82	50	370.26	44.08		

Tabelle (4.5): Diese Tabelle zeigt simulierte Kontrollgrenzen h_2 der LR-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 in Abhängigkeit der Dimension $p = 2, 3, 5$, der Stichprobengröße m und der simulierten ARL_{sim} . Die letzte Spalte gibt das approximative $(1 - \alpha)$ -Quantil der entsprechenden χ^2 -Verteilung mit $l = \frac{1}{2} p (p + 3)$ Freiheitsgraden an (vgl. Tabelle 3.2).

zu $m = p + 1$. Für die Dimensionen $p = 2, 3$ und 5 wurde für $m = p + 1, p + 2, p + 3, 10, 20$ und 50 nach der selben Methodik wie bei den anderen Regelkarten die jeweilige Kontrollgrenze h_2 der LR-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 mit Hilfe von Simulationen bestimmt. Die gefundenen Kontrollgrenzen können anschließend direkt mit den Kontrollgrenzen aus Tabelle 3.2, die für ein hinreichend großes m gültig sind, verglichen werden. Die Tabelle 4.5 zeigt die entsprechenden simulierten Kontrollgrenzen h_2 der LR-Karte in Abhängigkeit von m . Es ist deutlich zu erkennen, dass insbesondere für kleines m die Approximation der Kontrollgrenze h_2 durch die χ^2 -Verteilung mit $l = \frac{1}{2} p (p + 3)$ Freiheitsgraden nicht geeignet ist. Für $m = p + 1$ ist beispielsweise in allen Fällen die mit Simulation bestimmte

Kontrollgrenze h_2 mehr als doppelt so groß wie das theoretische Quantil der χ^2 -Verteilung. Um eine Aussage über die Güte der Approximation zu treffen, kann die Tabelle A.1 aus dem Anhang herangezogen werden. Für die entsprechende theoretische Kontrollgrenze der LR-Karte passend zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 aus der Tabelle 4.5 wurde die tatsächliche ARL_{sim} in Abhängigkeit von der Dimension $p = 2, 3$ und 5 und dem Stichprobenumfang $m = p + 1, p + 2, p + 3, 10, 20$ und 50 mit Hilfe von Simulationen bestimmt. Der Wert von ARL_{sim} dieser Tabelle gibt somit diejenige IC- ARL_0 an, die sich beim Verwenden der entsprechenden approximativen Kontrollgrenze aus der Tabelle 3.2 der LR-Karte ergeben würde. In der Tabelle A.1 aus dem Anhang ist klar zu erkennen, dass selbst bei einem Stichprobenumfang von $m = 50$ die entsprechend gewählten approximativen Kontrollgrenzen der LR-Karte zu einer IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 nicht zu einer ARL_{sim} von 200 bzw. 370 führen. Für weitere Berechnungen zur LR-Karte werden somit nicht die approximativen Grenzen aus Tabelle 3.2, sondern die simulierten Kontrollgrenzen aus Tabelle 4.5 verwendet.

4.2. Vergleich von Prozessen außer Kontrolle

4.2.1. Verschiebung des Erwartungswertvektors

Im Folgenden geht es um den Vergleich der Qualitätskontrollkarten anhand der OC- ARL bei außer Kontrolle geratenen Prozessen. In diesem Abschnitt sind insbesondere Verschiebungen des Erwartungswertvektors von Interesse, d.h. die Kovarianzmatrix wird konstant mit $\Sigma_0 = \mathbf{I}_{p \times p}$ angenommen. Da die T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte in gleicher Form bei bekannter Kovarianzmatrix vom Nichtzentralitätsparameter δ der χ^2 -Verteilung abhängen (siehe Gleichung (3.2)), wird der Nichtzentralitätsparameter δ beim Vergleich von außer Kontrolle geratenen Prozessen mit angegeben. Für diese drei Kontrollkarten ist somit ein noch allgemeingültigerer Vergleich anhand von δ untereinander möglich. Die Tabelle 4.6 zeigt die simulierten OC- ARL Werte der fünf Kontrollkarten zu einer IC- ARL_0 von jeweils 200 - der geringste OC- ARL Wert ist jeweils grün und der größte

OC-ARL Wert rot hinterlegt. Die Dimension der Beobachtungen ist $p = 2$, sodass sich der Erwartungswertvektor außer Kontrolle zu $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1, \mu_2)'$ ergibt - während unter Kontrolle $\boldsymbol{\mu}_{IC} = (0, 0)'$ gilt. Die einzelnen Kontrollgrenzen der jeweiligen Regelkarten wurden dabei aus den entsprechenden Tabellen in Kapitel 3.1 bzw. Kapitel 4.1 entnommen. Da für die T^2 -Karte die Wahrscheinlichkeit, dass ein Alarm zum Zeitpunkt i ausgelöst wird, direkt in Abhängigkeit von δ bestimmt werden kann (siehe Kapitel 3.1), ist neben der simulierten OC-ARL auch die theoretische OC-ARL in Tabelle 4.6 angegeben. Die theoretische OC-ARL der T^2 -Karte ist $\text{OC-ARL}(\delta, p, \text{IC-ARL}_0) = \frac{1}{1 - F_{\delta, p}(\chi_{p, 1-\alpha}^2)}$, wobei $\alpha = \frac{1}{\text{IC-ARL}_0}$ und $F_{\delta, p}$ die Verteilungsfunktion der χ^2 -Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter δ und p Freiheitsgraden ist. Für $\delta = 0$ (Prozess ist unter Kontrolle) folgt direkt, dass die OC-ARL gleich der eingesetzten IC-ARL_0 ist:

$$\begin{aligned} \text{OC-ARL}(0, p, \text{IC-ARL}_0) &= \frac{1}{1 - F_{\delta=0, p}(\chi_{p, 1-\alpha}^2)} = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{\text{IC-ARL}_0})} = \text{IC-ARL}_0 \quad . \end{aligned}$$

Die Spalte T_{sim}^2 der Tabelle 4.6 zeigt die simulierten OC-ARL Werte der T^2 -Karte, während die Spalte T_{theor}^2 die theoretischen OC-ARL Werte der T^2 -Karte angibt. Da die simulierten OC-ARL Werte in allen Fällen hinreichend nah an die theoretischen OC-ARL Werte der T^2 -Karte heranreichen, ist insgesamt von einem guten Simulationsergebnis auszugehen. Bei der LR-Karte ist zu beachten, dass diese bei Stichprobenumfängen von $m \leq p$ zu jedem Zeitpunkt i nicht anwendbar ist. Für alle Fälle mit $m = 1$ und $p = 2$ kann somit kein OC-ARL Wert der LR-Karte bestimmt werden.

Werden zunächst nur der Nichtzentralitätsparameter δ und jeweils die OC-ARL einer der fünf Regelkarten in Tabelle 4.6 betrachtet, so ist ersichtlich, dass für festes m die OC-ARL für $\delta \rightarrow \infty$ jeder Regelkarte (monoton von oben) gegen 1 konvergiert. Folglich wird bei einer hinreichend großen Verschiebung des Erwartungswertvektors unabhängig von der Regelkarte und dem Stichprobenumfang m direkt ein Alarm zum ersten Zeitpunkt (nach Entnahme der ersten Stichprobe) ausgelöst. Die Fälle mit Nichtzentralitätsparameter $\delta = 0.50, 1, 2$ und 3 wurden jeweils doppelt simuliert. Für die Kontrollkarten, deren

Prozessparameter:				OC-ARL der einzelnen Kontrollkarten:					
δ	μ_1	μ_2	m	T_{sim}^2	$T_{theor.}^2$	LR	MEWMA	MCUSUM	ELR
0.25	0.00	0.25	1	171.64	170.96		95.54	85.42	111.90
0.43	0.00	0.25	3	131.35	130.26	190.93	44.87	38.26	61.58
0.50	0.00	0.25	4	115.33	115.53	176.37	35.14	30.63	48.61
0.35	0.25	0.25	1	147.86	148.34		62.27	53.50	76.16
0.61	0.25	0.25	3	93.12	93.07	184.91	24.21	22.04	33.79
0.71	0.25	0.25	4	76.35	76.86	159.20	18.51	17.81	25.59
0.50	0.00	0.50	1	115.41	115.53		34.75	30.64	45.03
0.87	0.00	0.50	3	54.85	55.32	168.53	12.76	13.20	17.33
1.00	0.00	0.50	4	41.53	41.92	124.68	10.03	10.86	13.44
1.00	0.00	1.00	1	41.28	41.92		10.09	10.87	13.26
1.73	0.00	1.00	3	10.45	10.51	95.95	4.53	5.87	5.61
2.00	0.00	1.00	4	6.84	6.88	38.48	3.84	5.11	4.56
1.50	0.00	1.50	1	15.74	15.78		5.47	6.76	6.96
2.60	0.00	1.50	3	3.18	3.18	39.33	2.93	4.11	3.20
3.00	0.00	1.50	4	2.14	2.16	9.63	2.59	3.67	2.72
2.00	0.00	2.00	1	6.92	6.88		3.79	5.13	4.49
3.46	0.00	2.00	3	1.56	1.56	13.80	2.34	3.35	2.21
4.00	0.00	2.00	4	1.22	1.23	3.01	2.17	3.09	1.91
3.00	0.00	3.00	1	2.17	2.16		2.59	3.69	2.45
5.20	0.00	3.00	3	1.02	1.02	2.21	2.01	2.76	1.30
6.00	0.00	3.00	4	1.00	1.00	1.09	2.00	2.47	1.13

Tabelle (4.6): Diese Tabelle zeigt die simulierten OC-ARL Werte der fünf Kontrollkarten für außer Kontrolle geratene Prozesse durch die Verschiebung des Erwartungswertvektors $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$. Die IC-ARL₀ aller Kontrollkarten beträgt dabei 200 und die Dimension p der Beobachtungen ist als 2 angenommen.

OC-ARL nur von δ (T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte) abhängt, sind in diesen Fällen gleiche Simulationsergebnisse zu erwarten. Folglich ist es anhand der doppelt simulierten OC-ARL Werte möglich, einen Eindruck von der Varianz der durchgeführten Simulationen zu gewinnen. Wird die OC-ARL der ELR-Karte für den Fall $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.5$ und $m = 1$ mit dem Fall $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.25$ und $m = 4$ (δ ist in beiden Fällen 0.5) verglichen, so ergibt sich eine OC-ARL von 45.03 bzw. 48.61. Die Differenz von 3.58 dieser beiden OC-ARL Werte der ELR-Karte scheint verglichen mit den Unterschieden, die sich für diesen Fall bei der T^2 -, MEWMA- bzw. MCUSUM-Karte ergeben, signifikant größer 0 zu sein, sodass die OC-ARL Werte der ELR-Karte nicht in der gleichen Form wie bei der T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte von δ abhängig sind. Die Tabelle A.2 aus dem Anhang zeigt für je drei unterschiedliche passend zu einem $\delta = 0.5, 1$ und 2 gewählten Erwartungswertvektoren $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1, \mu_2)'$ simulierte OC-ARL Werte mit festem Stichprobenumfang $m = 1$ der ELR-Karte. Die OC-ARL der ELR-Karte für $\delta = 0.5$ und Stichprobenumfang $m = 1$ ist in allen drei Fällen kleiner als 48.61, wie es das Simulationsergebnis in Tabelle 4.6 für den Fall $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.25$ und $m = 4$ ($\delta = 0.5$) zeigt. Für $\delta = 1$ und $\delta = 2$ sind die OC-ARL Werte der ELR-Karte recht klein, sodass es für diese Fälle aufgrund der Varianz der Simulationsergebnisse nicht mehr möglich ist einen Unterschied in der OC-ARL für unterschiedlich großes m aber festem δ festzustellen.

Es gilt festzuhalten, dass die ELR-Karte nicht in der gleichen Form wie die T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte vom Nichtzentralitätsparameter δ (siehe Gleichung (3.2)) abhängt. Eine Erklärung hierfür sind die Kontrollgrenzen, die bei der ELR-Karte nicht unabhängig von m sind (siehe Kapitel 4.2) - bei den anderen drei Regelkarten (T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte) hingegen schon. Obwohl die OC-ARL der ELR-Karte nicht direkt abhängig von δ ist, wird im Folgenden dennoch auch die ELR-Karte anhand dieses Parameters mit der T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte verglichen. Es ist also insbesondere bei diesen Vergleichen zu beachten, dass diese sich immer nur auf die δ 's mit dem entsprechenden Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1, \mu_2)'$ und Stichprobenumfang m aus Tabelle 4.6 beziehen - ein allgemeingültiger Vergleich ist hier nicht zulässig. Gleiches gilt auch für die LR-Karte, die einen Spezialfall der ELR-Karte mit $r = 1$ darstellt.

Werden die gesamten OC-ARL Werte aus Tabelle 4.6 der unterschiedlichen Regelkarten miteinander verglichen, so schneidet für $0.25 \leq \delta \leq 0.71$ die MCUSUM-Karte am besten ab, d.h. die MCUSUM-Karte erzielt in diesem Bereich die geringsten OC-ARL Werte. Für den Bereich $0.87 \leq \delta \leq 2.6$ besitzt die MEWMA-Karte die geringsten OC-ARL Werte, während für $3 \leq \delta \leq 6$ die T^2 -Karte am besten geeignet ist. Die ELR-Karte besitzt in keinem der gewählten Fälle die geringste OC-ARL. Insbesondere für kleines $\delta < 1$ sind die erzielten OC-ARL Werte der ELR-Karte deutlich größer als die der MEWMA- und MCUSUM-Karte. Für wachsendes $\delta > 1$ fällt die OC-ARL der ELR-Karte allerdings schneller gegen 1 ab als die der MEWMA- und MCUSUM-Karte. Bereits für $\delta \geq 1.73$ ist die ELR-Karte der MCUSUM-Karte überlegen und für $\delta \geq 3.46$ erzielt sie zudem geringere OC-ARL Werte als die MEWMA-Karte. Die (gedächtnislose) T^2 -Karte ist für Erwartungswertverschiebungen $\delta \leq 2$ den untersuchten Kontrollkarten mit Gedächtnis klar unterlegen. Für Erwartungswertverschiebungen mit $\delta \geq 3$ löst die T^2 -Karte im Mittel hingegen am schnellsten einen Alarm aus. Für $\delta = 6$ erreicht die T^2 -Karte als erste und einzige der untersuchten Kontrollkarten eine OC-ARL von 1, d.h. in diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten der Kontrollgrenze der T^2 -Karte nach Entnahme der ersten Stichprobe annähernd 1. Die Abhängigkeit der OC-ARL Werte vom Stichprobenumfang ist bei der LR-Karte verglichen mit der ELR-Karte noch stärker ausgeprägt. Beispielsweise beträgt für $\delta = 3$ mit $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1.5$ und $m = 4$ die OC-ARL der LR-Karte 9.63, aber für $\delta = 3.46$ mit $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$ und $m = 3$ noch 13.46. Folglich ist die OC-ARL dieser Regelkarte nicht monoton fallend in δ , welches sich nach Gleichung (3.2) ergibt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Kontrollgrenzen der LR-Karte sehr stark von m abhängig sind (vgl. Tabelle 4.5). Insgesamt schneidet die LR-Karte am schlechtesten ab - die OC-ARL Werte fallen bei kleinem δ sehr langsam gegen 1 ab. Erst bei großen Erwartungswertverschiebungen $\delta \geq 4$ erreicht die LR-Karte ähnliche OC-ARL Werte wie die anderen untersuchten Regelkarten.

Die Ergebnisse der Tabelle A.3 aus dem Anhang, die sich auf eine $IC-ARL_0$ von 370 bezieht, sind zum größten Teil analog zu Tabelle 4.6 interpretierbar und führen zu den gleichen bereits gezogenen Rückschlüssen. Die Hypothese, dass die OC-ARL der ELR-Karte für

ein festes δ noch vom Stichprobenumfang m abhängt, ist insbesondere für $\delta = 0.5$ ersichtlich.

In diesem Abschnitt werden abschließend die OC-ARL Werte der fünf interessierenden Regelkarten bei einer Verschiebung des Erwartungswertvektors in den Dimensionen $p = 3$ bzw. 5 betrachtet, für die in Kapitel 4.1 ebenfalls entsprechende Kontrollgrenzen bestimmt wurden. Der im Folgenden betrachtete Erwartungswertvektor ergibt sich zu $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1 = \frac{\delta}{\sqrt{6}}, 0, 0)' \in \mathbb{R}^3$ bzw. $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1 = \frac{\delta}{\sqrt{6}}, 0, 0, 0, 0)' \in \mathbb{R}^5$ und der Stichprobenumfang wird mit $m = 6$ fest gewählt. Die Abbildung 4.2 zeigt die logarithmisch abgetragenen OC-ARL Werte der fünf Regelkarten für die Verschiebung $\mu_1 \cdot \sqrt{6}$ von $0 \rightarrow 5$. Da sich der Nichtzentralitätsparameter δ für den Stichprobenumfang $m = 6$ aus Gleichung (3.2) für $\boldsymbol{\mu}_{OC}$ zu $\mu_1 \cdot \sqrt{6}$ ergibt, sind die Werte von δ auf der x-Achse in Abbildung 4.2 abgetragen. Die OC-ARL Werte der T^2 -, MCUSUM- und ELR-Karte sind also direkt gegen den Nichtzentralitätsparameter δ abgetragen. Die Abbildung 4.2 zeigt, dass für kleine Erwartungswertverschiebungen $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \leq 2$ die Kontrollkarten mit Gedächtnis (MEWMA-, MCUSUM und ELR-Karte) beiden Kontrollkarten ohne Gedächtnis (T^2 - und LR-Karte) unabhängig von der Dimension p deutlich überlegen sind, d.h. geringere OC-ARL Werte erzielen. Die MCUSUM-Karte schneidet zusammen mit der MEWMA-Karte in diesem Bereich am besten ab, während die ELR-Karte von den Kontrollkarten mit Gedächtnis in diesem Bereich die höchsten OC-ARL Werte aufweist. Die T^2 -Karte erweist sich als vorteilhaft bei großen Erwartungswertverschiebungen von $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \geq 3$ und erzielt somit in diesem Bereich die niedrigsten OC-ARL Werte. Wie in Kapitel 4.1 erwähnt, ist es für die MEWMA-Karte leichter möglich einen „schnellen anfänglichen Alarm auszulösen“ als beispielsweise für die MCUSUM-Karte. Dies spiegelt sich auch in Abbildung 4.2 wider, da die MEWMA-Karte für Erwartungswertverschiebungen $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \geq 2$ deutlich besser abschneidet als die MCUSUM-Karte. Für Verschiebungen des Erwartungswertvektors $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \geq 2$ liegen die OC-ARL Werte der ELR-Karte zwischen denen der MCUSUM- und MEWMA-Karte - für die Dimension $p = 3$ sind die OC-ARL Werte der ELR-Karte für sehr große Verschiebungen $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \geq 4$ sogar noch geringer als die der MEWMA-Karte. Ein Blick auf die OC-ARL Werte der LR-Karte zeigt, dass diese Karte sehr schlecht auf

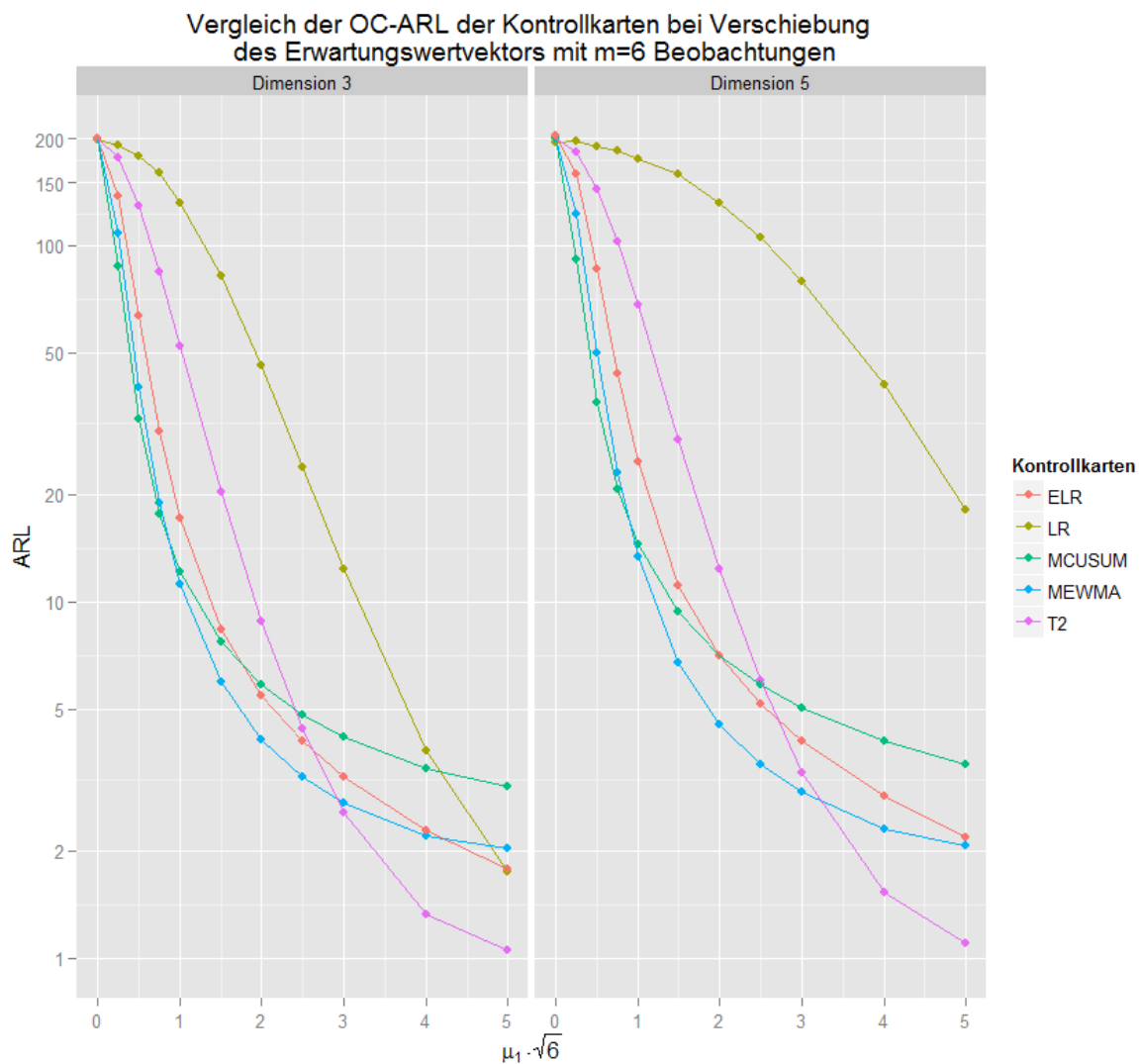


Abbildung (4.2): Diese Abbildung zeigt die simulierten OC-ARL der fünf Regelkarten für eine Verschiebung von $\mu_1 \cdot \sqrt{6}$ von $0 \rightarrow 5$ mit $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1 = \frac{\delta}{\sqrt{6}}, 0, \dots, 0)'$ und Stichprobenumfang $m = 6$ in den Dimensionen $p = 3$ und 5 .

kleine Erwartungswertverschiebungen $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \leq 2$ in den Dimensionen $p = 2$ und 5 reagiert. In der Dimension $p = 3$ schneidet die LR-Karte im Vergleich zu den anderen Regelkarten besser ab als in der Dimension $p = 5$, in welcher die LR-Karte auch noch schlecht auf große Erwartungswertverschiebungen $\mu_1 \cdot \sqrt{6} \geq 3$ reagiert.

Werden die Ergebnisse aus Tabelle 4.6 und Abbildung 4.2 für die LR-Karte zusammengefasst, so gilt: Je näher der Stichprobenumfang m an die Dimension p heranreicht, desto schlechter schneidet die LR-Karte im Vergleich zu den anderen Regelkarten ab.

4.2.2. Verschiebung des Erwartungswertvektors und der Kovarianzmatrix

In diesem Abschnitt werden die OC-ARL Werte von Produktionsprozessen der fünf Regelkarten miteinander verglichen, bei denen sich zum einen der Erwartungswertvektor verschiebt und zum anderen sich auch die Kovarianzmatrix ändert. Im Folgenden wird von einem Prozess unter Kontrolle mit $\boldsymbol{\mu}_{IC} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$ und $\boldsymbol{\Sigma}_{IC} = \mathbf{I}_{p \times p}$ ausgegangen. Die Tabelle 4.7 zeigt simulierte OC-ARL Werte der T^2 -, LR-, MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte zu einer IC-ARL₀ von jeweils 200. Die Dimension der Beobachtungen ist $p = 2$, sodass sich der Erwartungswertvektor zu $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1, \mu_2)' \in \mathbb{R}^2$ und die Kovarianzmatrix zu $\boldsymbol{\Sigma}_{OC} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ergeben. Der jeweils gewählte Stichprobenumfang $m = 1, 3$ und 4 ist für jeden Fall $h = 1, \dots, 8$ in Tabelle 4.7 ebenfalls mit angegeben. Zunächst werden die Fälle $h = 1, 2, 3$ und 4 betrachtet, bei denen $\boldsymbol{\mu}_{OC} = \boldsymbol{\mu}_{IC}$ gilt - es verändert sich somit nur die Kovarianzmatrix. Für die T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte ist die OC-ARL in diesen Fällen unabhängig von m , d.h. die in Tabelle 4.7 angegebenen OC-ARL Werte für unterschiedliche Stichprobengrößen dieser Kontrollkarten spiegeln lediglich die Varianz der Simulationen wieder. Für den ersten Fall $h = 1$, bei dem für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{OC} = \gamma \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{IC}$ mit $\gamma = 0.75$ gilt, ergeben sich bei der T^2 -, MEWMA und MCUSUM-Karte deutlich größere OC-ARL Werte als die gewählte IC-ARL₀ von 200. Da für diese Kontrollkarten OC-ARL > IC-ARL₀ gilt, reagieren diese somit kontraproduktiv auf Verschiebungen der Kovarianzmatrix mit $\gamma < 1$. Die OC-ARL Werte der LR- und der ELR-Karte sind für den Fall $h = 1$ deutlich kleiner als die gewählte IC-ARL₀ von 200. Dabei liegt die OC-ARL der ELR-Karte für $m = 4$ schon unter 45, während die der LR-Karte noch einen Wert von über 175 annimmt.

h	Prozessparameter:						OC-ARL der einzelnen Kontrollkarten:				
	μ_1	μ_2	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}	m	T^2	LR	MEWMA	MCUSUM	ELR
1	0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	1	1177.06		894.68	827.67	117.61
	0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	3	1185.21	190.58	887.46	820.22	57.02
	0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	4	1173.63	175.43	890.16	838.18	43.81
2	0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	1	154.00		170.71	183.75	122.85
	0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	3	158.30	193.02	170.20	180.11	63.61
	0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	4	159.23	176.03	170.83	181.79	50.37
3	0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	1	107.87		121.04	128.88	149.01
	0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	3	107.17	198.84	119.07	126.28	102.08
	0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	4	107.56	188.91	119.26	126.94	86.75
4	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	1	14.41		21.53	28.57	23.23
	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	3	14.39	107.31	21.73	28.74	7.73
	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	4	14.34	47.19	21.40	28.53	5.98
5	0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	1	85.11		39.77	30.66	27.47
	0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	3	61.41	142.16	13.32	12.53	9.87
	0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	4	52.43	89.11	10.05	10.32	7.86
6	0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	1	76.55		46.29	47.30	31.88
	0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	3	50.79	143.60	21.36	22.06	11.86
	0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	4	43.44	91.60	17.44	17.89	9.32
7	1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	1	15.86		8.12	9.69	10.93
	1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	3	6.79	71.37	4.15	5.58	4.52
	1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	4	4.82	23.13	3.56	4.92	3.72
8	1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	1	4.04		3.56	4.89	3.88
	1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	3	1.47	7.11	2.33	3.27	1.94
	1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	4	1.23	2.27	2.17	3.02	1.66

Tabelle (4.7): Diese Tabelle zeigt die simulierten OC-ARL Werte der fünf Kontrollkarten für die Fälle $h = 1, \dots, 8$, die je für einen außer Kontrolle geratenen Prozess stehen, bei dem sich die Kovarianzmatrix verändert hat bzw. sich auch der Erwartungswertvektor verschoben hat. Die IC-ARL₀ aller Kontrollkarten beträgt dabei 200 und die Dimension p der Beobachtungen ist als 2 angenommen.

Im Fall $h = 2$ ändert sich die Kovarianz σ_{12} der Beobachtungen. Alle OC-ARL Werte der fünf Kontrollkarten sind geringer als die gewählte IC-ARL₀ von 200. Die ELR-Karte erzielt für alle m klar die geringsten OC-ARL Werte und ist den anderen vier Kontrollkarten daher überlegen. In den Fällen 3 und 4 verschiebt sich die Kovarianzmatrix analog zu Fall 1 mit $\gamma = 1.25$ bzw. 2. Überraschenderweise schneidet die T^2 -Karte für den Stichprobenumfang $m = 1$ in beiden Fällen am besten ab - für $m = 3$ und 4 erzielt die ELR-Karte die geringsten OC-ARL Werte. In den Fällen $h = 5, 6, 7, 8$ verschieben sich zum einen der Erwartungswertvektor und zum anderen ändert sich die Kovarianzmatrix. Die MEWMA- und MCUSUM-Karte erzielen in diesen Fällen in etwa ähnliche OC-ARL Werte. Die T^2 - und LR-Karte sind bei kleinen Verschiebungen sowohl des Erwartungswertvektors als auch der Kovarianzmatrix den Kontrollkarten mit Gedächtnis klar unterlegen (siehe Fälle $h = 5$ und 6). Bei starken Prozessänderungen sowohl des Erwartungswertvektors als auch der Kovarianzmatrix mit Stichprobenumfängen $m = 3$ und 4 erzielt die T^2 -Karte in den Fällen $h = 7$ und 8 mit die geringsten OC-ARL Werte aller fünf Regelkarten. Die OC-ARL Werte der ELR-Karte sind in den Fällen 7 und 8 ähnlich gering wie die der MEWMA-Karte und MCUSUM-Karte. Die LR-Karte schneidet den Fällen $h = 7$ und 8 insgesamt schlechter ab als die anderen vier Kontrollkarten. Die Tabelle A.4 aus dem Anhang, bei der für eine IC-ARL₀ von 370 die gleichen Testfälle wie in Tabelle 4.7 betrachtet werden, führt zu gleichen Rückschlüssen wie die Tabelle 4.7.

Werden die OC-ARL Werte aus Tabelle 4.7 der fünf Kontrollkarten für alle Fälle $h = 1, \dots, 8$ zusammengefasst, so schneidet die ELR-Karte am besten ab. Insbesondere ist Fall 1 ($\Sigma_{OC} = 0.75 \cdot \Sigma_{IC}$) zu beachten, bei dem für die T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte OC-ARL $>$ IC-ARL₀ gilt. Die LR-Karte ist bis auf Fall 1 allen anderen Kontrollkarten (größtenteils) klar unterlegen - lediglich im Fall 8 für $m = 4$ erzielt die LR-Karte nicht die höchste OC-ARL.

Abschließend werden in diesem Abschnitt die OC-ARL Werte der fünf interessierenden Regelkarten bei einer Verschiebung der Kovarianzmatrix in der Dimensionen $p = 3$ bzw. 5 betrachtet, für die in Kapitel 4.1 ebenfalls entsprechende Kontrollgrenzen bestimmt

wurden. Die im Folgenden betrachtete Kovarianzmatrix hat folgende Struktur:

$$\Sigma_{OC} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Kovarianzmatrix Σ_{OC} ist somit eine Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{p \times p}$ mit einer sich ändernden Varianz σ_1^2 . Die Kovarianzmatrix Σ_{OC} der Dimension 5 wird analog zur Dimension 3 aufgestellt. Die Abbildung 4.3 zeigt die logarithmisch abgetragenen OC-ARL Werte der fünf Regelkarten zu einer IC-ARL₀ von 200, für die Verschiebung σ_1^2 von 0.25 → 5. Für $\sigma_1^2 = 1$ gilt zu beachten, dass es sich um einen Prozess unter Kontrolle handelt bei dem OC-ARL = IC-ARL₀ = 200 gilt. Die in Abbildung 4.3 abgetragenen OC-ARL Werte ($\sigma_1^2 \neq 1$) der ELR-Karte sind unabhängig von der Dimension $p = 3$ bzw. 5 die geringsten. Die LR-Karte reagiert auf kleine Vergrößerungen von σ_1^2 ($1 < \sigma_1^2 \leq 2$) am schlechtesten. Für größere Verschiebungen von σ_1^2 konvergieren die OC-ARL Werte der LR-Karte in der Dimension $p = 3$ deutlich schneller gegen 1 als in der Dimension $p = 5$. In der Dimension $p = 3$ erzielt die LR-Karte sogar für $\sigma_1^2 \geq 4$ nach der ELR-Karte die zweitgeringsten OC-ARL Werte. Die T^2 -Karte reagiert insgesamt betrachtet nach der ELR-Karte am besten auf Verschiebungen von $\sigma_1^2 > 1$. Die OC-ARL Werte der MEWMA-Karte liegen für $\sigma_1^2 > 1$ ersichtlich unterhalb derjenigen der MCUSUM-Karte und oberhalb derjenigen der T^2 -Karte. Das deutlich bessere Abschneiden der MEWMA-Karte gegenüber der MCUSUM-Karte für $\sigma_1^2 > 1$ ist darauf zurückzuführen, dass die MEWMA-Karte öfter bei anfänglich größeren Stichprobenmittelwerten einen „schnellen anfänglichen Alarm auslöst“. Werden die OC-ARL Werte für $\sigma_1^2 < 1$ miteinander verglichen, so gilt für die T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte OC-ARL > IC-ARL₀. Für $\sigma_1^2 = 0.25$ betragen die OC-ARL Werte dieser drei Regelkarten in der Dimension $p = 3$ jeweils über 500, wohingegen die LR-Karte und ELR-Karte OC-ARL Werte von deutlich unter 200 erzielen (66 bzw. 7). In der Dimension $p = 5$ ist ein ähnlich starker Anstieg der OC-ARL Werte der T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte zu erkennen. In der Praxis ist es bei Anwendung dieser drei Regelkarten somit empfehlenswert, die Kovarianzmatrix fortlaufend mit einer separaten Qualitätskontrollkarte zusätzlich zum Erwartungswertvektor zu überwa-

chen. In Weihs und Jessenberger (1999, Seite 327) wird in einem solchen Fall von einer zweiseitigen Qualitätskontrollkarte gesprochen. Es ist darauf hinzuweisen, dass die in dieser Masterarbeit angegebenen OC-ARL Werte aus Kapitel 4.2.1 und 4.2.2 bei einer zweiseitigen Überwachung nicht mehr gültig sind. Darüber hinaus müssten die Kontrollgrenzen der entsprechenden Regelkarten bei Verwendung einer zweiten Kontrollkarte für die Kovarianzmatrix möglicherweise neu adjustiert werden.

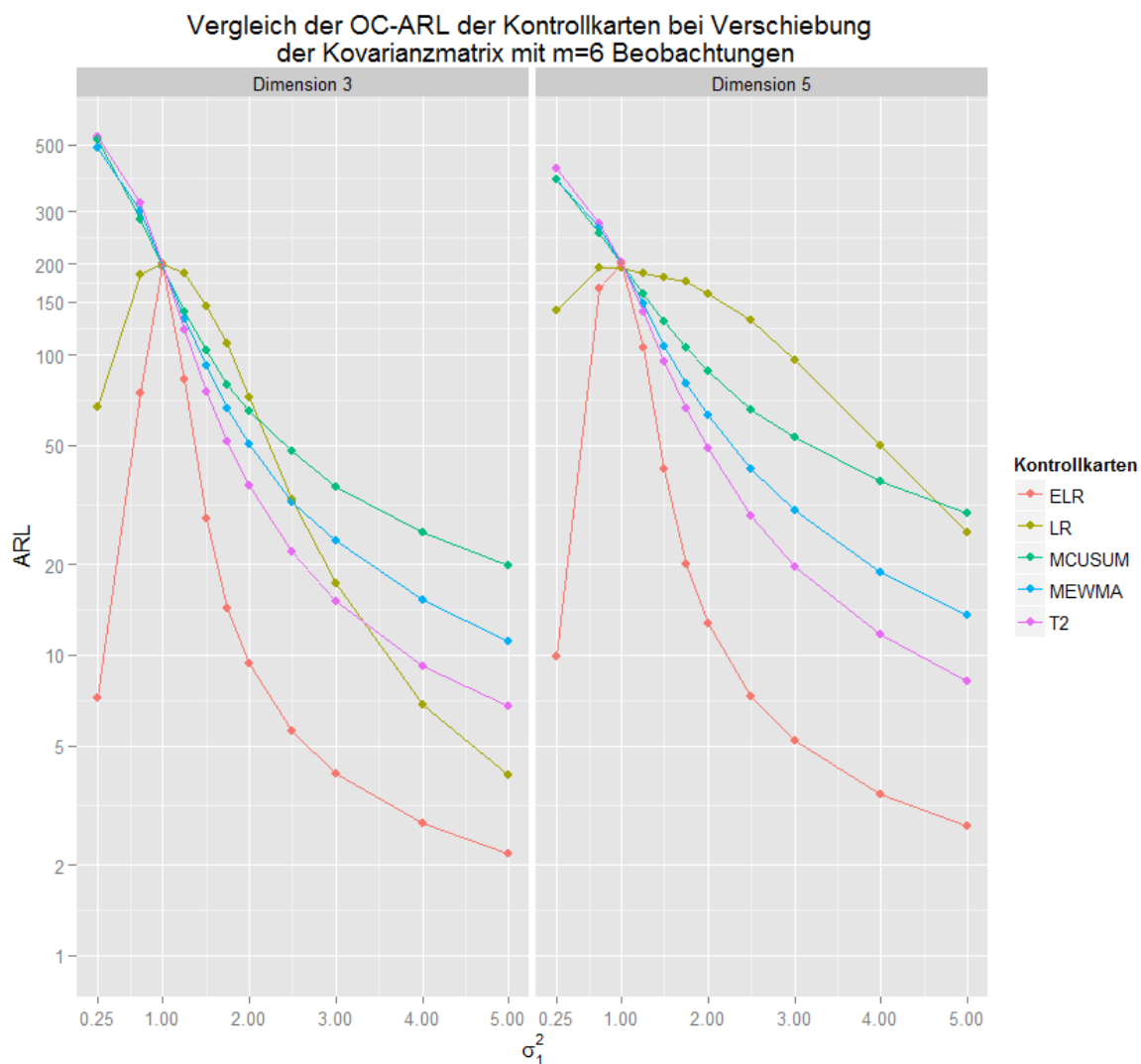


Abbildung (4.3): Diese Abbildung zeigt die simulierten OC-ARL der fünf Regelkarten für eine Verschiebung von σ_1^2 in der Kovarianzmatrix von $0.25 \rightarrow 5$ mit festem Stichprobenumfang von $m = 6$ in den Dimensionen $p = 3$ und 5 .

5. Zusammenfassung

Thema dieser Masterarbeit war ein Vergleich multivariater Qualitätskontrollkarten. Zunächst wurde in Kapitel 2 eine Qualitätskontrollkarte, die Lauflänge (RL), die mittlere Lauflänge (ARL) und die Operationscharakteristik-Funktion (OC-Funktion) definiert. In Kapitel 3 wurden die fünf ausgewählten multivariaten Kontrollkarten (T^2 -, LR-, MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte) für den späteren Vergleich vorgestellt. Zu Beginn des vierten Kapitels wurden ausgewählte Kontrollgrenzen der LR-, MEWMA-, MCUSUM- und ELR-Karte mit Hilfe einer Simulationsstudie bestimmt. Darüber hinaus wurden die Dichten der Lauflänge für eine IC- ARL_0 von 200 der einzelnen Kontrollkarten bei einem Produktionsprozess unter Kontrolle in Abbildung 4.1 grafisch dargestellt. Es konnte gezeigt werden, dass die MCUSUM- und ELR-Karte, verglichen mit den anderen untersuchten Kontrollkarten, eher selten unter den ersten (sechs) Stichproben einen Alarm auslösen. Abschließend wurde in dem Abschnitt 4.1 gezeigt, dass die durch die χ^2 -Verteilung gegebenen approximativen Kontrollgrenzen der LR-Karte erst für $m \gg 50$ gültig sind.

In den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 wurden die fünf Kontrollkarten anhand der OC-ARL bei außer Kontrolle geratenen Produktionsprozessen verglichen. Bei kleinen Erwartungswertverschiebungen $\delta \leq 2.6$, wobei δ den Nichtzentralitätsparameter der χ^2 -Verteilung bezeichnet, erzielten die MEWMA- und MCUSUM-Karte in Tabelle 4.6 für die Dimension $p = 2$ die geringsten OC-ARL Werte. Für $\delta \geq 3$ schnitt die T^2 -Karte am besten ab. Die LR-Karte war nur für zu überwachende Produktionsprozesse mit Stichprobenumfängen $m > p$ anwendbar und erzielte in vielen Fällen die mit Abstand größten OC-ARL Werte - wohingegen die ELR-Karte insgesamt recht gut, aber nie am besten abschnitt. Weitere

Simulationen zur ELR-Karte und LR-Karte zeigten, dass die OC-ARL Werte dieser beiden Kontrollkarten nicht in der Form wie bei der T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte abhängig von δ sind. Die Abbildung 4.2 zeigt die OC-ARL Werte bei einer Verschiebung des Erwartungswertvektors der untersuchten Kontrollkarten für die Dimensionen $p = 3$ und 5. Das Abschneiden der Kontrollkarten war hier analog zur Dimension $p = 2$.

In Abschnitt 4.2.2 veränderte sich neben dem Erwartungswertvektor auch die Kovarianzmatrix bei einem außer Kontrolle geratenen Produktionsprozess. Die Tabelle 4.7 und die Abbildung 4.3 zeigen für sinkende Varianzen in der Kovarianzmatrix steigende OC-ARL Werte (im Vergleich zur $IC-ARL_0$) bei der T^2 -, MEWMA- und MCUSUM-Karte. Folglich sollte bei der Anwendung einer dieser drei Kontrollkarten die Kovarianzmatrix mit einer separaten Qualitätskontrollkarte überwacht werden. Die ELR-Karte schneidet im Abschnitt 4.2.2 in (fast) allen Fällen, bei denen nur die Kovarianzmatrix außer Kontrolle gerät, am besten ab - bei Verschiebungen sowohl des Erwartungswertvektors als auch der Kovarianzmatrix erzielt die ELR-Karte verglichen mit den anderen Regelkarten ebenfalls niedrige OC-ARL Werte. Insbesondere gilt bei der LR- und ELR-Karte immer $OC-ARL < IC-ARL_0$. Werden die Fälle, bei denen der Produktionsprozess außer Kontrolle gerät, zusammengefasst, so schneidet die ELR-Karte am besten ab. Die LR-Karte erweist sich - sofern von dem Fall mit sinkenden Varianzen in der Kovarianzmatrix abgesehen wird - als weniger geeignet. Die OC-ARL Werte der LR-Karte konvergieren verglichen mit den anderen Kontrollkarten für die in dieser Arbeit ausgewählten Fälle eher langsam gegen 1. Soll ein Produktionsprozess speziell auf kleine Erwartungswertverschiebungen überwacht werden, so ist die MCUSUM- und MEWMA-Karte zu empfehlen, bei großen Erwartungswertverschiebungen hingegen die T^2 -Karte.

6. Diskussion

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass in dieser Masterarbeit ein Fehler in den Simulationen zur ELR-Karte bei Zhang et al. (2010) aufgedeckt wurde. Die Tabelle 6.1 ist analog zur Tabelle 2 nach Zhang et al. (2010). Sie enthält zwei Spalten mit OC-ARL Werten - eine Spalte mit den simulierten OC-ARL Werten aus Tabelle 2 nach Zhang et al. (2010) und eine mit den simulierten OC-ARL Werten, die sich im Rahmen dieser Masterarbeit ergeben. Die Prozessparameter bei einem Prozess unter Kontrolle sind dabei wie folgt angenommen: $\boldsymbol{\mu}_{IC} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$ und $\boldsymbol{\Sigma}_{IC} = \mathbf{I}_{p \times p}$. Verschiebt sich nur der Erwartungswertvektor, so stimmen im Rahmen der Simulationsgenauigkeit die beiden Spalten mit den OC-ARL Werten in Tabelle 6.1 überein. Mit gelb sind die Fälle in Tabelle 6.1 markiert, bei denen Kovarianzmatrix außer Kontrolle gerät. Es sind in allen diesen Fällen (deutliche) Unterschiede bei den simulierten OC-ARL Werten ersichtlich. Besonders auffällig dabei sind die sechs in Tabelle 6.1 rot hinterlegten OC-ARL Werte von 1 aus Tabelle 2 nach Zhang et al. (2010). Diese Werte bedeuten, dass die ELR-Karte bei der jeweiligen Veränderung der Kovarianzmatrix - insbesondere schon bei einem Stichprobenumfang von $m = 2$ Beobachtungen - in jedem Fall anhand einer entnommenen Stichprobe sofort einen Alarm auslöst. Der Glättungsparameter der ELR-Karte wurde in allen Fällen mit $r = 0.2$ gewählt.

Bei der Berechnung der ersten Teststatistik ELR_1 nach Gleichung (3.17) setzt sich v_i somit aus 0.2-mal des ML-Schätzers für die Kovarianzmatrix anhand der ersten zwei Beobachtungen und 0.8-mal der Einheitsmatrix zusammen. Eine kleine (hier nicht aufgeführte) Simulationsstudie hat gezeigt, dass es für die berechnete Teststatistik ELR_1 nahezu

Prozessparameter:						Anzahl	Simulierte	OC-ARL
μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	σ_{12}	m	Simulationen	OC-ARL	nach Zhang et al. (2010)
0.50	0.50	1.00	1.00	0.00	2	20000	15.83	15.90
0.50	0.50	1.00	1.00	0.00	5	20000	7.10	7.10
1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	2	20000	4.89	4.90
1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	5	20000	2.74	2.70
1.50	1.50	1.00	1.00	0.00	2	20000	2.75	2.70
1.50	1.50	1.00	1.00	0.00	5	20000	1.67	1.60
0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	2	20000	33.01	26.80
0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	5	20000	12.82	4.80
0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	2	20000	9.07	1.00
0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	5	20000	5.11	1.00
0.00	0.00	1.25	1.25	0.00	2	20000	36.17	34.30
0.00	0.00	1.25	1.25	0.00	5	20000	13.62	8.70
0.00	0.00	1.75	1.75	0.00	2	20000	4.78	1.00
0.00	0.00	1.75	1.75	0.00	5	20000	2.49	1.00
0.00	0.00	1.25	0.75	0.00	2	20000	36.28	31.10
0.00	0.00	1.25	0.75	0.00	5	20000	13.40	6.80
0.00	0.00	1.75	0.25	0.00	2	20000	5.75	1.00
0.00	0.00	1.75	0.25	0.00	5	20000	3.17	1.00
0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	2	20000	134.19	132.00
0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	5	20000	58.08	53.20
0.00	0.00	1.00	1.00	0.50	2	20000	32.93	27.00
0.00	0.00	1.00	1.00	0.50	5	20000	12.29	5.00

Tabelle (6.1): Diese Tabelle zeigt nachsimulierte OC-ARL Werte aus Tabelle 2 nach Zhang et al. (2010).

unmöglich ist, die entsprechende gewählte Kontrollgrenze h_5 zu übersteigen - ein OC-ARL Wert von 1 ist somit auszuschließen. Die im Rahmen dieser Masterarbeit simulierten OC-ARL Werte scheinen besonders in diesen Fällen deutlich realistischer.

In Kapitel 4.2.1 wurde gezeigt, dass die MEWMA- und die MCUSUM-Karte bei kleinen Erwartungswertverschiebungen ($\delta \leq 2.6$) Vorteile gegenüber der T^2 -Karte haben, während die T^2 -Karte Vorteile gegenüber der MEWMA- und MCUSUM-Karte bei großen Erwartungswertverschiebungen ($\delta \geq 3$) hat. Es ist daher naheliegend z.B. die MEWMA-Karte mit der T^2 -Karte parallel bei einem fortlaufenden Prozess anzuwenden. Es würde sich ein schneller Alarm sowohl bei großen als auch bei kleinen Erwartungswertverschiebungen ergeben. Die Kontrollgrenzen beider Kontrollkarten müssten dann allerdings zu einer vorgegebenen IC-ARL₀ neu angepasst/simuliert werden. In den Abbildungen 4.2 und 4.3 scheint es so, als ob die MEWMA-Karte ersichtlich besser als die MCUSUM-Karte auf große Erwartungswertverschiebungen ($\delta \geq 3$) bzw. große Änderungen in der Kovarianzmatrix reagieren würde. Dies ist allerdings nur darauf zurückzuführen, dass die MEWMA-Karte aufgrund der Verwendung der wahren Kovarianzmatrix zu jedem Zeitpunkt i (vgl. Gleichung (3.10)) schneller einen anfänglichen Alarm auslöst. Bei der Darstellung der Lauflänge unter Kontrolle in Abbildung 4.1 wird diese Eigenschaft der MEWMA-Karte ebenfalls besonders deutlich. In Crosier (1988) wurde die Idee, das Auslösen eines schnellen anfänglichen Alarms, auch auf die MCUSUM-Karte übertragen. Jedoch ist in Abschnitt 4.2.1 deutlich geworden, dass die MEWMA-Karte zwar bei großen Erwartungswertverschiebungen ($\delta \geq 3$) (leicht) besser als die MCUSUM-Karte abschneidet, aber die gewöhnliche MCUSUM-Karte Vorteile bei kleinen Erwartungswertverschiebungen ($\delta \leq 0.71$) gegenüber der MEWMA-Karte hat. Eine weitere Überlegung wäre, die Idee des schnellen anfänglichen Alarms auf die ELR-Karte zu übertragen. Dies hätte zur Folge, dass die ELR-Karte schlechter auf kleine Erwartungswertverschiebungen und Änderungen in der Kovarianzmatrix reagieren würde, aber besser auf große Prozessänderungen oder -verschiebungen. Da aber von den Kontrollkarten mit Gedächtnis die ELR-Karte bereits am schlechtesten auf kleine Erwartungswertverschiebungen reagiert, ist von der Idee abzuraten.

Die LR-Karte kann bei Produktionsprozessen, bei denen der Stichprobenumfang m kleiner gleich der Dimension p der Merkmale ist, nicht angewendet werden. Bei keinem in dieser Masterarbeit gewählten Beispielen gilt $m \gg p$, sondern häufig wurde $m = p + 1$ oder $m = p + 2$ gewählt. Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen, dass je größer m im Vergleich zu p ist, desto besser reagiert die LR-Karte auf Prozessänderungen - bei konstantem $m = 6$ schneidet die LR-Karte im Vergleich zu den anderen vier Kontrollkarten in der Dimension $p = 3$ ersichtlich besser ab als in der Dimension 5. In der Praxis sind jedoch selten Produktionsprozesse mit sehr großen Stichprobenumfängen zu jedem Zeitpunkt i von Interesse, sodass die LR-Karte eher unbrauchbar ist bzw. erst gar nicht angewendet werden kann. In Maboudou-Tchao und Agboto (2013) werden Verfahren zur Schätzung der Kovarianzmatrix für Situationen mit $m < p$ diskutiert. Für die Qualitätskontrolle und -sicherung ist eine effiziente Schätzung der Kovarianzmatrix mit kleinen Stichprobenumfängen ein interessantes Thema, zumal es in der Praxis häufig Situationen mit $m < p$ gibt.

A. Anhang

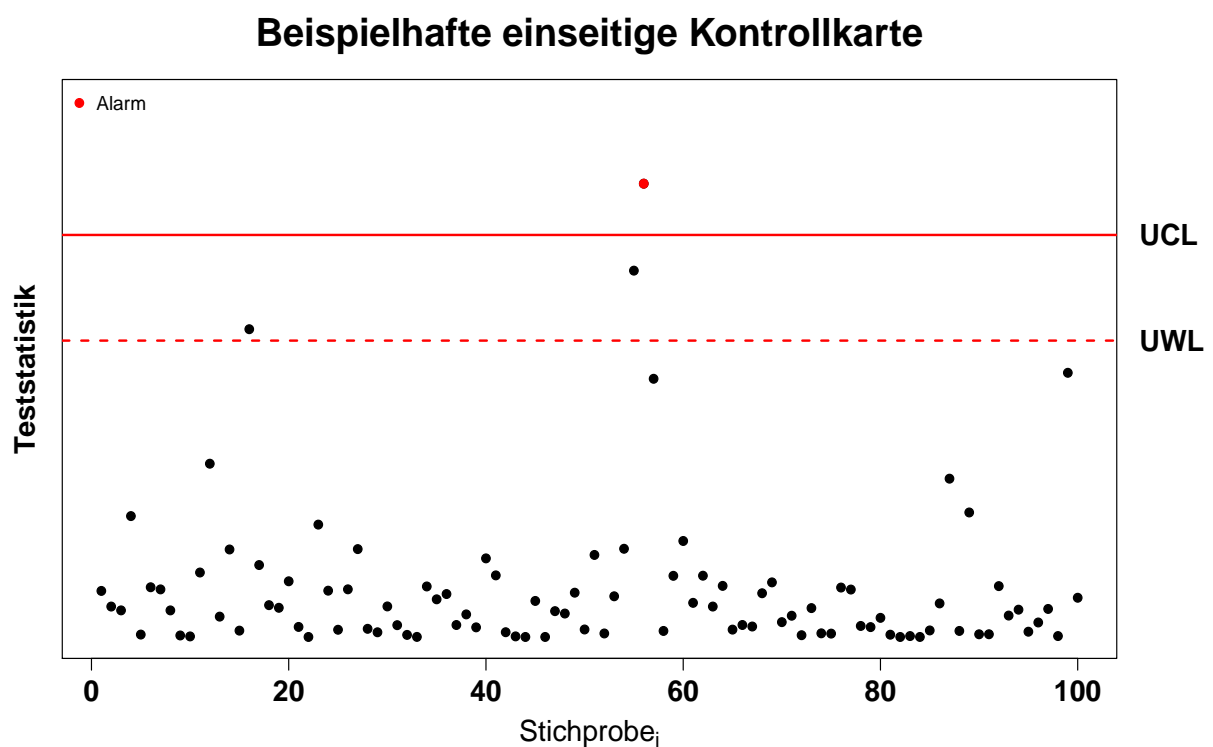


Abbildung (A.1): Diese Abbildung zeigt beispielhaft eine einseitige Kontrollkarte, die einen Alarm bei der Stichprobe 56 auslösen würde, da der Wert der abgetragenen Teststatistik die obere Kontrollgrenze zu diesem Zeitpunkt überschreitet.

n		$\lambda = 0.1$					$\lambda = 0.2$				
		ICARL					ICARL				
		185	200	370	500	1000	185	200	370	500	1000
$p = 2$	1	0.742	0.752	0.836	0.877	0.968	1.695	1.718	1.872	1.949	2.115
	2	0.745	0.758	0.847	0.888	0.983	1.711	1.728	1.896	1.977	2.156
	5	0.751	0.758	0.855	0.896	0.991	1.723	1.745	1.915	1.998	2.186
	8	0.751	0.765	0.855	0.898	0.995	1.725	1.746	1.918	2.005	2.191
	10	0.751	0.765	0.855	0.898	0.995	1.726	1.746	1.922	2.008	2.196
	15	0.751	0.765	0.855	0.898	0.995	1.726	1.747	1.923	2.010	2.201
$p = 3$	1	1.080	1.096	1.199	1.246	1.352	2.455	2.478	2.669	2.752	2.950
	2	1.090	1.105	1.208	1.256	1.365	2.464	2.490	2.685	2.781	2.985
	5	1.094	1.110	1.214	1.263	1.375	2.468	2.495	2.698	2.788	3.008
	8	1.095	1.110	1.214	1.264	1.377	2.470	2.496	2.701	2.797	3.014
	10	1.095	1.111	1.215	1.266	1.378	2.470	2.498	2.702	2.798	3.014
	15	1.096	1.111	1.217	1.266	1.378	2.471	2.498	2.703	2.799	3.015
$p = 5$	1	1.923	1.941	2.071	2.133	2.264	4.311	4.341	4.579	4.582	4.934
	2	1.926	1.945	2.077	2.143	2.276	4.308	4.340	4.588	4.713	4.974
	5	1.927	1.945	2.082	2.144	2.280	4.285	4.321	4.575	4.692	4.965
	8	1.929	1.945	2.084	2.144	2.281	4.282	4.316	4.571	4.687	4.959
	10	1.929	1.945	2.084	2.144	2.285	4.280	4.316	4.571	4.688	4.959
	15	1.929	1.945	2.084	2.145	2.285	4.280	4.316	4.571	4.688	4.959

Abbildung (A.2): Diese Abbildung zeigt eine Tabelle mit entsprechenden Kontrollgrenzen der ELR-Karte nach Zhang et al. (2010). Der Wert n in der Tabelle steht für die Stichprobengröße zu jedem Zeitpunkt i und λ ist der Glättungsparameter.

p	m	ARL_{sim}	h_2	m	ARL_{sim}	h_2	m	ARL_{sim}	h_2	IC- ARL_0
2	3	6.81	16.75	4	17.13	16.75	5	29.23	16.75	200
2	10	80.38	16.75	20	129.20	16.75	50	167.64	16.75	
2	3	8.57	18.21	4	24.21	18.21	5	43.61	18.21	370
2	10	132.71	18.21	20	226.95	18.21	50	303.81	18.21	
3	4	4.17	23.59	5	9.63	23.59	6	16.46	23.59	200
3	10	46.92	23.59	20	100.62	23.59	50	150.37	23.59	
3	4	5.03	25.26	5	12.94	25.26	6	23.36	25.26	370
3	10	75.07	25.26	20	172.91	25.26	50	274.04	25.26	
5	6	2.17	40.00	7	4.09	40.00	8	6.62	40.00	200
5	10	13.48	40.00	20	52.88	40.00	50	119.77	40.00	
5	6	2.46	42.08	7	5.00	42.08	8	8.66	42.08	370
5	10	19.15	42.08	20	86.44	42.08	50	212.04	42.08	

Tabelle (A.1): Diese Tabelle zeigt in Abhängigkeit der Stichprobengröße m und der Dimensionen $p = 2, 3, 5$ die simulierte ARL_{sim} zu den approximativen Kontrollgrenzen h_2 der LR-Karte aus Tabelle 3.2. Dabei wurden die Kontrollgrenzen passend zu einer theoretischen IC- ARL_0 von 200 bzw. 370 gewählt.

δ	μ_1	μ_2	m	OC-ARL
0.5	0.50	0.00	1	45.78
0.5	0.25	0.43	1	45.80
0.5	0.10	0.49	1	44.79
1	1.00	0.00	1	13.29
1	0.50	0.87	1	13.31
1	0.25	0.97	1	13.52
2	2.00	0.00	1	4.48
2	1.00	1.73	1	4.53
2	0.50	1.94	1	4.49

Tabelle (A.2): Diese Tabelle zeigt die simulierten OC-ARL Werte der ELR-Karte mit unterschiedlich gewähltem $\boldsymbol{\mu}_{OC} = (\mu_1, \mu_2)'$ aber festem Nichtzentralitätsparameter $\delta = 0.5, 1$ und 2 . Der Stichprobenumfang wurde dabei konstant mit $m = 1$ angenommen.

Prozessparameter:				OC-ARL der einzelnen Kontrollkarten:					
δ	μ_1	μ_2	m	T_{sim}^2	$T_{theor.}^2$	LR	MEWMA	MCUSUM	ELR
0.25	0.00	0.25	1	314.01	310.80		156.01	124.78	183.24
0.43	0.00	0.25	3	234.52	230.39	348.04	64.05	48.37	91.46
0.50	0.00	0.25	4	203.38	202.04	327.73	48.35	37.56	69.41
0.35	0.25	0.25	1	266.28	265.73		93.50	71.04	118.87
0.61	0.25	0.25	3	159.24	159.63	335.94	31.60	26.20	45.38
0.71	0.25	0.25	4	128.60	129.68	293.12	23.31	20.59	33.27
0.50	0.00	0.50	1	200.19	202.04		48.30	37.69	62.66
0.87	0.00	0.50	3	90.55	90.82	310.96	15.53	14.97	21.26
1.00	0.00	0.50	4	67.06	67.27	230.54	11.77	12.19	15.91
1.00	0.00	1.00	1	66.12	67.27		11.88	12.25	15.41
1.73	0.00	1.00	3	14.88	14.98	174.07	4.99	6.44	6.13
2.00	0.00	1.00	4	9.36	9.40	66.70	4.17	5.59	4.93
1.50	0.00	1.50	1	23.20	23.32		6.12	7.46	7.65
2.60	0.00	1.50	3	3.98	3.98	71.59	3.11	4.46	3.41
3.00	0.00	1.50	4	2.56	2.57	14.78	2.72	3.96	2.88
2.00	0.00	2.00	1	9.52	9.40		4.13	5.60	4.85
3.46	0.00	2.00	3	1.76	1.76	23.38	2.43	3.58	2.33
4.00	0.00	2.00	4	1.31	1.32	4.00	2.22	3.25	2.00
3.00	0.00	3.00	1	2.57	2.57		2.73	3.99	2.59
5.20	0.00	3.00	3	1.03	1.03	2.92	2.02	2.93	1.37
6.00	0.00	3.00	4	1.00	1.00	1.15	2.00	2.74	1.17

Tabelle (A.3): Diese Tabelle zeigt die simulierten OC-ARL Werte der fünf Kontrollkarten für verschiedene außer Kontrolle geratene Prozesse durch die Verschiebung des Erwartungswertvektors. Die IC-ARL₀ aller Kontrollkarten beträgt dabei 370 und die Dimension p der Beobachtungen ist als 2 angenommen.

Prozessparameter:						OC-ARL der einzelnen Kontrollkarten:				
μ_1	μ_2	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}	m	T^2	LR	MEWMA	MCUSUM	ELR
0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	1	2618.61		2068.91	1927.12	219.07
0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	3	2695.51	355.87	2027.95	1895.97	88.41
0.00	0.00	0.75	0.75	0.00	4	2663.42	327.82	2059.37	1925.51	63.92
0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	1	271.12		293.64	322.36	203.99
0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	3	274.99	353.34	296.94	321.43	95.23
0.00	0.00	1.00	1.00	0.25	4	276.91	328.08	295.86	320.48	72.55
0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	1	181.71		205.03	219.33	250.67
0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	3	182.97	370.48	202.53	216.97	159.09
0.00	0.00	1.25	1.00	0.00	4	184.37	348.53	205.25	217.31	131.39
0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	1	19.42		29.34	39.62	29.14
0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	3	19.50	189.26	29.59	40.12	8.77
0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	4	19.39	78.25	29.30	40.55	6.65
0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	1	135.28		60.46	37.88	36.25
0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	3	96.82	257.65	16.82	14.30	11.27
0.50	0.00	0.50	1.50	0.00	4	85.22	162.45	12.12	11.66	8.76
0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	1	117.47		63.18	60.57	40.92
0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	3	75.30	261.48	26.45	25.93	13.67
0.25	0.25	1.00	1.00	0.50	4	63.88	160.55	20.99	20.63	10.50
1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	1	22.42		9.54	11.00	12.61
1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	3	9.14	130.31	4.57	6.16	4.91
1.00	0.00	1.00	2.00	0.00	4	6.27	37.84	3.87	5.39	4.00
1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	1	4.92		3.83	5.33	4.17
1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	3	1.59	10.32	2.40	3.48	2.04
1.50	1.50	1.50	1.50	0.25	4	1.30	2.73	2.22	3.19	1.74

Tabelle (A.4): Diese Tabelle zeigt die simulierten OC-ARL Werte der fünf Kontrollkarten für verschiedene außer Kontrolle geratene Prozesse, bei denen sich die Kovarianzmatrix verändert hat bzw. sich auch der Erwartungswertvektor verschoben hat. Die IC-ARL₀ aller Kontrollkarten beträgt dabei 370 und die Dimension p der Beobachtungen ist als 2 angenommen.

Literaturverzeichnis

- Bilodeau, M. und D. Brenner (1999). *Theory of Multivariate Statistics*. Springer.
- Chow, Y. S. und H. Teicher (1978). *Probability Theory*. Springer.
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics* 30, 191 – 303.
- Genz, A., F. Bretz, T. Miwa, X. Mi, F. Leisch, F. Scheipl, und T. Hothorn (2012). *mvtnorm: Multivariate Normal and t Distributions*. R package version 0.9-9992.
- Hartung, J. (2009). *Statistik* (15. Auflage). Oldenbourg.
- Hotelling, H. (1947). *Multivariate Quality Control - Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights*. in *Techniques of Statistical Analysis*, eds: Eisenhart, C., M. W. Hastay, und W. A. Wallis. New York: McGraw-Hill, 111 - 184.
- Lowry, C. A., W. H. Woodall, C. W. Champ, und S. E. Rigdon (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34, 46–53.
- Lucas, J. M. und M. S. Saccucci (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements. *Technometrics* 32, 1–12.
- Maboudou-Tchao, E. M. und V. Agboto (2013). Monitoring the covariance matrix with fewer observations than variables. *Computational Statistics and Data Analysis* 64, 99–112.

-
- Mood, A., F. Graybill, und D. Boes (1974). *Introduction to the theory of statistics* (3. Auflage). McGraw-Hill series in probability and statistics. Auckland: McGraw-Hill.
- Mukhopadhyay, P. (2009). *Multivariate Statistical Analysis*. World Scientific.
- Pignatiello, J. J. (1990). Comparisons of multivariate cusum charts. *Journal of Quality Technology* 22, 173–186.
- R Core Team (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org/>.
- Rinne, H. und H. J. Mittag (1995). *Statistische Methoden zur Qualitätssicherung*. Carl Hanser Verlag.
- Schervish, M. J. (1995). *Theory of Statistics*. Springer.
- Weihs, C. und J. Jessenberger (1999). *Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und -optimierung in der Industrie*. Wiley-VCH.
- Wickham, H. (2009). *ggplot2: elegant graphics for data analysis*. Springer New York.
- Zhang, J., Z. Li, und Z. Wang (2010). A multivariate control chart for simultaneously monitoring process mean and variability. *Computational Statistics and Data Analysis* 54, 2244–2252.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht habe.

Dortmund, den

Unterschrift

Einverständniserklärung

Ich erkläre mich hiermit einverstanden, dass meine Masterarbeit nach §6 (1) des URG der Öffentlichkeit durch die Übernahme in die Bereichsbibliotheken zugänglich gemacht wird. Damit können Leser der Bibliothek die Arbeit einsehen und zu persönlichen wissenschaftlichen Zwecken Kopien aus dieser Arbeit anfertigen. Weitere Urheberrechte werden nicht berührt.

Dortmund, den

Unterschrift