Analyse und Vergleich des Risswachstums von zwei Stahlproben mittels stochastischer Differentialgleichungen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science

an der Fakultät Statistik

vorgelegt von

Stefan H. Meinke

am 24. Dezember 2013

Betreuende Gutachterin: Prof. Dr. Christine Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Rahmen von Teilprojekt D6 des SFB/Transregio 30 wird das Ermüdungsverhalten von gradierten Materialien analysiert. Hierbei wird zwei Stahlproben bei unterschiedlichen Belastungsniveaus mittels einer servohydraulischen Prüfmaschine zyklisch Druck zugefügt und zu gewissen Zeitpunkten ein Graustufenbild von der Oberfläche des Materials erstellt. Mittels dem von Keppler et al. (2011) entwickelten R-Paket crackrec ist es anschließend möglich, anhand der Farbtiefe der Aufnahmen, Koordinaten zu entdecken, die als Risse angesehen werden können. Somit liegen für beide Stahlproben zu den betrachteten Zeitpunkten Informationen über Länge und Position von gefundenen Rissen vor.

In dieser Ausarbeitung wird, basierend auf den vorliegenden Daten, ein Algorithmus zur Zurückverfolgung von Rissen entwickelt. Das Ziel ist hierbei, den Schädigungsprozess beider Stahlproben über Risswachstumskurven darzustellen. Anschließend werden stochastische Differentialgleichungen verwendet, um spezielle Risswachstumskurven durch einen Vasicek-Prozess zu beschreiben. Hierbei werden sowohl ein exaktes, als auch ein approximatives Verfahren vorgestellt. Abschließend werden die geschätzten Parameter der stochastischen Differentialgleichungen mittels statistischer Tests auf Signifikanz untersucht. Dabei wird untersucht, ob Unterschiede innerhalb sowie zwischen den beiden Stahlproben vorliegen.

In Kapitel 2 werden die Daten vorgestellt. Hierbei wird in Abschnitt 2.1 auf den Aufbau und die Durchführung des Experiments zur Erzeugung der Bilder anhand der Stahlproben eingegangen. Eine anschließende Beurteilung der Qualität der Bildaufnahmen ist Bestandteil des Abschnitts 2.2. Daraufhin wird in Kapitel 2.3 beschrieben, wie mittels des R-Pakets crackrec Rissdaten über ein Graustufenbild erzeugt werden können. Die Problemstellung wird dann in Abschnitt 2.4 formuliert. In Kapitel 3 werden die statistischen Methoden vorgestellt. Hierzu wird zunächst in Abschnitt 3.1 eine Einführung zu stochastischen Differentialgleichungen gegeben.

Anschließend folgt in Abschnitt 3.2 die Vorstellung der zur Parameterschätzung verwendeten Methoden, mittels derer stochastische Prozesse als Lösung von stochastischen Differentialgleichungen erstellt werden können. Kapitel 3.3 stellt daraufhin nichtlineare Optimierungsverfahren und Verfahren zur Varianzreduktion vor. In Kapitel 4 werden die zugrundeliegenden Daten ausgewertet. Dazu wird in Abschnitt 4.1 zunächst eine deskriptive Analyse der Risslängen durchgeführt. Anschließend wird in Kapitel 4.2 ein statistisches Modell erstellt, um im Anschluss einen Algorithmus zur Erstellung von Risswachstumskurven zu entwickeln. Zudem wird eine Fehleranalyse anhand der erstellten Wachstumskurven durchgeführt. Danach werden in Kapitel 4.3 stochastische Differentialgleichungen an die Risswachstumskurven angepasst und deren Anpassungsgüte beurteilt. In Abschnitt 4.4 werden statististische Tests durchgeführt, um anhand der geschätzten Parameter signifikante Unterschiede innerhalb und zwischen beiden Stahlproben zu finden. Abschließend werden die zentralen Ergebnisse in Kapitel 5 zusammengefasst.

2 Vorstellung der Daten

Die Ausgangsdaten wurden im Rahmen des Teilprojekts D6 des SFB/Transregio 30 *Prozessintegrierte Herstellung funktional gradierter Strukturen auf der Grundlage thermo-mechanisch gekoppelter Phänomene* gewonnen und dienen jetzt der Ereugung von Risswachstumsdaten, die im SFB 823 weiter analysiert werden sollen.

2.1 Versuchsaufbau und Durchführung

Die Grundlage der Analyse bilden laut Müller et al. (2011) zwei identisch produzierte Stahlproben mit der deutschen Kennzeichnung $51CrV4$ und besitzen eine Druckfestigkeit von 520 MPa (Mega Pascal) bzw. 244 HV (Hardness of Vicker). Eine schematische Darstellung der Untersuchungsobjekte ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Bessel und Brückner-Foit (2008), Müller et al. (2011) und Gunkel et al. (2012) beschreiben die Stahlprobe als einen Kreiszylinder mit einer Länge von 115 mm. Der Durchmesser am äußeren Rand beträgt 12 mm und fällt symmetrisch eingekerbt auf einen Durchmesser von 7.6 mm bzw. 7 mm bei einem Abstand von 9.5 mm bzw. 5 mm vom Mittelpunkt der Längsseite des Metallstücks entfernt, zusammen.
Beide Stahlproben wurden laut einer Beschreibung von Bessel und Brückner-Foit (2008) durch ein Zug-Druck-Experiment bei gleichem Druck mehrmals einer Belastung ausgesetzt. Dies geschah mittels einer servohydraulischen Prüfmaschine. Hierbei wurden nach Bardenheier (2005) zuerst die Enden der Rundproben in Haltevorrichtungen eingespannt. Anschließend war es möglich, Zugversuche über einen Zylinderkolben mit einstellbarer Belastung zu realisieren. Laut Bessel und Brückner-Foit (2008) wurden nach festgelegten Zug-Druck-Wiederholungen Bilder mit einer 1.14 Megapixel s/w Kamera und 750-facher optischer Vergrößerung im Abstand von 46 mm geschossen. Der interessierende Bereich ist in der Mitte der Stahlprobe und hat eine

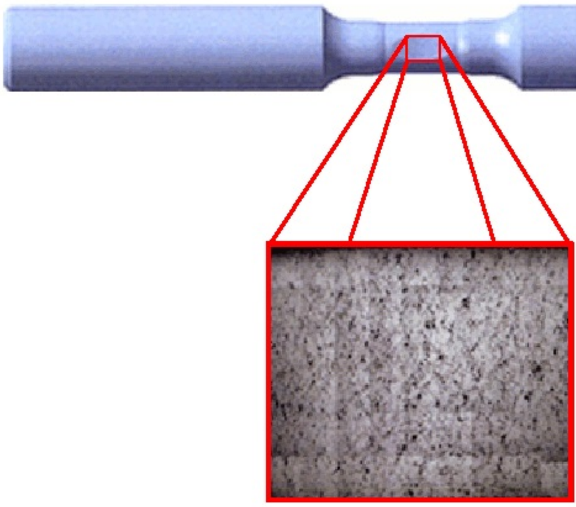

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der zugrundeliegenden Stahlprobe aus Bessel und Brückner-Foit (2008)

Fläche von 4×5 mm^2. Da die Kamera jedoch die zu untersuchende Fläche nicht mit einem einzelnen Foto abdecken konnte, war es notwendig, mehrere Einzelbilder zu generieren. Die separat erzeugten Bilder wurden anschließend in Müller et al. (2012) zu einem Gesamtbild zusammengestellt.

Das im Folgenden beschriebene Experiment richtet sich nach der Vorgehensweise in Gunkel et al. (2012) und Müller et al. (2012). Die erste Rundprobe (im weiteren Verlauf der Arbeit: Stahlprobe 10) wurde mit 360 MPa in jedem Zug-Druck-Vorgang belastet. Nach einer gewissen Anzahl an Wiederholungen wurde eine Aufnahme von der Oberfläche der entsprechenden Probe gemacht, d.h. für die ersten 20000 Wiederholungen in jedem 1000. Zug-Druck-Experiment sowie zu den Zeitpunkten 25000, 30000, 35000, 37000, 39000, 40000, 42000 und 44000. Jedes dieser 29 Gesamtbilder wurde aus 45 Einzelbildern zusammengesetzt. In einem vergleichbaren Experiment wurde die zweite Rundprobe (im Folgenden: Stahlprobe 31) einer wiederholten Belastung von 400 MPa ausgesetzt. Eine Bildaufnahme wurde jeweils für die ersten 10000 Zeitpunkte nach jeweils 1000 Zug-Druck-Experimenten sowie zu den Zeitpunkten 12000, 14000, 16000 und 18000 geschossen. Die Stahlprobe 31 liegen somit 15 Gesamtbilder vor, die jeweils aus 54 Einzelbildern bestehen. Abbildungen 2.2 und 2.3 zeigen die Gesamtbilder beider Stahlproben zu Beginn sowie nach Beendigung des Experiments.

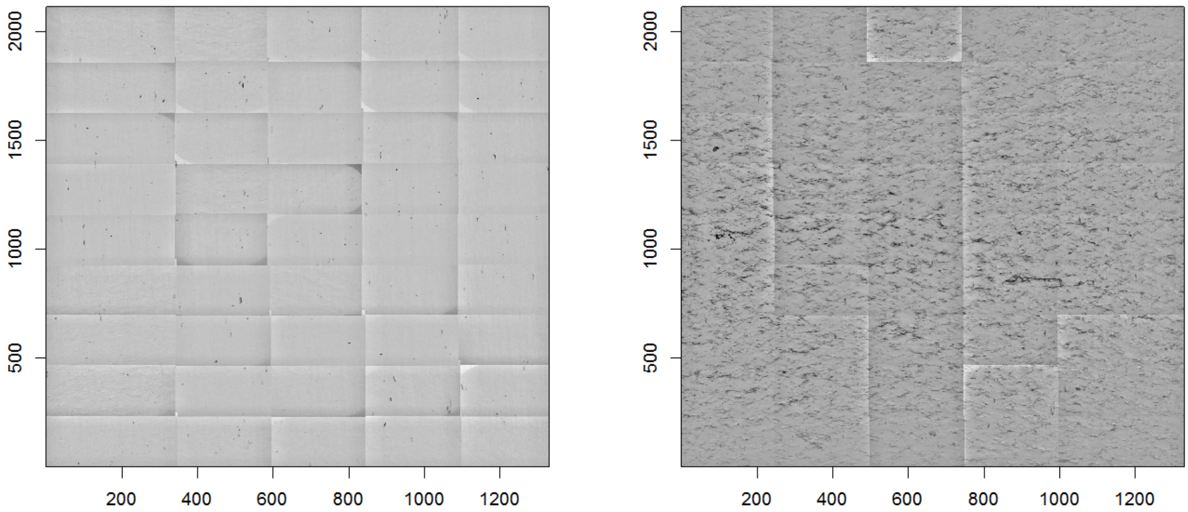

Abbildung 2.2: Gesamtbild von Stahlprobe 10 ohne Beschädigung (links) und nach 44000 Zug-Druck-Experimenten (rechts)

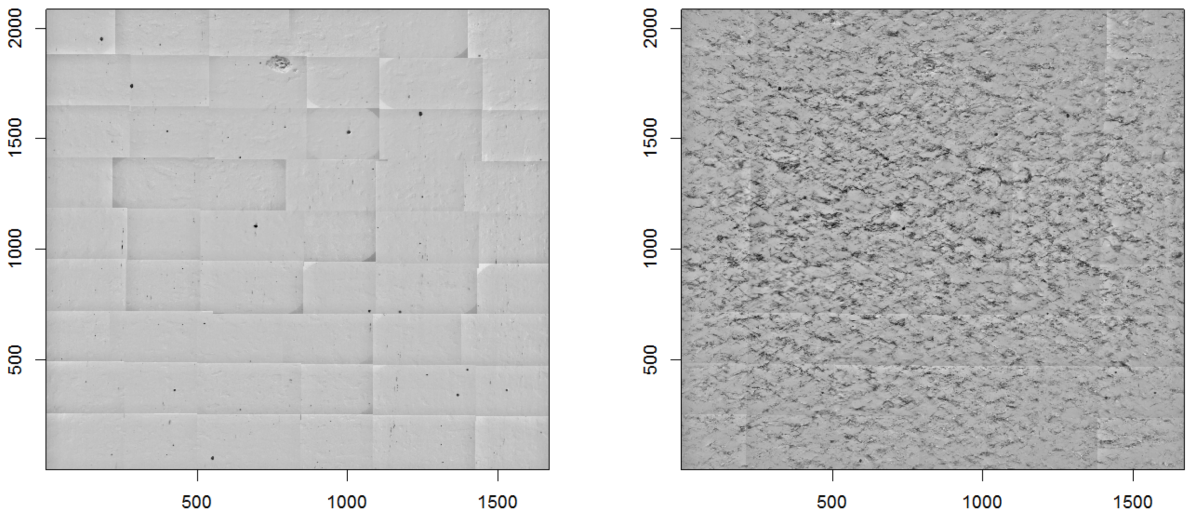

Abbildung 2.3: Gesamtbild von Stahlprobe 31 ohne Beschädigung (links) und nach 18000 Zug-Druck-Experimenten (rechts)

2.2 Beurteilung der Bildqualität

Die zugrundeliegenden Bildproben sind im Dateiformat *Bitmap* gespeichert. Die Speichergröße für jeden Punkt in einer Bildprobe ist identisch. Somit haben die Gesamtbilder von Stahlprobe 10 jeweils eine ungefähre Speichergröße von 8.0 Megabyte (MB) und die Aufnahmen von Stahlprobe 31 eine Speichergröße von jeweils ungefähr 39.7 MB. Jedes Teilbild von Stahlprobe 10 und Stahlprobe 31 hat nach Müller et al. (2010) eine Auflösung von 696×512 Pixeln, wobei 80 Pixel einer Länge von 100 μm entspricht. Aufgrund von Überlappungen der Einzelbilder hat das Gesamtbild von Stahlprobe 10 für jeden der 29 Zeitpunkte eine Auflösung von 2659×4221 Pixeln. Die Auflösung der Gesamtbilder von Stahlprobe 31 beträgt für jeden der 15 Zeitpunkte 3337×4165 Pixel. Um den resultierenden Rechenaufwand zu reduzieren, werden im Folgenden die Einzelbilder um den Faktor 2 verkleinert. Das Gesamtbild von Stahlprobe 10 hat somit nur noch eine Auflösung von 1330×2111 Pixeln. Die neue Auflösung der Gesamtbilder von Stahlprobe 31 ist folglich 1669×2083 Pixel.
Bei der Zusammensetzung der Teilbilder zu einem Gesamtbild kann es zu einer zusätzlichen Verfälschung der Daten kommen. In Abbildung 2.4 ist exemplarisch ein Ausschnitt der Fotoko-

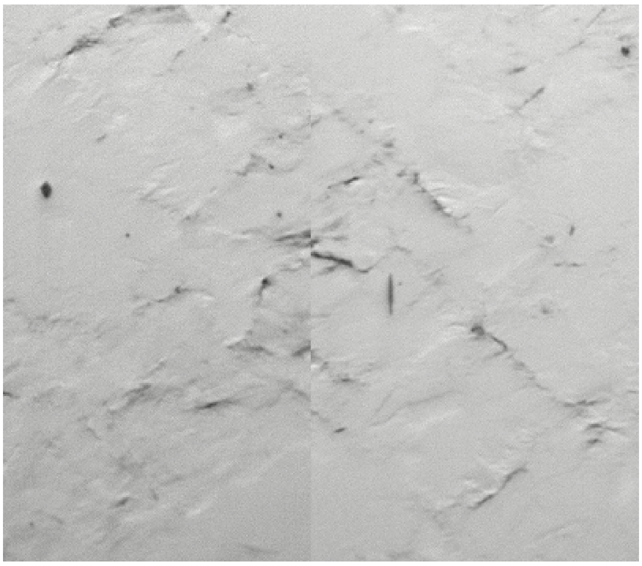

Abbildung 2.4: Bildausschnitt von Stahlprobe 31 nach 3000 Zug-Druck-Wiederholungen

pie von Stahlprobe 31 zum Zeitpunkt 3000 zu sehen. Dort ist andeutungsweise zu erkennen, dass die Übergange zweier benachbarter Teilbilder nicht vollständig übereinstimmen. Dadurch

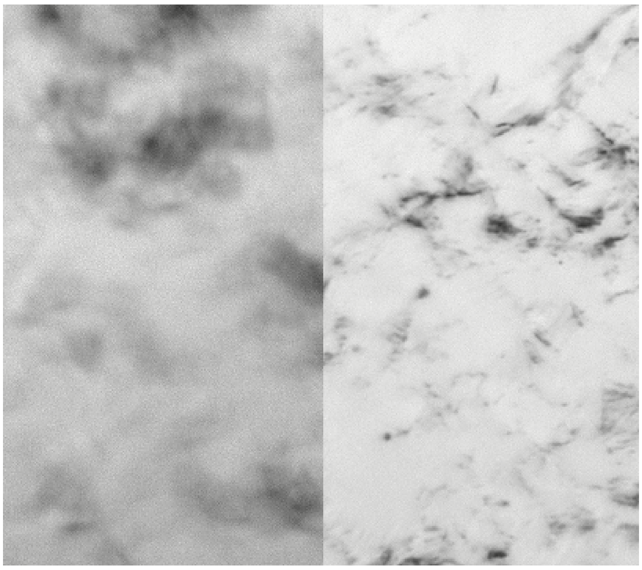

Abbildung 2.5: Bildausschnitt von Stahlprobe 31 nach 6000 Zug-Druck-Wiederholungen

könnte ein abgelichteter Riss entweder verschwinden, verzerrt auftreten oder doppelt vorkommen. Die Bildschärfe ist eine weitere Ursache dafür, dass die Qualität der Aufnahmen beeinträchtigt werden kann. In Abbildung 2.5 ist in einem Ausschnitt von Stahlprobe 31 nach 6000 Zug-Druck-Wiederholungen der Übergang von einem verrauschten Teilbild zu einem unverrauschten Teilbild zu sehen. In diesem Fall kann es vorkommen, dass, aufgrund der niedrigeren Auflösung, Risse nicht erkannt werden können. Des Weiteren kann eine ungünstige Belichtung der Stahlprobe die Daten ebenfalls zusätzlich stören. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 2.6 von Stahlprobe 10 zum Zeitpunkt 44000 zu sehen. Der verdunkelte Bereich am rechten Rand des dargestellten Teilbildes könnte bewirken, dass dieses Gebiet fälschlicherweise als Riss identifiziert wird.
Abschließend ist zu sagen, dass im Material beider Stahlproben bereits zu Beginn des Experiments Krater und Verunreinigungen in Abbildung 2.7 zu erkennen sind, die fälschlicherweise als Riss identifiziert werden. Der Krater ist hierbei lediglich eine extreme Verunreinigung[1]. Dies ist in beiden Stahlproben besonders zum Zeitpunkt 0 zu beobachten, da das Material zu diesem Zeitpunkt noch keine Belastungswechsel erfahren hat.

[1]Anmerkung von Prof. Dr. Christine Müller (TU Dortmund) am 2.10.2013

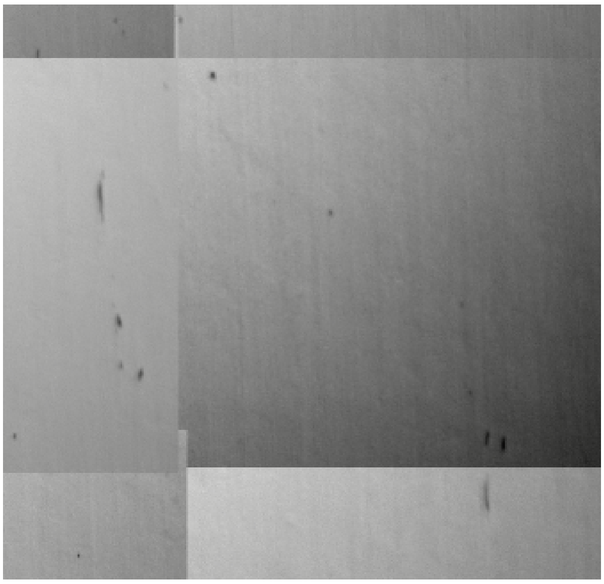

Abbildung 2.6: Bildausschnitt von Stahlprobe 10 nach 44000 Zug-Druck-Wiederholungen

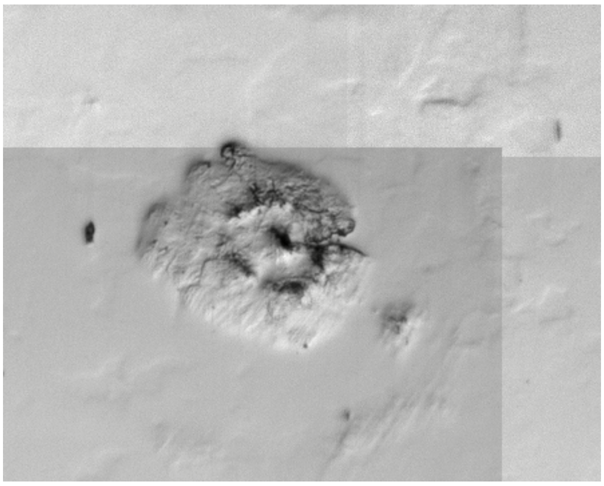

Abbildung 2.7: Bildausschnitt von Stahlprobe 31 ohne Belastungswechsel

2.3 Vorverarbeitung der Daten

Im Rahmen früherer Analysen der Bildgruppen zu beiden Stahlproben wird in Müller et al. (2009) ein Datenpaket für die freie Statistiksoftware R (R Core Team, 2012) vorgestellt, um die zugrundeliegenden Bildproben in digitaler Form zu erfassen. Hierbei handelt es sich um das von Keppler et al. (2011) entwickelte R-Paket crackcrec, mit dessen Hilfe es möglich ist, Risse in

Bildern zu erkennen und diese auf effiziente Weise abzuspeichern. In Müller et al. (2010) ist zudem eine detaillierte Beschreibung gegeben, um mit diesem R-Paket die Aufnahmen von Stahlprobe 10 und 31 weiterzuverarbeiten. Daher wird im Folgenden nur kurz auf den Vorgang zur Produktion der Daten, die für die weitere Analyse von Bedeutung sind, eingegangen.
Die Aufnahmen zu beiden Stahlproben lassen sich mit der R-Funktion rbmp einlesen. Dadurch wird das Bild durch eine Zahlenmatrix dargestellt, wobei jeder Zahl einem Pixel des Gesamtbildes entspricht. Die Zahlenwerte in der Matrix geben die Farbtiefe an. Ein dunkler Punkt in der Bildaufnahme wird durch einen niedrigen Wert und ein heller durch einen hohen Wert repräsentiert. Um die Datenqualität zu verbessern, entfernt ein nach Burger und Burge (2008) definierter Medianfilter (R-Funktion: median.filter) mit einer Fenstergröße von 51×51 Einheiten die Schatten in den Bildern. Mittels der Funktion threshold.msi kann anschließend für jede Teilmatrix, die den Einzelbildern der Gesamtaufnahmen entsprechen, ein Schwellenwert berechnet werden. Dieser Schwellenwert ist eine skalare Kenngröße und entscheidet für jeden Punkt in der Matrix, ob es sich beim entsprechenden Zelleneintrag um einen Risspunkt handelt.
Auf Grundlage dieser Beobachtungen werden in Gunkel et al. (2011) für jeden Zeitpunkt beider Stahlproben mittels der R-Funktion crackrec je drei Datensätze erzeugt. Der erste Datensatz ist vom Typ Liste und hat die Bezeichnung **Crackclusters**. Die Anzahl an Listeneinträgen entspricht der Anzahl an gefundenen Rissen zum jeweiligen Zeitpunkt. Die Listeneinträge selbst enthalten die Koordinaten aller zusammenhängenden Risspunkte. Zwei Risspunkte sind zusammenhängend, falls die zweidimensionle Koordinate des ersten Risspunktes in direkter Nachbarschaft zu der Koordinate des zweiten Risspunktes liegt. Der Typ des Datensatzes **Crackpaths** ist ebenfalls eine Liste. Die Anzahl der Listeneinträge entspricht ebenfalls der Anzahl an gefundenen Rissclustern des zugehörigen Zeitpunktes. Jedoch enthalten diese Listeneinträge lediglich diejenigen Koordinaten des entsprechenden Rissclusters, die den Pfad des längsten kürzesten Weges beschreiben. Dieser Pfad berechnet sich hierbei mit dem von Müller et al. (2010) vorgestellten Dijkstra-Algorithmus. Der letzte Datensatz hat die Bezeichnung **Cracks** und besitzt den Datentyp Matrix. Diese Matrix liefert spaltenweise für jedes Risscluster die Clustergröße, die Pfadlänge des längsten kürzesten Weges, sowie die Anfangs- und Endkoordinaten des berechneten Pfades. Zusätzlich wird eine Verschiebungsmatrix erstellt. Diese gibt für jeweils zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte an, um wie viele Einheiten die beiden Koordinaten verschoben sind.

2.4 Problemstellung

Im Rahmen dieser Ausarbeitung soll, basierend auf den vorverarbeiteten Daten, ein Algorithmus zur zeitlichen Verfolgung der Entstehung von Rissen entwickelt werden. Das Ziel ist hierbei, den Schädigungsprozess beider Stahlproben über Risswachstumskurven darzustellen. Anschließend sollen die produzierten Risswachstumskurven begutachtet werden. Weiterhin soll das beobachtete Risswachstum über stochastische Prozesse beschrieben werden. Hierbei werden Verfahren zur exakten Darstellung, aber auch zur Approximierung des stochastischen Prozesses durchgeführt. Im Anschluss sollen diese beiden Vorgehensweisen hinsichtlich ihrer Anpassung an die beobachteten Daten bewertet und miteinander verglichen werden. Abschließend sollen die Modellparameter, die im Zuge der Erstellung dieser stochastischen Prozesse geschätzt wurden, untersucht werden. Mit Hilfe von stochastischen Differentialgleichungen wird dabei ein Modell aufgestellt, das anschließend genutzt werden kann, um anhand von statistischen Tests signifikante Unterschiede einzelner Parameter nachzuweisen, falls entsprechende Abweichungen vorliegen.

3 Statistische Methoden

Der zentrale Punkt in diesem Kapitel liegt in der Beschreibung der statistischen Methoden. Mittels dieser ist es möglich, die in der Problemstellung formulierten Fragestellungen zu beantworten.

3.1 Stochastische Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Einführung zu stochastischen Differentialgleichungen sowie ihren Anwendungen auf reale Daten. Die Grundlage hierfür ist das Buch *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations* von Iacus (2008). Insofern kein anderer Autor als Quelle zitiert ist, wird im Folgenden auf dieses Werk Bezug genommen.

Nach der Einführung grundlegender Begriffe in den ersten Unterabschnitten, wird darauf aufbauend das Martingal im vierten Unterabschnitt definiert. Im fünften Unterabschnitt wird die Brownsche Bewegung als spezieller Prozess eingeführt. Anschließend wird im sechsten Unterabschnitt das stochastische Integral über ein Beispiel aus der Finanzmathematik hergeleitet, um dieses im siebten Unterabschnitt zu definieren. Im achten Unterabschnitt folgt die Definition eines Diffusionsprozesses als spezieller Itô-Prozess. Daraufhin wird im neunten und zehnten Unterabschnitt die Markov-Eigenschaft von Diffusionsprozessen beschrieben sowie Itôs Formel zur Berechnung einer exakten Lösung für eine stochastische Differentialgleichung vorgestellt. Weiterhin wird im elften Unterabschnitt mit den CKLS-Prozessen eine spezielle Klasse von Prozessgleichungen eingeführt. Abschließend wird im letzten Unterabschnitt der Vasicek-Prozess vorgestellt sowie eine explizte Lösung zum Lösen, der im Folgenden benötigten Differentialgleichung, vorgestellt.

3.1.1 Allgemeines

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit den Ereignissen $\omega \in \Omega$, der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathfrak{A} \to [0,1]$. Weiterhin sei $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ eine Familie von Zufallsvariablen auf gerade diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für die Funktion $X_\gamma(\omega) : \Gamma \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \mathbb{N}$, dass es sich bei $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ um einen zeit-diskreten Prozess handelt. Für $\Gamma = \mathbb{R}$ heißt der Prozess zeit-stetig und wird im Folgenden mit $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ oder kurz $(X_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet. Ein zeit-stetiger Prozess heißt Trajektorie oder Pfad, falls es einen festen Wert $\omega = \bar{\omega}$ gibt, mit $(X_t(\bar{\omega}))_{t \geq 0}$. $X_t(\omega)$ gibt somit den Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt t an.

3.1.2 Filtration und Adaptiertheit

ein weiteres zentrales Element der folgenden Theorie ist die Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$. Es handelt sich hierbei um eine aufsteigende Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$ aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Das heißt, es gilt

$$F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_s \subset ... \subset F_t \subset ... \subset \mathfrak{A}$$

für $s, t \geq 0$ und $s < t$ mit $F_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Dementsprechend kann zu jedem stochastischen Prozess $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ und die von der Menge der in der Vergangenheit realisierten Prozesszustände $X_s(\omega)$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$ bestimmt werden. Für $X_s(\omega)$ und $0 \leq s \leq t$ ist somit jeder Punkt der Trajektorie von X_s messbar, da $\sigma(X_s) \subset F_s$ ist. Ein stochastischer Prozess $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ ist an eine Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert, falls X_t für alle $t \geq 0$ $\mathfrak{F}_t$-messbar ist.

3.1.3 Bedingte Erwartungen

Sei $P(B) > 0$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses B. Weiterhin sei $E(|X|) < \infty$. Dann ist die bedingte Erwartung

$$E(X|B) = \frac{E(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}$$

ein Maß für den erwarteten Wert der Zufallsvariable X, wenn das Ereignis B bereits eingetreten ist. In diesem Fall ist $\mathbf{1}_B$ eine Indikatorfunktion. Somit ist $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$ für $\omega \in B$ und $\mathbf{1}_B(\omega) = 0$ für $\omega \notin B$. Wenn X eine diskrete Zufallsvariable ist, dann hat die bedingte Erwartung die Form

$$E(X|B) = \sum_i x_i \frac{P(\{\omega : X(\omega) = x_i\} \cap B)}{P(B)} = \sum_i x_i P(X = x_i|B),$$

wobei $x_1, x_2, ...$ mögliche Realisationen des Trägers sind. Sei nun $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Unter-σ-Algebra zu dem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann wird laut Klenke (2008) die Zufallsvariable Z als bedingte Erwartung von X gegeben $\mathfrak{F}$ bezeichnet, falls

- Z $\mathfrak{F}$-messbar ist und
- für alle $A \in \mathfrak{F} : E(X\mathbf{1}_A) = E(Z\mathbf{1}_A)$.

Die bedingte Erwartung hat dann die Bezeichnung $Z := E(X|\mathfrak{F})$ und ist sowohl existent als auch eindeutig. Der Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit von $E(X|\mathfrak{F})$ kann in Klenke (2008) nachvollzogen werden.

3.1.4 Martingale

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Weiterhin sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein an die Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter stochastischer Prozess mit $E(|X_t|) < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann heißt

- $E(X|\mathfrak{F}_s) = X_s$ ein Martingal
- $E(X|\mathfrak{F}_s) \geq X_s$ ein Submartingal
- $E(X|\mathfrak{F}_s) \leq X_s$ ein Supermartingal

für alle $0 \leq s \leq t \leq \infty$.

3.1.5 Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung ist ein Martingal und nach Meintrup und Schäffler (2005) ein stochastischer Prozess $(X_\gamma)_{\gamma \geq 0}$ mit den Eigenschaften, dass

- $P(X_0 = 0) \overset{\text{f.s.}}{=} 1$,
- die Zuwächse von $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ stochastisch unabhängig sind,
- $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ für alle $0 \leq s \leq t$ gilt und
- $(X_\gamma)_{\gamma \geq 0}$ ein stetiger Prozess ist.

Dieser spezielle stochastische Prozess heißt auch Wiener Prozess und wird im Folgenden mit $(W_\gamma)_{\gamma \geq 0}$ bezeichnet.
Eine zusätzliche Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist, dass deren Pfad nirgends differenzierbar ist. Dies wird in Iacus (2008) über den Differenzenquotienten bewiesen, indem gezeigt wird, dass der Grenzwert des Quotienten nicht endlich ist.

3.1.6 Herleitung des stochastischen Integrals

Stochastische Differentialgleichungen gehören zu den Grundlagen in der Finanzmathematik. Daher wird deren Herleitung auch in diesem Kontext beschrieben. Dennoch können stochastische Differentialgleichung auch in anderen Bereichen verwenden werden.
Gegeben sei ein Vermögenswert X_t zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Weiterhin bezeichne $\Delta X = X_{t+\Delta} - X_t$ eine Änderung von X im betreffenden Intervall $[t, t+\Delta)$. Dann kann das Verhältnis zwischen ΔX und X als Komposition eines stochastischen und eines deterministischen Beitrags beschrieben werden.
Unter der Annahme, dass der deterministische Beitrag durch die Zinsrate einer risikofreien Anlage bestimmt wird und daher proportional zur Zeit mit einer konstanten Rate μ ist, ist der deterministische Beitrag gegeben durch $\mu\Delta$. Des Weiteren wird für den stochastischen Beitrag angenommen, dass er von der natürlichen Variabilität des Markets und einem Rauschen abhängt. Die Variation in den Rauschtermen kann durch $\Delta W = W_{t+\Delta} - W_t$ beschrieben werden und ist proportional zur Variabilität des Marktes σ^2. Dann ist der stochastische Beitrag

$\sigma\Delta W$, wobei W als Wiener Prozess angenommen wird, falls die Störgeräusche normalverteilt und unabhängig sind. Dann lautet das Modell

$$\frac{\Delta X}{X} = \mu\Delta + \sigma\Delta W. \tag{1}$$

Wenn die Intervalle immer kleiner werden, das heißt $\Delta \to 0$ ist eine Grenzbetrachtung des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{X_{t+\Delta} - X_t}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial t}X_t \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{W_{t+\Delta} - W_t}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial t}W_t.$$

möglich. Die Gleichung (1) hat dann nach Äquivalenzumformungen die Form

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t\,\mathrm{d}t + \sigma X_t\,\mathrm{d}W_t. \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung hat jedoch keine mathematische Bedeutung, da der Wiener Prozess - wie bereits erwähnt - an keiner Stelle differenzierbare Pfade hat. Daher wird die Integraldarstellung von (2) für die Berechnung genutzt und lautet

$$X_t = X_0 + \mu\int_0^t X_u\,\mathrm{d}u + \sigma\int_0^t X_u\,\mathrm{d}W_u.$$

Dann ist

$$I(X) = \int_0^T X_u\,\mathrm{d}W_u$$

das stochastische Integral bezüglich eines Wiener Prozesses.

3.1.7 Das stochastische Integral

Sei $(X_t)_{T\geq t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess, der zu einer Filtration adaptiert ist und von einer Brownsche Bewegung angetrieben wird. Weiterhin sei $\int_0^T E(X_s)^2\mathrm{d}s < \infty$. Dann ist das stochastische Integral von X gegeben durch

$$I_T(X) = \int_0^T X_s \mathrm{d}W_s = \lim_{||\Pi_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \tag{3}$$

und konvergiert im quadratischen Mittel. Hierbei bezeichne $||\Pi_n|| = \max_{j=0,\ldots,n-1}(t_{j+1} - t_j)$ die größte Schrittweite einer gegebenen Partition $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = T\}$ des Intervalls $[0, T]$ in n Teilintervalle. Einen Beweis dafür findet sich in Øksendal (2010). Die Idee hierbei ist es, eine einfache Funktionsklasse $f : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ zu definieren, dass die Treppenfunktion $f_t^{(n)}(\omega) = f_{t_j}(\omega)$ mit $t_j \le t < t_{j+1}$ im quadratischen Mittel genähert. Anschließend ist die Formel (3) der Grenzwert von

$$I(f^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n-1} f_{t_j}^{(n)}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Während der Beweisführung werden ebenfalls nützliche Eigenschaften des stochastischen Integrals gezeigt, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird.

Behauptung:

Sei X integrierbar. Dann lauten Erwartungswert und Varianz des stochastischen Integrals

$$E\left(\int_0^T X_s \,\mathrm{d}W_s\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad Var\left(\int_0^T X_s \,\mathrm{d}W_s\right) = \int_0^T E(X_t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T X_s \,\mathrm{d}W_s\right) &= E\left(I_T(X_t)\right) = E\left(\lim_{||\Pi_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) \\ &= \lim_{||\Pi_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} E\Big((X_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\Big) \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{||\Pi_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_{t_i})(\underbrace{E(W_{t_{i+1}})}_{=0} - \underbrace{E(W_{t_i})}_{=0}) \\ &= \lim_{||\Pi_n|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_{t_i}) \cdot 0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Der Schritt in $(*)$ gilt, da X_{t_i} und $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ stochastisch unabhängig sind. Die Beweisidee zur Berechnung der Varianz ist aus Øksendal (2010) abgeleitet. Dann ist

$$
\begin{aligned}
Var\left(\int_0^T X_s \, \mathrm{d}W_s\right) &= E\left(I_T(X_t)^2\right) - \underbrace{E\left(I_T(X_t)\right)^2}_{=0,\text{ wegen (4)}} \\
&= E\left(\lim_{||\Pi_n||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} X_{t_i}X_{t_j}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right) \\
&\overset{(**)}{=} \begin{cases} 0 & \text{, falls } i \neq j \\ E\left(\lim_{||\Pi_n||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right) & \text{, falls } i = j \end{cases} \\
&= \lim_{||\Pi_n||\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E(X_{t_i}^2)E((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2)\right) \\
&= \lim_{||\Pi_n||\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E(X_{t_i}^2)\left[\underbrace{Var(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}_{\hat{=}\text{ Varianz der Zuwächse}} + \underbrace{(E(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))^2}_{=0}\right]\right) \\
&= \lim_{||\Pi_n||\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E(X_{t_i}^2)(t_{i+1} - t_i)\right) = \int_0^T E(X_t^2)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Für $(**)$ wird argumentiert, dass $X_{t_i}X_{t_j}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ und $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ stochastisch unabhängig sind, falls $i < j$.

□

Bemerkung:

Die zweite Eigenschaft nennt sich auch Itô-Isomerie. Eine Definition zur Integrierbarkeit findet sich in Deck (2006).

3.1.8 Itô- und Diffusionsprozess

Der Itô-Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein stochastischer Prozess mit der Prozessgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t g_s(\omega)\, \mathrm{d}s + \int_0^t h_s(\omega)\, \mathrm{d}W_s,$$

wobei die Funktionen $g_s(\omega)$ und $g_s(\omega)$ zwei adaptierte und progressiv messbare stochastische Prozesse sind, mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$P\left(\int_0^T |g_t(\omega)|\,\mathrm{d}t < \infty\right) = 1 \text{ bzw. } P\left(\int_0^T h_t^2(\omega)\,\mathrm{d}t < \infty\right) = 1.$$

Eine Definition von progressiver Messbarkeit liefert Klenke (2006). Diese Eigenschaft folgt daraus, dass die Funktionen adaptiert und rechtsstetig sind.
Diffussionsprozesse sind ebenfalls Itô-Prozesse. Diese Prozesse sind die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = b_t(\omega, X_t)\,dt + \sigma_t(\omega, X_t)\,\mathrm{d}W_t \text{ mit } t \geq 0$$

und Startpunkt $X_0 = x_0$. Hierbei müssen laut Klenke (2006) $b_t(\omega)$ bzw. $\sigma_t(\omega)$ messbare Funktionen sein und haben die Bezeichnung *Drift-* bzw. *Diffusionskoeffizient*. Da diese Prozesse ebenfalls Itô-Prozesse sind, müssen diese die Bedingung

$$P\left(\int_0^T (|b_t(\omega)| + \sigma_t^2(\omega))\,\mathrm{d}t < \infty\right) = 1$$

für alle $T \in [0, \infty)$ erfüllen. Dieser stochastische Prozess $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ kann dann in der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t g_s(X_t)\,\mathrm{d}s + \int_0^t h_s(X_t)\,\mathrm{d}W_s$$

geschrieben werden. Der Diffusionsprozess erfüllt zudem die Annahme der globalen Libschitz-Stetigkeit und des linearen Wachstums. D.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, T]$ gibt es Konstanten $K, C < \infty$, für die die Gleichungen

$$|b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| < K|x - y| \text{ und } |b_t(x)| + |\sigma_t(x)| < C(1 + |x|)$$

gelten. Dann ist der stochastische Prozesses pfad-stetig, eindeutig und stark adaptiert, so dass gilt

$$E\left(\int_0^T |X_t|^2 \mathrm{d}t\right) < \infty.$$

3.1.9 Markov-Eigenschaft

Ein Markovprozess ist nach Voß (2006) ein stochastischer Prozess, dessen bedingte Dichten für alle Zeitpunkte $t_0 < t_1 < ... < t_i < ... < T$ die Bedingung

$$p_{t_i|t_0,...,t_{i-1}}(x_i|x_0,...,x_{i-1}) = p_{t_i|t_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

erfüllen. Diese Gleichung nennt sich Markov-Eigenschaft und garantiert, dass die bedingte Dichtefunktion zum Zeitpunkt t_i lediglich vom vorhergegangenen Wert x_{i-1} zum Zeitpunkt t_{i-1} nicht aber von der weiteren Prozessvergangenheit, abhängt. Diffusionsprozesse haben laut Iacus (2008) gerade diese Eigenschaft.

3.1.10 Itôs Formel

Zur Simulation eines stochastischen Prozess ist es erstrebenswert, die Lösung der Differentialgleichung in geschlossener Form darzustellen. Dies ist mittels Itôs Formel möglich und kann als stochastische Variante der Taylor-Formel gesehen werden, die lediglich Terme bis zur zweiten Ordnung betrachtet. Die Formel von Itô fordert, dass die Funktion $f_t(x)$ bezüglich t und x zweimal differenzierbar ist. Dann gilt

$$f_t(X_t) = f_0(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_u(X_u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f_u(X_u)\,\mathrm{d}X_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x^2} f_u(X_u)\,(\mathrm{d}X_u)^2,$$

wobei $\partial/\partial t$ und $\partial/\partial x$ die Ableitung an der Stelle t bzw. x ist und $\partial/\partial^2 x$ der zweimaligen Ableitung an der Stelle x entspricht. Die Differentialdarstellung der Gleichung lautet

$$\mathrm{d}f_t(X_t) = \frac{\partial}{\partial t} f_t(X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial x} f_t(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2} f_t(X_t)\,(\mathrm{d}X_t)^2.$$

Beweis:

Analog zu Øksendal (2010) mit f statt g sowie $b_t(\omega)$ bzw. $\sigma_t(\omega)$ anstelle von $u_t(\omega)$ bzw. $v_t(\omega)$.

□

3.1.11 CKLS-Prozess

Eine spezielle Klasse von parametrischen Modellen ist der von Chan et al. (1992) entworfene CKLS-Prozess, welcher die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= b(X_t, \theta)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t, \theta)\,\mathrm{d}W_t \\ &= (\theta_1 - \theta_2 X_t)\,\mathrm{d}t + \theta_3 X_t^{\theta_4}\,\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

löst. Dieses CKLS-Modell ist eine Verallgemeinerung von Diffusionsprozessen, die laut Iacus (2008) sehr beliebt in der Praxis sind.

3.1.12 Vasicek-Prozess

Der Vasicek-Prozess ist ein Diffusionsprozess und kann über eine stochastische Differentialgleichung dargestellt werden. Er kann für $b(X_t) = \theta_1 - \theta_2 X_t$ und $\sigma(X_t) = \theta_3$ aus der allgemeinen stochastischen Differentialgleichung für stochastische Prozesse abgeleitet werden und ergibt sich auch durch Einsetzen von $\theta_4 = 0$ in den CKLS-Prozess. Somit löst der Vasicek-Prozess die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)\,\mathrm{d}t + \theta_3\,\mathrm{d}W_t \text{ mit } t \geq 0,$$

wobei $X_0 = x_0$ den Startpunkt bezeichne und $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ bzw. $\theta_3 \in \mathbb{R}_+$ wählbare Parameter sind. Es gilt für den Vasicek-Prozess, dass die Varianz für ein beliebiges $t \geq 0$ endlich ist.

Behauptung:

Die explizite Lösung der stochastischen Differentialgleichung des Vasicek-Prozesses ist gegeben durch

$$X_t = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} \int_0^t e^{\theta_2 u}\,\mathrm{d}W_u.$$

Der bedingte Erwartungswert bzw. die bedingte Varianz der bedingten Übergangsdichte $p_\theta(t, X_t | X_0 = x_0)$ für ein $t \geq 0$ lauten

- $E_\theta(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2,t}$
- $Var_\theta(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2}{2\theta_2}\left(1 - e^{-2\theta_2 t}\right).$

Beweis:

Mittels Itôs Formel und der Hilfsfunktion $f_t(x) = xe^{\theta_2 t}$ ist es möglich eine explizite Lösung der stochastischen Differentialgleichung zu erhalten. Da die Funktion $f_t(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, gilt für die partiellen Ableitungen

$$\tfrac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \theta_2 x f_t(x), \qquad \tfrac{\partial}{\partial x} f_t(x) = e^{\theta_2 t} \qquad \text{und} \qquad \tfrac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
X_t e^{\theta_2 t} &= f_t(X_t) = f_0(X_0) + \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u + \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}X_u \\
&= x_0 + \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u + \int_0^t e^{\theta_2 u} \{(\theta_1 - \theta_2 X_u)\mathrm{d}u + \theta_3 \mathrm{d}W_u\} \\
&= x_0 + \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u + \int_0^t \theta_1 e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u - \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u + \theta_3 \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u \\
&= x_0 + \int_0^t \theta_1 e^{\theta_2 u} \mathrm{d}u + \theta_3 \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u = x_0 + \left[\frac{\theta_1}{\theta_2} e^{\theta_2 u}\right]_0^t + \theta_3 \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u \\
&= x_0 + \frac{\theta_1}{\theta_2} e^{\theta_2 t} - \frac{\theta_1}{\theta_2} + \int_0^t \theta_3 e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u = x_0 + \frac{\theta_1}{\theta_2}(e^{\theta_2 t} - 1) + \theta_3 \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u.
\end{aligned}$$

Durch Umformung der Gleichung nach X_t folgt die Behauptung. Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
E_\theta(X_t|X_0 = x_0) &= E\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} \int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u\right) \\
&= \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} E\left(\int_0^t e^{\theta_2 u} \mathrm{d}W_u\right) \\
&= \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t}.
\end{aligned}$$

Analog dazu lässt sich die Varianz berechnen. Dann ist

$$\begin{aligned}
Var_\theta(X_t|X_0 = x_0) &= Var\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t}\int_0^t e^{\theta_2 u}\mathrm{d}W_u\right) \\
&= Var\left(\theta_3 e^{-\theta_2 t}\int_0^t e^{\theta_2 u}\mathrm{d}W_u\right) = \theta_3^2 e^{-2\theta_2 t} Var\left(\int_0^t e^{\theta_2 u}\mathrm{d}W_u\right) \\
&\overset{(*)}{=} \theta_3^2 e^{-2\theta_2 t}\int_0^t e^{2\theta_2 u}\mathrm{d}u = \theta_3^2 e^{-2\theta_2 t}\left[\frac{1}{2\theta_2}e^{2\theta_2 u}\right]_0^t \\
&= \theta_3^2 e^{-2\theta_2 t}\left(\frac{1}{2\theta_2}e^{2\theta_2 t} - \frac{1}{2\theta_2}\right) = \frac{\theta_3^2}{2\theta_2}\left(1 - e^{-2\theta_2 t}\right),
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Itô-Isomerie verwendet wird. □

3.2 Schätzmethoden

Diffussionsprozesse besitzen üblicherweiser Parameter, durch die ein Prozess spezifiziert werden kann. Hierfür ist es notwendig, eine Methode zu finden, mit deren Hilfe die gesuchten Parameter aus gegebenen Datenpunkten geschätzt werden können. Das Ziel ist dann, mit den gefundenen Parameterwerten eine Trajektorie zu simulieren, um eine Prognose über einen zu betrachteten Sachverhalt zu machen. In praktischen Anwendungen können Beobachtungen nur zeit-diskret erhoben werden, sodass im weiteren Verlauf auf die Betrachtung von zeit-stetigen Beobachtungen verzichtet wird.

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird die Maximum-Likelihood-Methode als Verfahren zur Parameterschätzung beschrieben. Aufbauend darauf werden in den letzten beiden Unterabschnitten Methoden zur exakten bzw. numerischen Bestimmung der Likelihood-Funktion erläutert.

3.2.1 Maximum-Likelihood-Methode

Seien nach Fuchs (2013) bzw. Genschel und Becker (2005) die Beobachtungen $x_1, ..., x_n$ Realisierungen der unabhängigen Stichprobenvariablen $X_1, ..., X_n$, welche wie die diskrete Zufallsvariable X verteilt sind. Die diskrete Dichtefunktion von **X** habe einen unbekannten Parametervektor $\theta \in \mathbb{R}^p$ und wird mit $f_\theta^X(x) = f^{X_1,...X_n}(x_1, ..., x_n; \theta)$ bezeichnet. Weiterhin wurde x_i zum Zeitpunkt t_i beobachtet mit $i = 0, ..., n$ und $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n = T$. Der

Abstand $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ ist entspricht dem zeitlichen Abstand der Beobachtungen x_i und x_{i-1} mit $\sum_{i=1}^n \Delta_i = T$. Dann ist nach Fahrmeir et al. (2011) das zugrundeliegende Optimierungsproblem zur Schätzung des wahren θ durch $\hat{\theta}$ ist gegeben durch

$$\hat{\theta} = \arg\max_\theta f_\theta^X(x) = \arg\max_\theta L_x(\theta).$$

Die Funktion $L_x(\theta)$ nennt sich Likelihood-Funktion. Es wird demnach dasjenige θ als Schätzwert ausgewählt, für das die Auftretenswahrscheinlichkeit der beobachteten Stichprobe $x_1, ..., x_n$ maximiert wird, wenn dieser der wahre Parameter der Verteilung ist.

Für einen Diffusionsprozess $(X_t)_{T \geq t \geq 0}$ ist die Unabhängigkeitsannahme der Stichprobenvariablen verletzt, da der Wert von x_t direkt von seinem Vorgänger x_{t-1} abhängt. Daher wird lediglich angenommen, dass die Zuwächse zwischen zwei Zeitpunkten unabhängig sind. Diese lassen sich über die Übergangswahrscheinlichkeiten schätzen. Aufgrund der Markov-Eigenschaft von X hat die Likelihood-Funktion dann die Form

$$\begin{aligned}
L_n(\theta) &= p_\theta(X_n, X_{n-1}, ..., X_0) \\
&= p_\theta(\Delta_n, X_n | X_{n-1}) \cdot p_\theta(X_{n-1}, ..., X_0) \\
&= p_\theta(\Delta_n, X_n | X_{n-1}) \cdot p_\theta(\Delta_{n-1}, X_{n-1} | X_{n-2}) \cdot p_\theta(X_{n-2}, ..., X_0) \\
&= ... \\
&= p_\theta(\Delta_n, X_n | X_{n-1}) \cdot ... \cdot p_\theta(\Delta_1, X_1 | X_0) \cdot p_\theta(X_0) \\
&= \prod_{i=1}^n p_\theta(\Delta_i, X_i | X_{i-1}) \cdot p_\theta(X_0).
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung des zugrundeliegenden Optimierungsproblems wird die Likelihood-Funktion logarithmiert. Aufgrund der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion wird die Stelle des Maximums dabei nicht verändert. Somit lautet die log-Likelihood-Funktion

$$l_n(\theta) = \log L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log\left(p_\theta(\Delta_i, X_i | X_{i-1})\right) + \log(p_\theta(X_0)).$$

Oftmals ist es schwierig, die Verteilung von X_0 und somit $p_\theta(X_0)$ zu bestimmen. Mit steigender Anzahl an Beobachtungen sinkt deren relativer Beitrag bei der Berechnung der log-Likelihood-Funktion. In Iacus (2008) wird daher vorgeschlagen, $p_\theta(X_0) = 1$ zu setzen, so dass der Summand

$\log(p_\theta(X_0))$ verschwindet. Zur Lösung des Maximierungsproblems ist es sinnvoll, die partiellen Ableitungen nach $\theta_1, ...\theta_p$ zu berechnen. Dann ist

$$\nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \nabla l_i(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1} l_i(\theta) \\ \vdots \\ \partial_{\theta_p} l_i(\theta) \end{pmatrix}$$

der Gradient der log-Likelihood-Funktion.

3.2.2 Exakte Likelihood-Inferenz

In vielen Anwendungen ist es nicht möglich, die wahre Likelihood-Funktion zu bestimmen. Diffusionsprozesse sind hierbei eine Ausnahme. Dennoch kann nicht im Allgemeinen gewährleistet werden, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung einen guten Schätzer $\hat{\theta}$ für den wahren Parametervektor θ liefert. Es ist daher sinnvoll, Bedingungen für den Schätzer zu fordern, um dessen Güte beurteilen zu können. Iacus (2008) gibt daher Voraussetzungen an, um zumindest die Konsistenz und die asymptotische Normalverteilung vom geschätzen Parametervektor $\hat{\theta}$ sicherzustellen, ohne dass die Schrittweite Δ einen nennenswerten Einfluss hat. Zwei dieser Bedingungen sind die Annahme des *linearen Wachstums* bzw. der *globalen Lipschitz-Stetigkeit*, auf die bereits in dieser Ausarbeitung Bezug genommen wurde. Eine weitere Voraussetzung ist die *Bestimmtheit des Diffusionskoeffizienten*, das heißt

$$\inf_x \sigma^2(x, \theta) > 0.$$

Die beiden letzten Bedingungen nehmen Bezug auf die *Existenz der Momente* und die *Glätte der Koeffizienten*. Ersteres ist gegeben, falls für $k > 0$ gilt, dass

$$\sup_t E[|X_t|]^k < \infty$$

ist. Letztere Annahme ist erfüllt, falls beide Koeffizienten b und σ sowie deren erste drei Ableitungen in θ glatt in x sind und polynomiell in x wachsen.

Es existieren noch weitere Bedingungen, die an die Funktion gestellt werden können. Die fünf genannten Bedingungen bilden aber eine sinnvolle Grundmenge. Somit ist die Verteilung von X_i bedingt auf X_{i-1} für $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ gegeben durch

$$X_i|X_{i-1} \sim N\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(X_{i-1} - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right)e^{-\theta_2\Delta_i}, \frac{\theta_3^2}{2\theta_2}\left(1 - e^{-2\theta_2\Delta_i}\right)\right)$$

mit Übergangsdichte

$$p_\theta^{\text{Exakt}}(x_i|x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\theta_3^2}{\theta_2}(1 - e^{-2\theta_2\Delta_i})}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \frac{\theta_1}{\theta_2} - (x_{i-1} - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2\Delta_i})^2}{\frac{\theta_3^2}{\theta_2}(1 - e^{-2\theta_2\Delta_i})}\right\}.$$

Die log-Likelihood ist in Folge dieser Überlegungen gegeben durch

$$l_n^{\text{Exakt}}(\theta) = -\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \frac{\theta_1}{\theta_2} - (X_{i-1} - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2\Delta_i})^2}{\frac{\theta_3^2}{\theta_2}(1 - e^{-2\theta_2\Delta_i})} + \frac{n}{2}\log\left(\frac{\pi\theta_3^2}{\theta_2}\left(1 - e^{-2\theta_2\Delta_i}\right)\right)\right\}$$

3.2.3 Euler-Methode

Die Euler-Methode ist nach Iacus (2008) ein Verfahren zur Approximation der exakten Likelihood-Funktion.
Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$, der die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t, \theta)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, \theta)\mathrm{d}W_t \text{ mit } t \geq 0$$

löst. Seien zudem sowohl der Driftkoeffizient b, als auch der Diffussionskoeffizient σ in kleinen Intervallen $[t_i, t_i + \Delta_i]$ konstant. Dann liefert die Euler-Approximation einen neuen Prozess Y, der X approximiert. Dann gilt für $Y_{t_i} =: Y_i$ die Diskretisierung

$$Y_i - Y_{i-1} = b(Y_{i-1}, \theta)\Delta_i + \sigma(Y_{i-1}, \theta)(W_i - W_{i-1}) \text{ für } i = 1, ..., n.$$

Die Zuwächse $Y_i - Y_{i-1}$ sind dann unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen, so dass gilt

$$Y_i|Y_{t_{i-1}} \sim N\left(y_{i-1} + b(Y_{i-1}, \theta)\Delta_i, \sigma^2(Y_{i-1}, \theta)\Delta_i\right).$$

Die Übergangsdichte hat dann die Form

$$p_\theta^{\text{Euler}}(y_i|y_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_i\sigma^2(y_{i-1}, \theta)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y_i - y_{i-1} - b(y_{i-1}, \theta)\Delta_i)^2}{\Delta_i\sigma^2(y_{i-1}, \theta)}\right\}$$

Die log-Likelihood-Funktion des diskretisierten Prozesses lautet

$$l_n^{\text{Euler}}(\theta) = -\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - Y_{i-1} - b(Y_{i-1},\theta)\Delta_i)^2}{\sigma^2(Y_{i-1},\theta)\Delta_i} + \frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2(Y_{i-1},\theta)\Delta_i)\right\}.$$

Um die Übergangsdichte und die Likelihood-Funktion für den Vasicek-Prozess zu erhalten, muss $b(Y_{i-1},\theta) = \theta_1 - \theta_2 Y_i$ bzw. $\sigma(Y_i,\theta) = \theta_3$ eingesetzt werden.

3.3 Optimierungsverfahren

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren dienen der Berechnung von Datenpunkten bzw. speziellen Parametern, um die zugrundeliegenden Daten schätzen zu können.
Die erste Methode, der sogenannte BFGS-Algorithmus, kann zur Maximierung der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Likelihood-Funktionen eingesetzt werden. Das zweite Verfahren beschreibt einen randomisierten Algorithmus, der die Varianz der Vorhersagen des zuvor angepassten Modells minimiert.

3.3.1 BFGS-Algorithmus

Ein Verfahren, mit dem die in Kapitel 3.3 vorgestellten log-Likelihood-Funktionen minimiert werden können, ist der von Fletcher (2000) vorgestellte BFGS-Algorithmus. Das Ziel bei diesem Optimierungsverfahren ist es, für eine Funktion $l : \Theta^p \to \mathbb{R}$ und $p \geq 1$ eine Parametereinstellung θ^* in einem zulässigen Lösungsraum Θ^p zu finden, so dass

$$l(\theta^*) \leq l(\theta) \text{ für alle } \theta \in \Theta^p$$

gilt. Alternativ kann das Minimierungssproblem auch zu einem Maximierungsproblem umgeschrieben werden, da die Beziehung

$$\max_\theta l(\theta) = -\min_\theta -l(\theta).$$

gilt. Im Folgenden wird dieser Algorithmus jedoch als Verfahren zur Minimierung einer Bewertungsfunktion beschrieben, da Optimierungsprobleme in der Literatur üblicherweise auch als solche aufgefasst werden. Die Vorgehensweise einer Optimierungsmethode entspricht der Anwendung eines iterativen Verfahrens. Gegeben sei ein Startvektor $\theta^{(k)}$ im zulässigen Lösungsraum. Ausgehend von dieser Lösung wird eine Schrittrichtung $d^{(k)}$ ermittelt, in der die Zielfunktion $l(\theta^{(k)})$ einen kleineren Wert liefert, wenn die Schrittweite $r^{(k)}$ ist. Der Parametervektor $\theta^{(k+1)}$ hat anschließend den Wert, der zum neuen Zielfunktionswert von l führt. Für den k-ten Iterationsdurchlauf gilt demnach

(1) Bestimme Schrittrichtung $d^{(k)}$.

(2) Finde Schrittweite $r^{(k)}$, so dass $l(\theta^{(k)} + r^{(k)}d^{(k)})$ minimal ist.

(3) Aktualisiere: $\theta^{(k+1)} := \theta^k + r^{(k)}d^{(k)}$.

Der Algorithmus bricht ab, wenn ein vorher festgelegtes Abbruchkriterium erreicht ist. Die Berechnung der Schrittweite $r^{(k)}$ entspricht einer eindimensionalen Liniensuche. Die passende Schrittrichtung $d^{(k)}$ kann mittels des BFGS-Algorithmus gefunden werden. Die Grundidee des BFGS-Algorithmus ähnelt der Newton-Methode, bei der die Hesse-Matrix $H := \nabla^2 l(\theta)$ für die Wahl der Suchrichtung verwendet wird. Die neue Schrittrichtung ergibt sich dann als

$$d^{(k)} := (H^{(k)})^{-1}\nabla l(\theta^{(k)}).$$

Der Newton-Algorithmus hat den Nachteil, dass die Hessematrix existieren und deren Definitheit in jedem Iterationsschritt überprüft werden muss. Der BFGS-Algorithmus hingegen fordert lediglich die Existenz des Gradienten und approximiert die Hessematrix iterativ. Dieses Verfahren kann somit als approximative Alternative zur Newton-Methode gesehen werden und gehört zur Klasse der quasi-Newton-Methoden. Eine solche iterative Formel, die die Hessematrix annähert, wurde von Broyden (1970), Fletcher (1970), Golbfarb (1970) und Shanno (1970) entwickelt. Sie lautet

$$H^{(k+1)}_{BFGS} = H^{(k)} + \left(1 + \frac{(\gamma^{(k)})^T H^{(k)} \gamma^{(k)}}{(\delta^{(k)})^T \gamma^{(k)}}\right) \frac{\delta^{(k)}(\delta^{(k)})^T}{(\delta^{(k)})^T \gamma^{(k)}} - \left(\frac{\delta^{(k)}(\gamma^{(k)})^T H + H\gamma^{(k)}(\delta^{(k)})^T}{(\delta^{(k)})^T \gamma^{(k)}}\right)$$

mit $\delta^{(k)} = \theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}$ und $\gamma^{(k)} = \nabla l(\theta^{(k+1)}) - \nabla l(\theta^{(k)})$. Nach Fletcher (2000) empfiehlt sich die Einheitsmatrix I für die Wahl der initialen Matrix $H^{(0)}$. Die Matrix H_{BFGS} ist in jedem Iterationsschritt positiv definit, so dass der Funktionswert l nicht größer werden kann und der Aufwand zur Berechnung der Definitheit entfällt.

3.3.2 Monte-Carlo-Simulation

Eine Trajektorie ist ein realisierter Pfad eines stochastischen Prozesses und unterliegt deshalb zufälligen Schwankungen. Dies liegt vor allem an den Parametern, die aus den zugrundeliegenden Daten geschätzt werden. Der von Iacus (2008) beschriebene Monte-Carlo-Algorithmus ist eine Technik, um die Varianz der entsprechenden Pfade zu reduzieren.
Gegeben sei ein zeit-diskreter stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ und $t^* \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Für den Zeitpunkt t^* wird dann gemäß der Verteilung der Zufallsvariable X_{t^*} ein Wert x_{t^*} gezogen. Seien folglich $x_{t^*;1}, ..., x_{t^*;n}$ Beobachtungen, die aus der Verteilung von X_{t^*} gezogen werden. Dann kann der Erwartungswert

$$E(X_{t^*}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{t^*;i} = \bar{x}_{t^*}$$

über das arithmetische Mittel geschätzt werden. Ist der Umfang der Stichprobe $x_{t^*;1}, ..., x_{t^*;n}$ hinreichend groß, dann greift der Zentrale Grenzwertsatz und es folgt für $|E(X_{t^*})| < \infty$, dass

$$\bar{x}_{t^*} \xrightarrow{\mathrm{d}} N\left(E(X_{t^*}), \frac{1}{n}Var(X_{t^*})\right).$$

Des Weiteren ist es zudem möglich, punktweise Konfidenzintervalle zu konstruieren. Ein solches $(1-\alpha)\cdot 100\%$-Konfidenzintervall für den Zeitpunkt t ist

$$K(1-\alpha) = \left[\bar{x}_t - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_t^2}{n}}, \bar{x}_t + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_t^2}{n}}\right] \text{ mit } \alpha \in (0,1),$$

wobei $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung ist und $\hat{\sigma}_t^2$ der Stichprobenvarianz von $x_{t;1}, ..., x_{t;n}$ mit Stichprobengröße n entspricht.

4 Datenauswertung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Anwendung der im vorherigen Kapitel vorgestellten Methoden. Für die Berechnungen und die Erstellung der Abbildungen wird die freie Statistiksoftware R (R Core Team, 2012) verwendet. Zudem werden Funktionen aus dem Paket sde (Iacus, 2009) angewandt.

4.1 Deskriptive Auswertung

Um einen ersten Eindruck über die zur Verfügung stehenden Daten zu bekommen, wird vorab eine deskriptive Auswertung durchgeführt. Ein wichtiges Merkmal ist hierbei die Pfadlänge der Risse, da diese im späteren Verlauf der Analyse ein Maß für die Größe eines Rissclusters sein wird. Abbildung 4.1 zeigt für Stahlprobe 10 die Boxplots der beobachteten Pfadlängen zu den Zeitpunken $0, 10000, 20000, 30000, 40000$ und 44000. Hierbei ist zu beobachten, dass die Boxen mitsamt der oberen Whiskers über die einzelnen Zeitpunkte hinweg eine ähnliche Größe haben und relativ nahe beim Wert 0 liegen. Aufgrund von extremen Ausreißern ist dennoch eine Zunahme der Streuung in den Daten mit steigender Anzahl an Zug-Druck-Experimenten zu beobachten. Die Verteilung der Pfadlänge scheint daher für diese sechs Zeitpunkte linkssteil zu sein. Einen ähnlichen Schluss lassen die Boxplots der übrigen 23 Zeitpunkte in Abbildung A.1 auf Seite 63 im Anhang zu. Einen Eindruck über eine genauere Häufigkeitsverteilung der Pfadlängen zu den einzelnen Zeitpunkten kann anhand von zugehörigen Maßzahlen beurteilt werden. Tabelle 4.1 gibt die Quartile, das arithmetische Mittel, das Maximum und die Anzahl an beobachteten Pfadlängen für ausgewählte Zeitpunkte an. Eine Darstellung der Häufigkeitsverteilung zu allen Zeitpunkten ist in Tabelle B.1 auf Seite 65 im Anhang zu finden. Anhand dieser Werte kann ebenfalls für alle Zeitpunkte eine linkssteile Verteilung unterstellt werden, da die arithmetischen

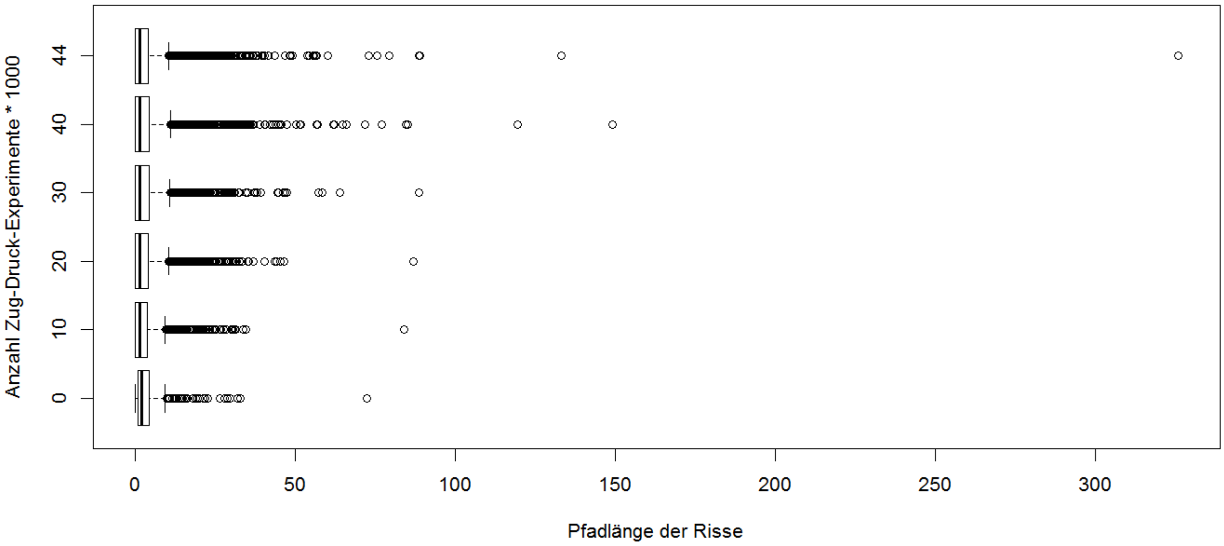

Abbildung 4.1: Boxplots für die Pfadlängen der Risse von Stahlprobe 10 zu den Zeitpunkten $0, 10000, 20000, 30000, 40000$ und 44000

Mittel für alle betrachteten Zeitpunkte deutlich größer als die entsprechenden Mediane sind. Des Weiteren gilt für jeden Zeitpunkt, dass ein Risspfad im Minimum lediglich aus einem Datenpunkt besteht und mindestens 75% der Risse eine Pfadlänge von unter fünf Einheiten haben. Im Maximum weisen die jeweils größten Risscluster eine Pfadlänge von mindestens 70 Einheiten auf. Somit scheint lediglich ein kleiner Anteil aller beobachteten Risse eine überdurchnittlich große Pfadlänge zu haben. Zudem kann anhand der Anzahl an beobachteten Rissen festgestellt werden, dass diese mit fortlaufenden Zeitpunkten tendenziell steigen. Ein

Tabelle 4.1: Maßzahlen zu den Pfadlängen in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	1. Quartil	Median	Arith. Mittel	3. Quartil	Maximum	Anzahl an Risse
0	1.00	2.00	3.73	4.41	72.57	432
1000	0.00	2.00	3.78	3.83	73.83	508
2000	0.00	1.41	3.22	3.41	74.25	582
3000	0.00	1.41	2.70	3.41	84.84	1328
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
39000	0.00	1.41	3.68	4.41	126.00	8356
40000	0.00	1.41	3.61	4.41	149.20	8184
42000	0.00	1.41	3.15	3.83	113.60	4940
44000	0.00	1.41	3.44	4.24	325.80	7217

leicht sinkender Wert ist zwischen den Zeitpunkten 13000 und 14000, 19000 und 20000, 350000 und 37000 sowie 39000 und 40000 zu erkennen. Die Anahl der Risse fällt jedoch verhältnismäßig stark zwischen den Zeitpunkten 40000 und 42000 ab. Eine mögliche Ursache dafür wäre, dass von einem früheren zu einem späteren Zeitpunkt der Grad der Unschärfe in einem Bild zunimmt und somit Risse im Zuge der Risserkennung übersehen werden.
Im Bezug auf Stahlprobe 31 ist hinsichtlich der Boxplots in Abbildung A.2 auf Seite 64 im Anhang und der zugehörigen Kennzahlen in Tabelle B.2 auf Seite 66 im Anhang dieselbe Interpretation für die Verteilung der Pfadlängen möglich. Bezüglich der zeitlichen Entwicklung der Anzahl an beobachteten Pfadlängen von Stahlprobe 31 ist mittels der Werte aus Tabelle 4.2 zu sehen, dass die Anzahl an erkannten Risse mit jedem neuen Zeitpunkt zunimmt. Zudem werden, im Vergleich zu Stahlprobe 10, tendenziell mehr Risse in Stahlprobe 31 erkannt.

Tabelle 4.2: Zeitliche Entwicklung der Anzahl an beobachteten Risse in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	Anzahl an Risse	Zeitpunkt	Anzahl an Risse	Zeitpunkt	Anzahl an Risse
0	388	5000	4842	10000	9019
1000	426	6000	5137	12000	9892
2000	981	7000	6842	14000	11510
3000	1650	8000	7957	16000	11325
4000	2990	9000	8213	18000	12449

4.2 Zurückverfolgung von Risspfaden

Im Fokus dieses Abschnitts liegt die Weiterverarbeitung der zugrundeliegenden Daten. Hierzu wird im ersten Unterabschnitt zunächst ein mathematisches Modell erstellt. Mit dessen Hilfe kann im zweiten Unterabschnitt eine Definition zur Risserkennung gegeben werden. Im dritten Unterabschnitt steht die Beschreibung eines Algorithmus im Vordergrund, der für ein festgelegtes Risscluster dessen Ursprungscluster zeitlich zurückverfolgt. Anschließend wird im vierten Unterabschnitt beschrieben, wie die Pfadlängen, die als Repräsentant für die gefunden Risscluster dienen, zu einer Risswachstumskurve zusammengefasst werden. Abschließend ist eine Fehleranalyse zur Erkennung der Ursachen für falsch berechnete Risswachstumskurven Gegenstand des fünften Unterabschnitts.

4.2.1 Festlegung des Modells

Gegeben sei für festgelegte Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$ und $M, N \in \mathbb{N}$ ein Graustufenbild R mit $M \times N$ Pixeln. Dann bezeichnet die Zufallsvariable $R_t(i,j)$ mit $i = 1, ..., N$ und $j = 1, ..., M$ ein Pixel in der $(M \times N)$-Matrix von R zum Zeitpunkt t mit Spaltenindex i und Zeilenindex j. Für jedes Pixel gibt $R_t(i,j)$ die Farbtiefe im zugehörigen Graustufenbild an und es gilt $R_t(i,j) \in \{0, 1, ..., 2^h - 1\}$ mit $h \in \mathbb{N}$. Es gilt für die Realisation der Extremwerte, dass

$$r_t(i,j) = \begin{cases} 2^h - 1 & \text{, falls Farbe des Pixels } (i,j) \mathrel{\hat{=}} \text{ Weiß} \\ 0 & \text{, falls Farbe des Pixels } (i,j) \mathrel{\hat{=}} \text{ Schwarz} \end{cases}$$

ist.

4.2.2 Definition Risserkennung

Sei $R_t(i,j) \in \{0, 1, ..., 2^h - 1\}$ mit $h \in \mathbb{N}$ der Graustufenwert einer Bildaufnahme nach $t \in \mathbb{N}_0$ Belastungswechsel in der i-ten Bildzeile und j-ten Bildspalte mit $i = 1, ..., M$ bzw. $j = 1, ..., N$. Des Weiteren sei für jeden Bildpunkt ein Schwellenwert als skalarer Punkt $k(i,j) \in \{0, ..., 2^h - 1\}$ gegeben. Dann gehört der Punkt $r_t(i,j)$ mit Schwellenwert $k(i,j)$ zu einem Riss, falls

$$r_t(i,j) < k(i,j)$$

für $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$ und für alle $t \in \mathbb{N}$.

4.2.3 Algorithmus

Gegeben sei eine Folge von Graustufenbildern $R_{t_1}, ..., R_{t_n}$ zu festgelegten Zeitpunkten $0 = t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$. Weiterhin bezeichne $R_{t_k}[j]$ das j-te Risscluster des Graustufenbildes zum Zeitpunkt t_k mit $j = 1, ..., m_k$. Dann findet der Algorithmus zur Erstellung von Risswachstumskurven diejenigen Risscluster, welche Vorgänger eines im Vorfeld festgelegten Rissclusters aus R_{t_n} sind. Dieses Verfahren wird nun im Folgenden, unter Einbeziehung der zugrundeliegenden Daten, vorgestellt. Zusätzlich dient das Flussdiagramm in Abbildung 4.2

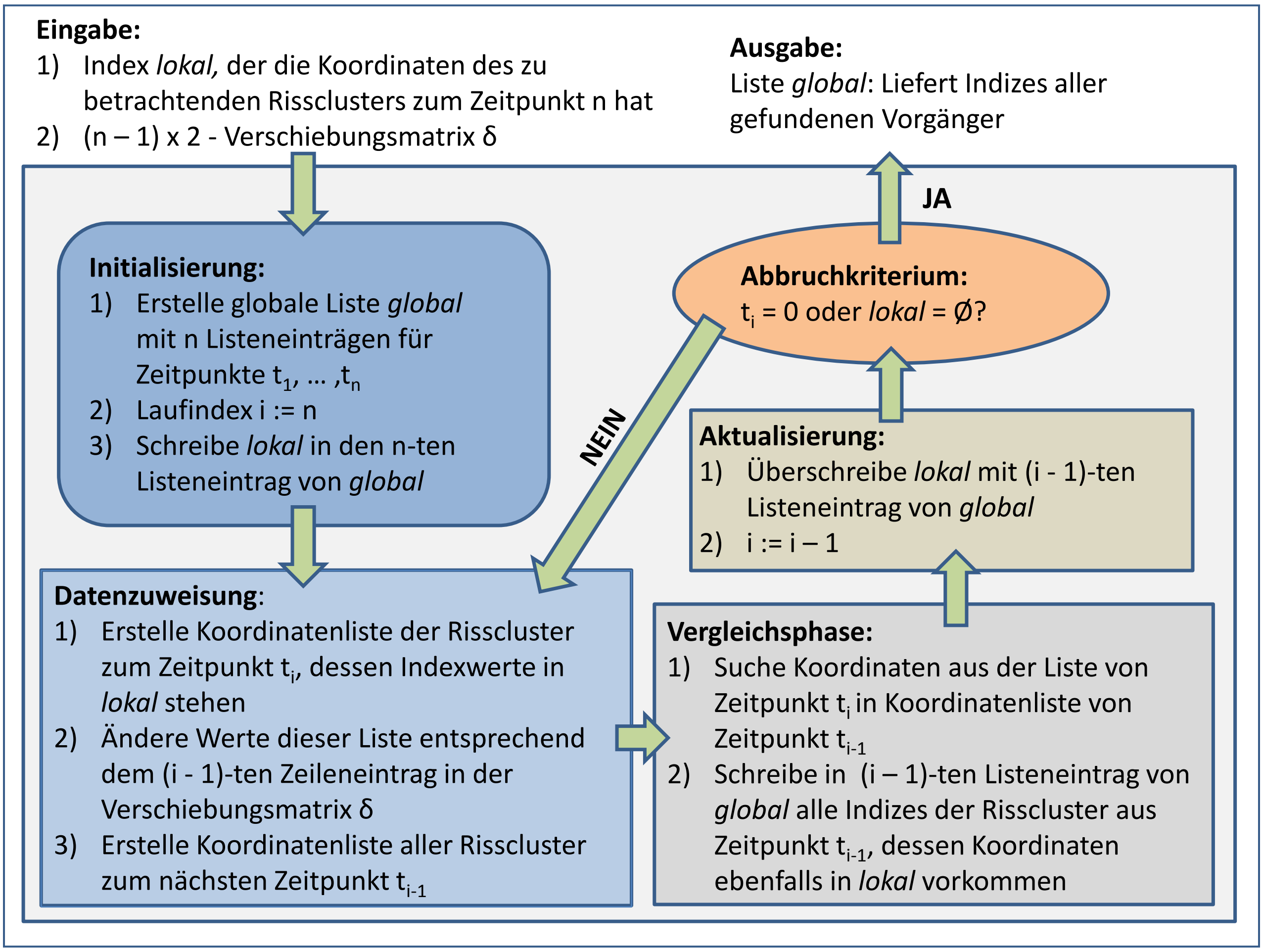

Abbildung 4.2: Bildliche Darstellung des Algorithmus zum Zurückverfolgen von Rissen

sowie der Pseudo-Code in Algorithmus 1 dazu. die einzelnen Schritte ebenfalls visuell und programmiertechnisch nachzuvollziehen.

In einem Vorverarbeitungungsschritt werden zunächst die einzelnen Listen $Crackclusters$ entsprechend ihrer zeitlichen Reihenfolge in die Listeneinträge einer globalen Liste $Crackclusters.all$ geschrieben. Somit steht im i-ten Listeneintrag der globalen Liste $Crackcluster.all$ eine Liste $Crackclusters$, welche die Koordinaten der Risscluster zum Zeitpunkt t_i enthält.

Der Algorithmus erwartet nun als **Eingabe** einen Index $lokal$. Dieser entspricht dem Index des Rissclusters zum Zeitpunkt t_n, für den Vorgänger zu den Zeitpunkten t_{n-1} bis t_1 gefunden werden sollen. Des Weiteren wird eine vom Anwender festgelegte $(n-1) \times 2$ - Verschiebungsmatrix δ übergeben. Anschließend kann das System **initialisiert** werden, indem ein Laufindex i auf den Wert n gesetzt und eine Liste $global$ mit n Listeneinträgen erstellt wird. Zudem

Algorithmus 1: Zurückverfolgung eines Risses

Daten: $R_{t_1}, ..., R_{t_n}$: Folge von Graustufenbildern zu Zeitpunkten $0 = t_1 \leq ... \leq t_n = T$;
$R_k[j]$: j-ter Risscluster im k-ten Graustufenbild mit $j = 1, ..., m_k$;
δ_i: i-te Zeile einer $(n-1) \times 2$ - Verschiebungsmatrix.
Ergebnis: Ermittelt für einen angegebenen Riss dessen Vorgänger.
Sei *lokal* ein beliebiger Index eines Rissclusters zum Graustufenbild R_{t_n};
Starte Laufindex: $i := n$;
Definiere leere Liste *global* mit n Unterlisten;
$global[n] \leftarrow lokal$;
while $t_i > 0 \land lokal \neq \emptyset$ **do**
  Verschiebe: $R_{t_i}[lokal] \leftarrow R_{t_i}[lokal] + \delta_{i-1}$;
  foreach *Listeneinträge* $R_{t_{i-1}}[j]$ *in* $j = 1, ..., m_{t-1}$ **do**
    Suche Koordinaten $R_{t_i}[lokal]$ in $R_{t_{i-1}}[j]$;
    if *Koordinaten in* $R_{t_{i-1}}[j]$ *gefunden* **then**
      Erweitere $global[i-1]$ um den Index j;
    end
  end
  Überschreibe: $lokal \leftarrow global[i-1]$;
  Aktualisiere Laufindex: $i \leftarrow i - 1$;
end
Ausgabe: Indexliste *global*

bekommt der n-te Listeneintrag von *global* den Wert von *lokal* zugewiesen. Die Liste *global* speichert somit in ihrem n-ten Listeneintrag den Indexwert des Ursprungsclusters aus dem n-ten Listeneintrag von *Crackclusters.all*. Daraufhin werden im Zuge der **Datenzuweisung** zwei Listen erzeugt. Die erste Liste $R_{t_i}(lokal)$ beinhaltet alle Koordinaten der Listeneinträge von *Crackclusters.all* zum Zeitpunkt n entsprechend der Werte in *lokal*. Die zweite Liste enthält alle Risscluster $R_{t_{i-1}}[1...m_{t_{i-1}}] := R_{t_{i-1}}[1], ..., R_{t_{i-1}}[m_{t_{i-1}}]$ zum Zeitpunkt t_{i-1}. Da im Zuge der Datenerstellung die Bildaufnahmen verschoben sind, muss der $(i-1)$-te Zeileneintrag der Verschiebungsmatrix δ zu allen Koordinaten von $R_{t_i}(lokal)$ addiert werden. Das Ziel in der anschließenden **Vergleichphase** ist es, Koordinaten aus $R_{t_i}(lokal)$ in $R_{t_{i-1}}[1...m_{t_{i-1}}]$ zu finden. Dies erfolgt mittels paarweisen Vergleichs der Koordinaten. Falls eine Koordinatenübereinstimmung gefunden wird, wird der zugehörige Index des Rissclusters aus $R_{t_{i-1}}[1...m_{t_{i-1}}]$ dem $(i-1)$-ten Listeneintrag von *global* hinzugefügt. Somit beinhaltet der $(i-1)$-te Listeneintrag von *global* nach Abschluss aller paarweisen Vergleiche alle Indizes, die in dem $(i-1)$-ten Listeneintrag von *Crackclusters.all* den Listeneinträgen entsprechen, in denen mindestens ein Koordinatenpaar aus $R_{t_i}(lokal)$ vorkommt. Anschließend beginnt die **Aktualisierung**.

Hierbei wird die Liste *lokal* mit der $(i-1)$-ten Unterliste von *global* überschrieben und i um den Wert 1 verringert. Ersteres bewirkt, dass die alten Indizes durch die erhaltenen Indizes ausgetauscht werden. Die zweite Zuweisung führt dazu, dass der Zeitpunkt aktualisiert wird. Nach der Aktualisierung werden die **Abbruchkriterien** geprüft. Ein Abbruchkriterium ist erfüllt, falls der Zeitpunkt t_i den Anfangsstatus $t_1 = 0$ erreicht hat oder die Liste *lokal* keine Indizes enthält. In diesem Fall würde entweder kein früherer Zeitpunkt mehr existieren, in dem Vörgänger gesucht werden können, oder es wird kein Risscluster im aktuellen Durchlauf gefunden. Ist keines dieser beiden Kriterien erfüllt, erfolgt eine erneute **Datenzuweisung**. Das heißt, es werden wiederum zwei Koordinatenlisten zu den Zeitpunkten t_i bzw. t_{i-1} erstellt und mittels des $(i-1)$-ten Zeileneintrages der Verschiebungsmatrix korrigiert, in der **Vergleichsphase** nach Übereinstimmungen anhand der Koordinaten in den beiden Listen gesucht, Variablen aktualisiert sowie die Abbruchkriterien überprüft. Falls hingegen eines der beiden Abbruchkriterien erfüllt ist, wird der Algorithmus beendet und die Liste *global* als Endresultat **ausgegeben**. Diese Liste enthält für jeden betrachteten Durchlauf eine Menge an Indizes, welche auf die als Vorgänger ermittelten Risscluster in der entsprechenden Liste von $Crackclusters.all$ des zugehörigen Zeitpunktes verweisen.

4.2.4 Erstellung der Risswachstumskurven

Im Folgenden wird anhand der Zurückverfolgung eines Beispielrisses die Arbeitsweise des Algorithmus verdeutlicht. Als Beispiel wird der größte Endriss von Stahlprobe 10 betrachtet. Die entsprechenden Koordinaten befinden sich in dem 4915. Listeneintrag von $Crackclusters$ zum Zeitpunkt 44000. Mit der zugehörigen Verschiebungsmatrix werden, auf Basis dieses Indizes, insgesamt 22 Risscluster als Vorgänger im Zeitpunkt 42000 gefunden, so dass die zugehörigen Indizes in einer Liste gespeichert werden. Anschließend werden über diese 22 Indizes insgesamt 12 Risscluster im Zeitpunkt 40000 anhand der übereinstimmenden Koordinaten entdeckt. Die im weiteren Verlauf des Algorithmus gefundenen Risscluster können Tabelle B.3 auf Seite 66 im Anhang entnommen werden. In diesem Beispiel stoppt der Algorithmus, sobald der Vergleich der Koordinaten zwischen den Zeitpunkten 2000 und 1000 abgeschlossen ist, da für den früheren Zeitpunkt keine Vorgänger mehr gefunden werden können.

Insgesamt ist zu beobachten, dass die Anzahl an Rissclustern, über die Zeitpunkte betrachtet,

sowohl sinken als auch steigen kann. Ersteres ist dadurch zu erklären, dass zwei oder mehrere Risscluster zu einem späteren Zeitpunkt zu einem großen Risscluster verschmelzen. Zweiteres tritt ein, falls zusätzliche Risse erst zu einem späten Zeitpunkt entstehen.
Nachdem der Algorithmus terminiert ist, werden die Indizes durch die Pfadlänge des zugehörigen Rissclusters ersetzt. In den zugrundeliegenden Daten ist dies über Liste *Cracks* möglich, da die Spalteneinträge dieser Matrix mit den Listeneinträgen in *Crackclusters* zum jeweiligen Zeitpunkt zusammengehören. Um eine Risswachstumskurve anhand der Pfadlänge zu erstellen, muss ein repäsentativer Wert für die Pfadlänge zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmt werden. In dieser Ausarbeitung wird der Wert des größten Risspfades als Repräsentant gewählt, wenngleich andere Vorgehensweisen ebenfalls sinnvoll wären. Die aus dem Beispielriss resultierende Risswachstumskurve ist Abbildung 4.3 unten rechts zu entnehmen. Zusätzlich sind fünf rote Punkte zu einigen Zeitpunkten eingezeichnet. Diese Punkte deuten auf die Zeitpunkte hin, zu denen ein Bildausschnitt des betroffenen Risses von Stahlprobe 10 ebenfalls in derselben Abbildung zu sehen ist. In diesen Graphiken ist ein Risscluster ein Vorgänger des größten Endrisses, falls die Gerade zwischen dem Anfangs- und Endpunkt eines

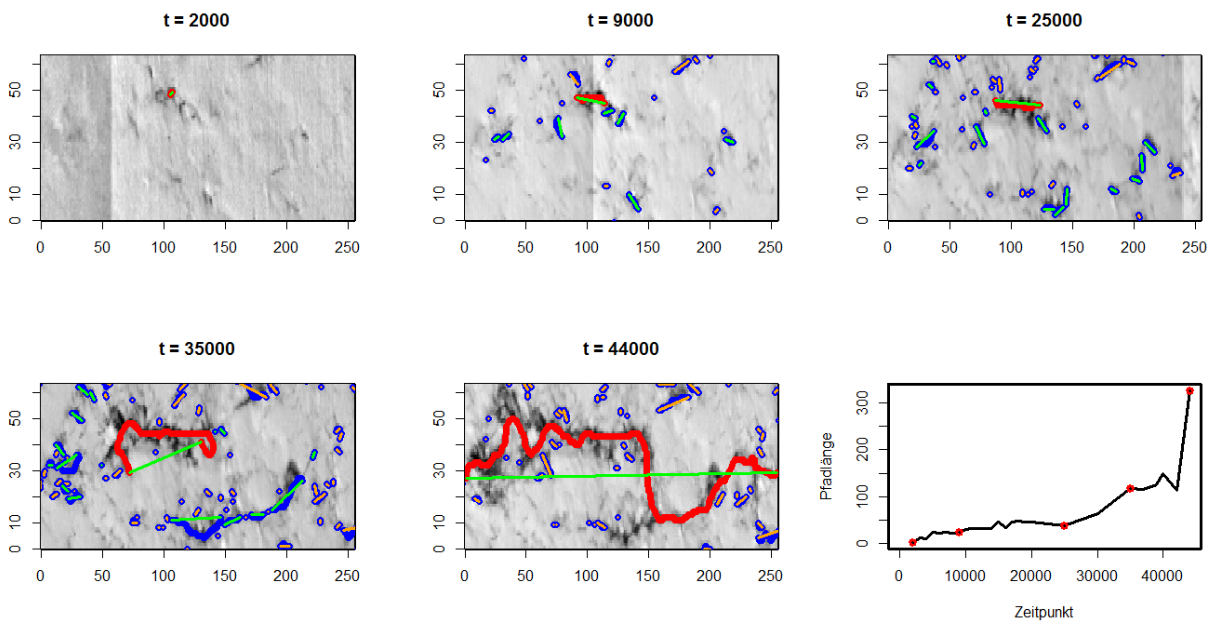

Abbildung 4.3: Bildliche Darstellung des zurückverfolgten Rissclusters mit größten Pfadlänge zum Zeitpunkt 44000 in Stahlprobe 10 zu den Zeitpunkten 2000, 9000, 25000, 35000 und 44000 mit zugehöriger Risswachstumskurve

Risspfades grün ist. Andernfalls ist die Gerade orange dargestellt. Ebenfalle sind, bis auf einen, alle Pfade blau eingefärbt. Der rote Risspfad zeigt auf das Risscluster, das als Repräsentant der Risswachstumskurve zum jeweiligen Zeitpunkt dient.

4.2.5 Fehleranalyse

Bedingt durch die Qualität der Graustufenbilder ist es möglich, dass Risswachstumskurven fehlerhaft berechnet werden. Ein Anzeichen dafür wäre, dass der Wert in einer Trajektorie von einem früheren zu einem späteren Zeitpunkt sinkt. Ein solches Phänomen tritt zum Beispiel

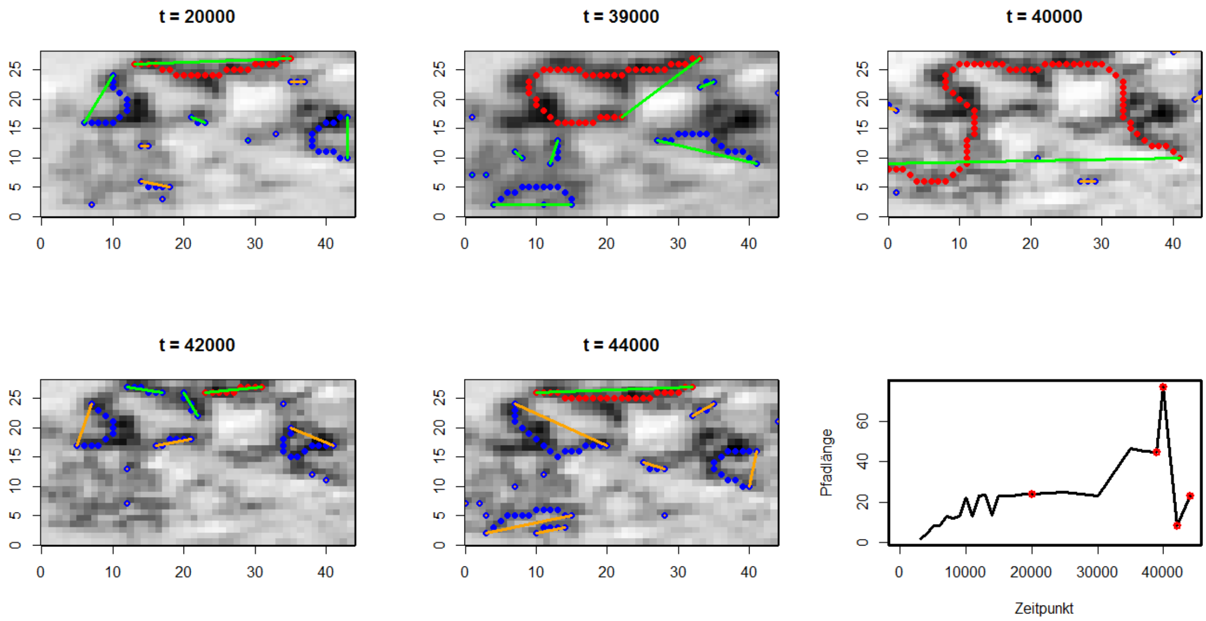

Abbildung 4.4: Beispiel für eine fehlerhafte Berechnung der Risswachstumskurve aufgrund möglicher unterschiedlicher Auflösungen der Bildaufnahmen in Stahlprobe 10 zu den Zeitpunkten 20000, 39000, 40000, 420004 und 44000 mit zugehöriger Risswachstumskurve

ebenfalls in der Risswachstumskurve des Risses von Stahlprobe 10 in Abbildung 4.3 aus dem vorherigen Unterabschnitt von Zeitpunkt 40000 zu 42000 auf. In diesem Fall sinkt der Wert der Pfadlänge des größten Risses von 149.23 auf einen Wert von 113.6 Einheiten. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre die schlechte Qualität der Aufnahmen, da somit die Identifizierung der Größe eines Risscluster schwieriger wird als bei einem Foto mit besseren Konturen.

Eine weitere mögliche Ursache für diese Schwankungen in Trajektorien ist den Bildausschnitten in Abbildung 4.4 zu entnehmen. Diese zeigen gefundene Risscluster eines konkreten Risses zu den

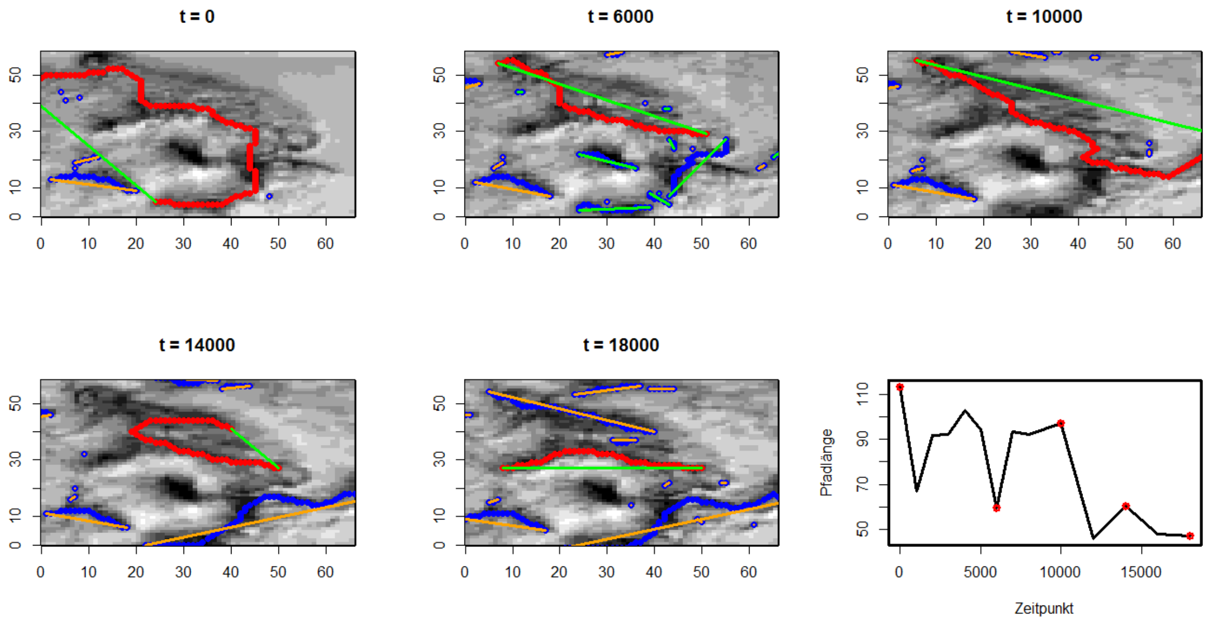

Abbildung 4.5: Darstellung einer fälschlicherweise als Riss identifizierten extremen Verunreinigung in Stahlprobe 31 zu den Zeitpunkten $0, 6000, 10000, 14000$ und 18000

Zeitpunkten 20000, 39000, 40000, 42000 und 40000 sowie die zugehörige Risswachstumskurve. Dort ist zu erkennen, dass die Trajektorie vom Zeitpunkt 40000 zu den nächsten beiden Zeitpunkten ein starkes Gefälle im Bezug auf die maximale Pfadlänge hat. Dies könnte daran liegen, dass der Schwellenwert zu den letzten beiden Zeitpunkten womöglich zu niedrig gewählt wird. Dies hat den Effekt, dass ursprünglich zusammenhängende Risse als zwei oder mehrere kleine Risse angesehen werden. Ebenso wäre es auch theoretisch möglich, dass durch einen zu hohen Schwellenwert zwei Risse fälschlicherweise als ein zusammenhängender Riss betrachtet werden. Letzterer Fall wäre in diesem Beispiel jedoch relativ unwahrscheinlich, da die als Repräsentanten gewählten Risspfade zum Zeitpunkt 20000 sowie 39000 wesentlich länger sind als die Pfadlängen zu den letzten beiden Zeitpunkten, die als Repräsentanten gewählt werden. Ebenfalls sind Verunreinigungen auf der Oberfläche des Materials eine mögliche Ursache für die Berechnung von fehlerhaften Risswachstumskurven. In Abbildung 4.5 ist zu den Zeitpunkten 0, 6000, 10000, 14000 und 18000 ein extrem verunreinigter Bereich von Stahlprobe 31 sowie die zugehörige Risswachstumskurve dieses sogenannten 'Kraters' zu sehen. Anhand der

Risswachstumskurve ist zu erkennen, dass die Pfadlänge mit steigender Anzahl an Zug-Druck-Experimente kleiner wird. Ein möglicher Grund dafür wäre, dass dies auf eine Herabsetzung des Schwellenwertes zu einem späteren Zeitpunkt zurückzuführen ist. Dies deuten ebenfalls die Graphiken zu den Zeitpunkten 14000 und 18000 an.

4.3 Simulationsergebnisse

Das Ziel ist es, zu den beobachteten Wachstumskurven passende Trajektorien eines Vasicek-Prozesses zu simulieren. Dazu wird auf Basis der Beobachtungen die Maximum-Likelihood-Schätzung der Parameter durchgeführt. Mit diesen Parametern können dann die Trajektorien der zugehörigen Prozesse simuliert werden. Um numerische Fehler zu vermeiden, wird das betrachtete Zeitintervall auf $[0, 1]$ transformiert. Dies bewirkt, dass der Abstand zwischen zwei Beobachtungen verkleinert wird, jedoch das Verhältnis der Abstände zueinander unverändert bleibt.

Von zentraler Bedeutung ist die Beschreibung der Rissentwicklung von Pfadlängen mit überdurchschnittlicher Größe, da größere Risse möglicherweise einen größeren Einfluss auf den Schädigungsgrad eines Materials haben. Daher werden im Folgenden für Stahlprobe 10 und 31 jeweils nur diejenigen hundert Risswachstumskurven genauer untersucht, deren Risspfade zum jeweils spätesten Beobachtungszeitraum zu den hundert größten Risspfaden gehören. Diese Beobachtungen sind für Stahlprobe 10 den Tabellen B.4 bis B.13 ab Seite 67 im Anhang zu entnehmen. Eine Auflistung der diskretisierten Werte zu den betrachteten Risswachstumskurven für Stahlprobe 31 sind in den Tabellen B.14 bis B.23 ab Seite 77 im Anhang dargestellt. Die Spaltenbezeichnung gibt den Rang der Beobachtungsreihe einer Wachstumskurve entsprechend der Pfadlänge zum spätesten Zeitpunkt an.

4.3.1 Einfluss der Modellparameter

Bevor die Simulationsergebnisse hinsichtlich ihrer Anpassung an die Daten beurteilt werden können, empfiehlt es sich, im Vorfeld einen Eindruck über den Einfluss der zu schätzenden Modellparameter auf den Verlauf einer Trajektorie zu gewinnen. Abbildung 4.6 zeigt hierzu eine Derstellung der Ergebnisse dieser kurzen Simulationstudie. Diese veranschaulicht typische Verläufe von Trajektorien für negative und positive Werte von θ_1 und θ_2 sowie für unterschiedliche nicht-negative Werte von θ_3. Hierbei wird in der linken Graphik für unterschiedliche Werte von θ_1 und θ_2 ersichtlich, dass der Trend eines erzeugten Pfades über den Parameter θ_1 gesteuert wird. Dementsprechend führt ein negativer Wert tendenziell zu sinkenden und ein positiver Parameterwert zu steigenden Funktionswerten. Wird hingegen der Einfluss von

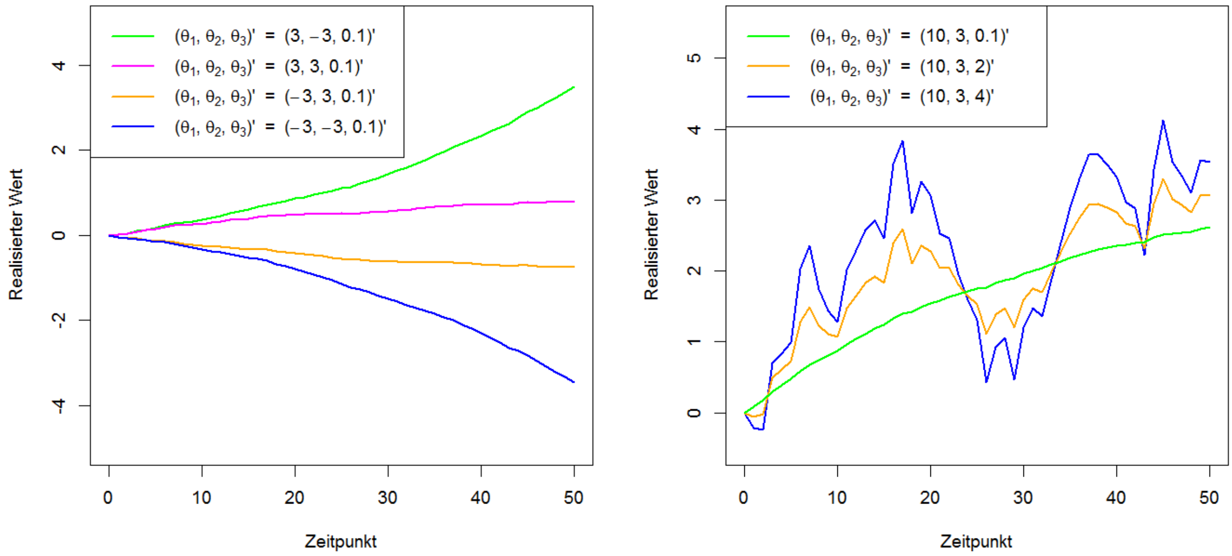

Abbildung 4.6: Verläufe von Trajektorien mit unterschiedlicher Parametrisierung. Links: Effekt von positiv und negativ geschätzten Werten für θ_1 und θ_3. Rechts: Einfluss von θ_3 auf den Verlauf einer Trajektorie

θ_2 untersucht, kann für ein negatives θ_2 tendenziell ein explosiver Verlauf des simulierten Pfades beobachtet werden. Dies bedeutet, dass der Prozess entsprechend der Realisation von θ_1 entweder ausschließlich steigt oder fällt. Ist hingegen der Wert von θ_2 positiv, wird zu einem gewissen Zeitpunkt einen Funktionswert erreicht und der Prozess oszilliert anschließend um diesen Bereich. Es scheint sich somit um einen stationären Prozess zu handeln. Der Einfluss von θ_3 auf den Verlauf des Prozesses lässt sich anhand der rechten Graphik in Abbildung 4.6 erklären. In diesem Fall werden θ_1 und θ_2 konstant gehalten, während θ_2 variiert wird. Hierbei ist zu beobachten, dass ein Wert von θ_3 nahe bei 0 zu einer verhältnismäßig kleiner Schwankung der Trajektorie führt. Die Volatilität nimmt mit wachsendem θ_3 zu. Diese Beobachtung lässt

sich ebenfalls direkt über den Aufbau der stochastischen Differentialgleichung ableiten, da der Parameter θ_3 lediglich ein Faktor vor dem stochastischen Integral ist. Im Falle $\theta_3 = 0$ ergibt sich daher ein deterministischer Prozess.
Diese Beschreibung dient jedoch nur als grober Leitfaden. Eine allgemeine Aussage ist diesbezüglich nicht möglich, da es zwischen θ_1 und θ_2 zu Wechselwirkungen kommen könnte.

4.3.2 Resultate mit exakter Likelihood-Inferenz

Der simulierte Pfad eines Vasicek-Prozesses dient dazu, anhand der beobachteten Werte, ebenfalls die unbeobachteten Werte dazwischen zu schätzen. Eine Bewertung aller hundert simulierten Prozesse für Stahlprobe 10 und 31 hinsichtlich ihrer Anpassung an die zugehörigen Risswachstumskurven wäre jedoch zu aufwendig. Daher werden im Folgenden lediglich spezielle Risswachstumskurven analysiert. Diese stehen repräsentativ für die Simulationsergebnisse anderer Risswachstumskurven, für die eine ähnliche Interpretation ableitbar ist.
Für die Beobachtungen aus Stahlprobe 10 mit der Spaltenbezeichnung 5 in Tabelle B.4 auf Seite 67 im Anhang ergibt eine Schätzung mittels der Maximum-Likelihood-Methode die Parameter $\theta_1 = 289.96, \theta_2 = 5.26$ sowie $\theta_3 = 55.49$. Die dadurch simulierten Trajektorien des zugehörigen Vasicek-Prozesses haben den Startzeitpunkt 3000, da dies dem frühesten beobachteten Zeitpunkt in der Risswachstumskurve entspricht. Der initiale Wert für die Pfadlänge ist 3 und entspricht ebenfalls dem Wert der zugrundeliegenden Risswachstumskurve des betrachteten Risses. Die geschätzten Werte für θ_1 und θ_2 sind positiv. Demzufolge wird ein stationärer Prozess simuliert. Die Graphiken in Abbildung 4.7 zeigen, in türkis gekennzeichnet, fünf bzw. hundert simulierte Trajektorien dieses Prozesses. Zusätzlich gibt die rote Kurve den gemitteltne Pfad dieser einzeln generierten Pfade an. In blau sind die zugehörigen punktweise berechneten 95%-Konfidenzintervalle eingezeichnet und geben für jeden Zeitpunkt ein Intervall an, in dem die wahren Werte mit 95% Wahrscheinlichkeit enthalten sind. Anhand der fünf einzeln dargestellten Trajektorien ist davon auszugehen, dass die simulierten Pfade wegen θ_3 eine relativ hohe Volatilität zu haben scheinen. Die dadurch entstehende rote Trajektorie ist daher nur mit Vorsicht zu interpretieren. In diesem Fall scheint dieser Pfad jedoch eine relativ gute Anpassung an die beobachteten Daten zu haben, wenngleich dieser die Daten leicht unterschätzt. Wird hingegen die gemittelte Trajektorie über hundert einzeln generierten Trajektorien betrachten,

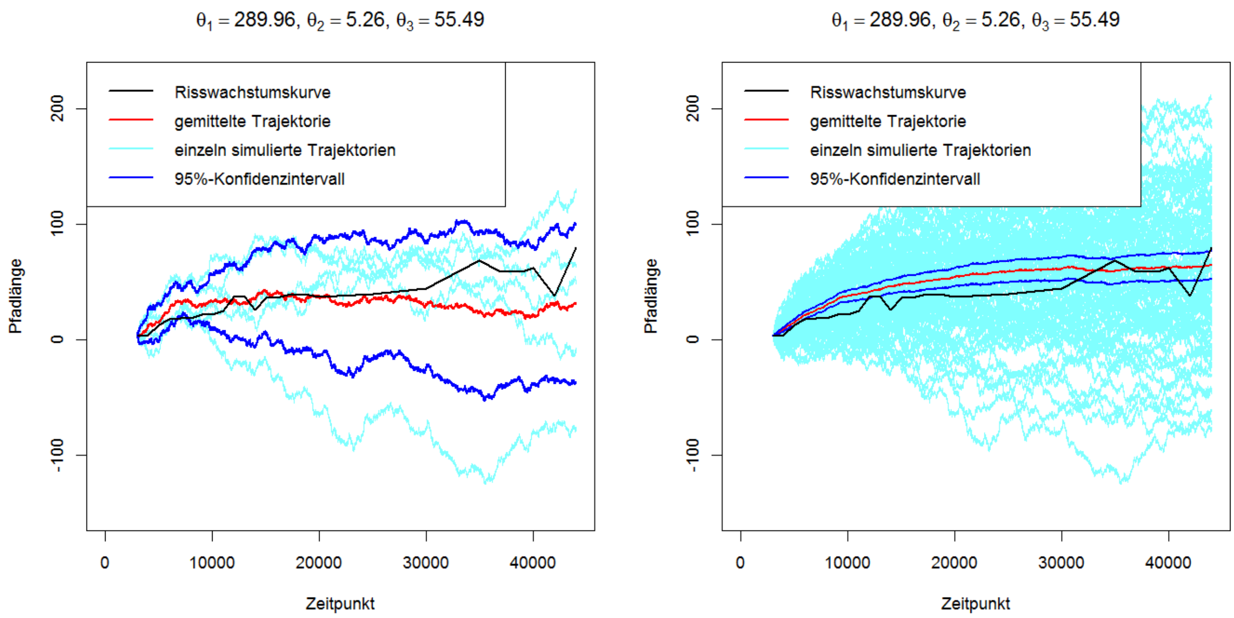

Abbildung 4.7: Vergleich zwischen gemittelten Trajektorien über fünf (links) und hundert (rechts) einzeln simulierte Pfade desselben Vasicek-Prozesses hinsichtlich der Anpassung an eine Risswachstumskurve aus Stahlprobe 10

werden die beobachteten Daten insgesamt leicht überschätzt. Jedoch ist eine vergleichsweise kleine Volatilität des gemittelten Pfades zu erkennen. Aufgrund der Simulationsergebnisse wird mittels des geschätzten Vasicek-Prozesses davon ausgegangen, dass zu späteren Zeitpunkten außerhalb des Beobachtungszeitraums tendenziell kein wesentliches Wachstum bezüglich der Pfadlänge auftritt. Im Hinblick auf die geschätzten Parameter für die Beobachtungen der übrigen 99 Risswachstumskurven in Stahlprobe 10, wird bei 94 Beobachtungsreihen ebenfalls ein positiver Wert für θ_1 und θ_2 mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Hierbei handelt es sich um die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 3, 4, 7 bis 13, 15 bis 25 sowie 27 bis 100 in den Tabellen B.4 bis B.13 ab Seite 67 im Anhang. Die zugehörigen Abbildungen sind in dem PDF-Dokument des beiliegenden Datenträgers mit dem Namen *SimErg.P10.Exakt.pospos.pdf* zu finden. Für den Großteil dieser Wachstumskurven scheinen die simulierten Pfade ebenfalls eine gute Anpassung an die beobachteten Daten zu haben. Diese Güte scheint jedoch abzunehmen, falls die Volatilität in den beobachteten Daten steigt. Dies zeigt sich anhand der simulierten Trajektorien in Abbildung 4.8. Die zugehörigen Risswachstumskurven entsprechen den Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 3 und 18 in Tabelle

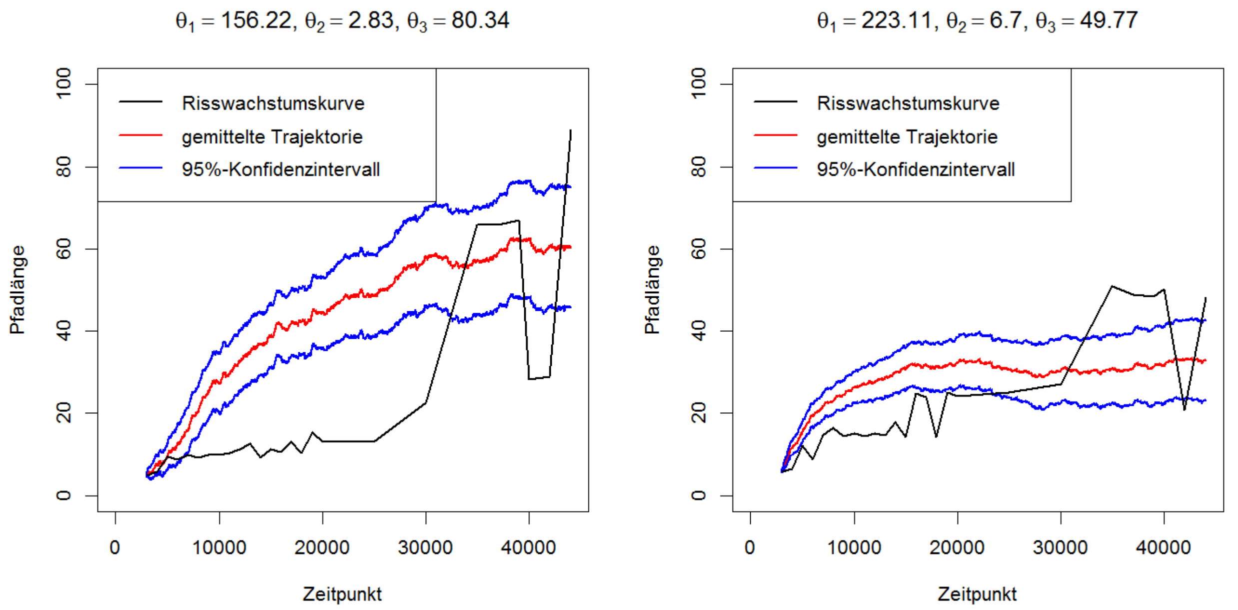

Abbildung 4.8: Darstellung von zwei Risswachstumskurven aus Stahlprobe 10 mit hoher Volatilität in den Daten, die über einen stationären Vasicek-Prozess beschrieben werden

B.4 und B.5 ab Seite 67 im Anhang. Die dargestellten Graphiken zeigen den gemittelten Pfad der simulierten Trajektorien mit zugehörigen punktweise berechneten 95%-Konfidenzintervallen. Die hohen Schwankungen in der linken Graphik könnten darauf zurückzuführen sein, dass zu den Zeitpunkten 40000 und 42000 deutlich kleinere Werte beobachtet werden als zum Zeitpunkt 30000. In der rechten Graphik ist ebenfalls eine hohe Schwankung in den beobachteten Daten zu erkennen. Jedoch scheint die Anpassung in diesem Fall besser zu sein. Insgesamt fällt auf, dass größtenteils die kleinsten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10 über einen stationären Vasicek-Prozess beschrieben werden. Eine Schätzung der Modellparameter für die Risswachstumskurven in Stahlprobe 31 liefert für 69 von 100 Risswachstumskurven positive Werte für θ_1 und θ_2. Hierbei handelt es sich um die Beobachtungsreihen mit den Spaltenbezeichnungen 10 bis 12, 15 bis 18, 20, 23, 24, 26, 27, 29 bis 32, 35, 37 bis 43, 45 bis 48, 53, 54, 56, 57, 59 bis 70, 73 bis 90 und 93 bis 99 in den Tabellen B.14 bis B.23 ab Seite 77 im Anhang. Abbildung 4.9 zeigt repräsentativ die zugehörigen Simulationsergebnisse für die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 11 und 15. Beide Risswachstumskurven werden wiederum über einen stationären Vasicek-Prozess beschrieben. Die linke Graphik lässt dieselbe Interpretation

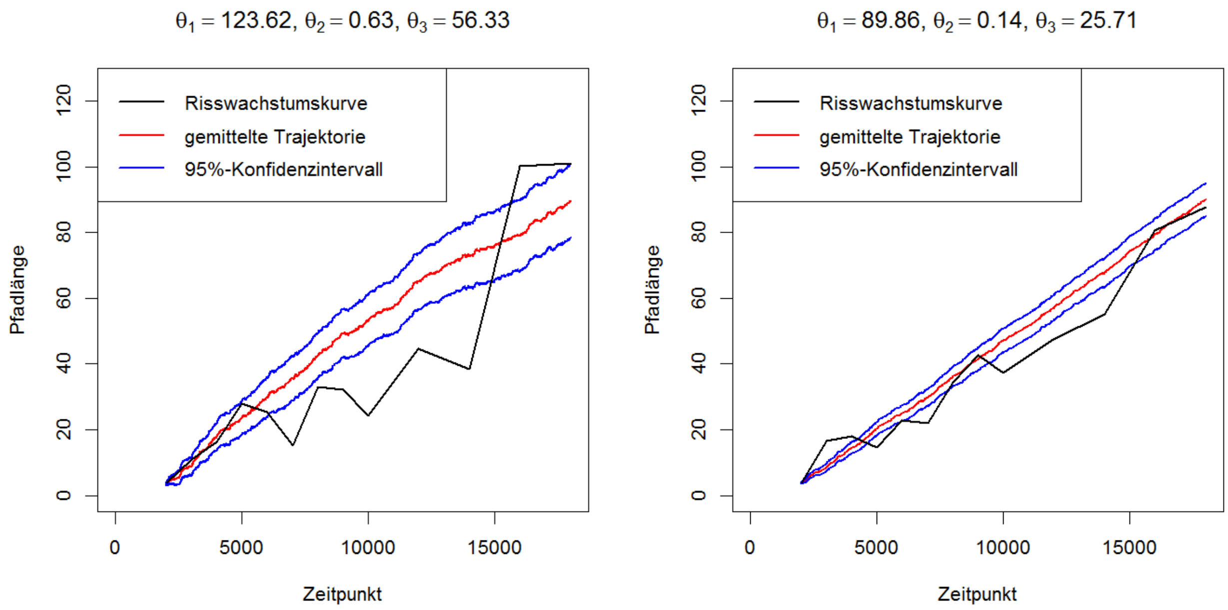

Abbildung 4.9: Risswachstumskurven aus Stahlprobe 31, die über einen schwach stationären Vasicek-Prozess beschrieben werden

zu wie bei den Simulationsergebnissen bezüglich der Daten von Stahlprobe 10 mit positiven Schätzwerten für θ_1 und θ_2. Hingegen beschreibt die gemittelte Trajektorie in der rechten Graphik einen schwach stationären Prozess, da der Wert von $\theta_2 = 0.14$ relativ nahe bei 0 liegt. Das beobachtete Zeitintervall in Stahlprobe 31 ist zudem kleiner als in Stahlprobe 10, so dass in diesem Fall ebenfalls ein explosiver Prozess die beobachteten Daten gut beschreiben könnte. Ähnliche Szenarien tauchen ebenfalls bei einigen Beobachtungsreihen in Stahlprobe 10 auf. Das PDF-Dokument mit dem Namen *SimErg.P31.Exakt.pospos.pdf* auf dem beiliegenden Datenträger zeigt die Simulationsergebnisse der Beobachtungen, die in Stahlprobe 31 ebenfalls über einen stationären Vasicek-Prozess beschrieben werden. Die Interpretation ist hierbei analog zu den Simulationsergebnissen für die Risswachstumskurven in Abbildung 4.9.

Für andere Risswachstumskurven liefert die Maximum-Likelihood-Schätzung ebenfalls einen positiven Wert für θ_1, jedoch einen negativen Wert für θ_2. Für die Risswachstumskurven in Stahlprobe 10 tritt dieser Fall lediglich bei zwei Beobachtungsreihen auf. Hierbei handelt es sich um die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 2 und 6 in Tabelle B.4 auf Seite 67 im Anhang. Eine Maximum-Likelihood-Schätzung liefert die Parameter $\theta_1 = 75.63, \theta_2 = -1.28$ und $\theta_3 = 68$ bzw. $\theta_1 = 54.2, \theta_2 = -0.43$ und $\theta_3 = 20.36$. Abbildung 4.10 zeigt für diese Beobach-

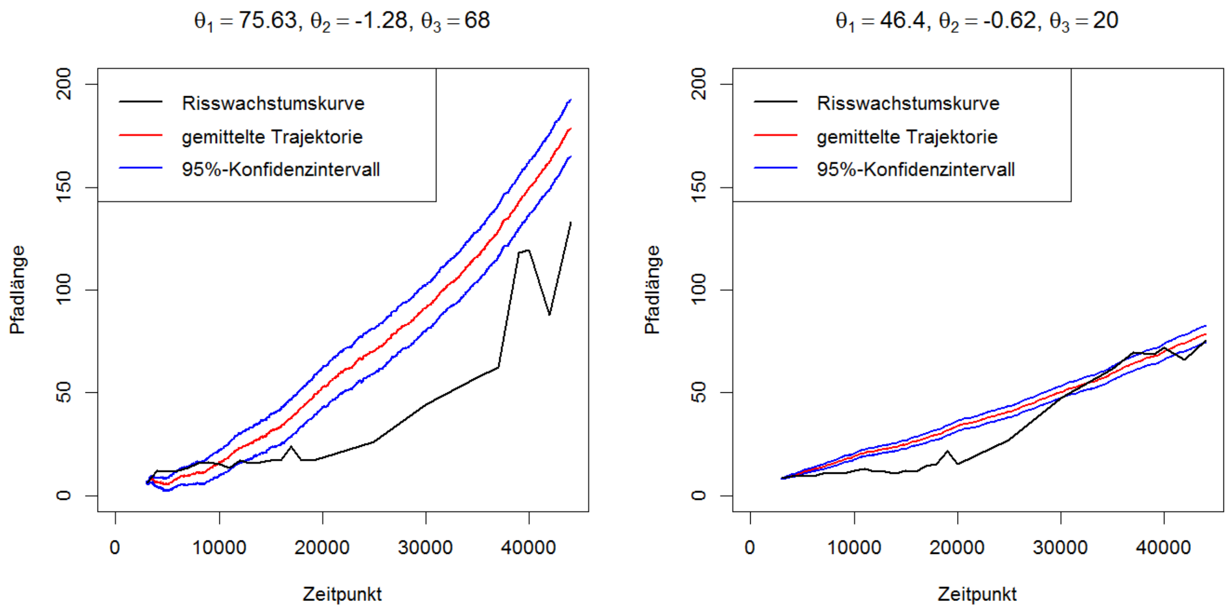

Abbildung 4.10: Risswachstumskurven aus Stahlprobe 10, die über einen explosiven Vasicek-Prozess beschrieben werden

tungsreihen die daran angepassten Vasicek-Prozesse. Die roten Kurven entsprechen wiederum den gemittelten simulierten Pfaden über hundert einzeln erzeugte Trajektorien desselben Vasicek-Prozesses mit zugehörigen punktweise berechneten 95%-Konfidenzintervallen. Es ist zu vermuten, dass der gemittelte Pfad in der linken Graphik die beobachteten Daten überschätzt. Hingegen könnte die rote Kurve in der rechten Graphik eine relativ gute Anpassung liefern. Im Vergleich zu den bisherigen Simulationsergebnissen werden diese Risswachstumskurven über einen explosiven Vasicek-Prozess beschrieben. Dadurch, dass der Parameter θ_2 in der linken Graphik betragsmäßig größer geschätzt wird, ist der positive Trend in diesem Fall stärker als bei der gemittelten Trajektorie in der rechten Graphik. Werden hingegen die Beobachtungen von Stahlprobe 31 betrachtet, liefern 18 Beobachtungsreihen im Zuge der Maximum-Likelihood-Schätzung positive Werte für θ_1 und negative Werte für θ_2. Hierbei handelt es sich um die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 3, 5, 6, 9, 13, 14, 21, 22, 25, 28, 33, 49, 50, 51, 58, 71, 72 und 92 in den Tabellen B.14 bis B.19, B.21 und B.23 ab Seite 77 im Anhang. Abbildung 4.11 zeigt die Simulationsergebnisse für die Beobachtungsreihen der Risswachstumskurven mit den Spaltenbezeichnungen 9, 13 und 21. Die roten Kurven entsprechen wiederum jeweils dem gemittelten Pfad aus hundert einzeln generierten Trajektorien des zugehörigen

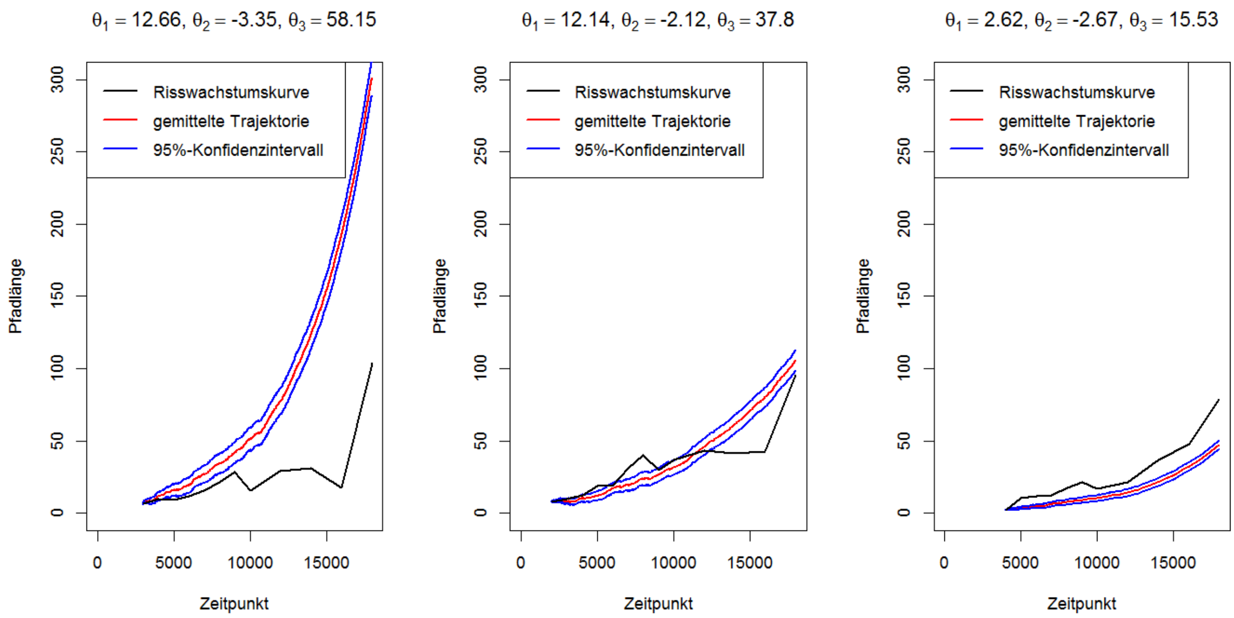

Abbildung 4.11: Risswachstumskurven aus Stahlprobe 31, die über einen explosiven Vasicek-Prozess beschrieben werden

geschätzten Vasicek-Prozesses. Es ist zu beobachten, dass die simulierten Trajektorien die beobachteten Werte im Mittel unterschiedlich schätzen. Während in der linken Graphik die zugrundeliegenden Beobachtungen überschätzt werden, scheint der gemittelte Pfad in der mittleren Graphik recht gut die Risswachstumskurve zu beschreiben. In der rechten Graphik werden die beobachteten Werte tendenziell unterschätzt. Diese Beobachtung ist ebenfalls übertragbar auf die simulierten Pfade zu den übrigen 15 Risswachstumskurven, die in Stahlprobe 31 als explosiver Prozess beschrieben werden. Die zugehörigen Abbildungen sind dem PDF-Dokument auf dem beiliegenden Datenträger mit der Bezeichnung *SimErg.P31.Exakt.posneg.pdf* zu entnehmen. Insgesamt scheint demnach eine Schätzung eines explosiven Prozesses über einen Vasicek-Prozess für die Daten beider Stahlproben relativ unterschiedliche Ergebnisse zu liefern, falls für die zugrundeliegenden Beobachtungen der Wert von θ_1 positiv sowie der Wert von θ_2 negativ ist.

Des Weiteren sind ebenfalls Risswachstumskurven zu beobachten, bei denen der Pfad über negative Werte für θ_1 und θ_2 erstellt wird. Dies gilt in Stahlprobe 10 für die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 1 und 14 in den Tabellen B.4 und B.5 ab Seite 67 im Anhang. Für die Beobachtungen mit Spaltenbezeichnung 1 liefert eine Maximum-Likelihood-Schätzung

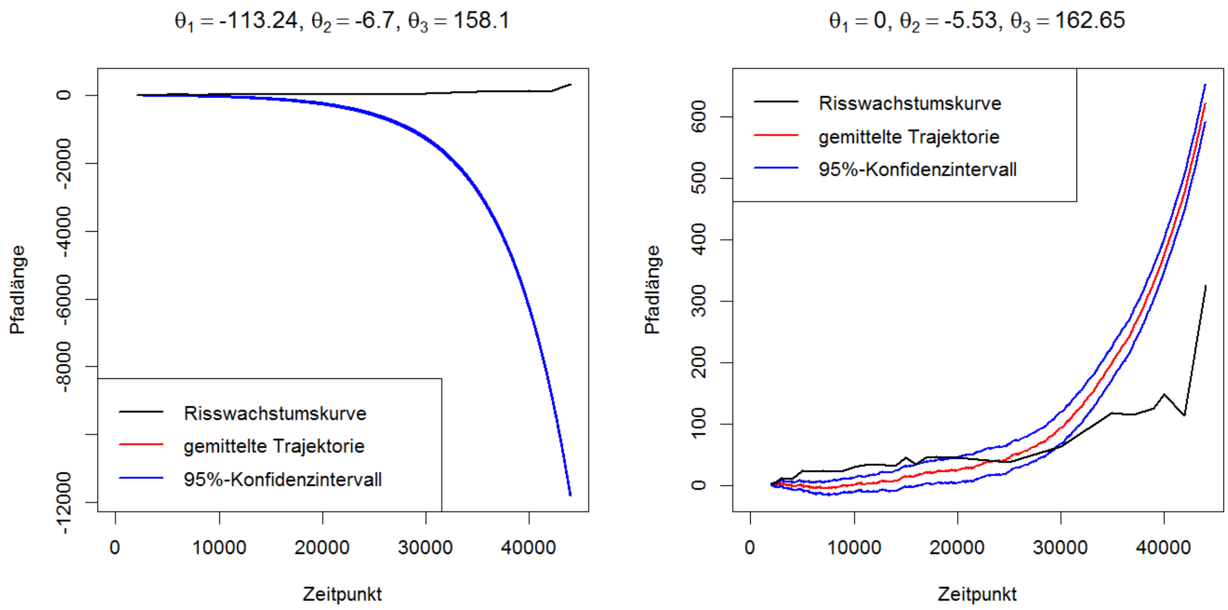

Abbildung 4.12: Risswachstumskurve aus Stahlprobe 10, der über einen Vasicek-Prozesses (links) und eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (rechts) beschrieben wird

die Parameter $\theta_1 = -113.24, \theta_2 = -6.7$ sowie $\theta_3 = 158.1$. Die linke Graphik in Abbildung 4.12 zeigt den zugehörigen gemittelten simulierten Pfad des resultierenden Vasicek-Prozesses. Die blauen Kurven geben wiederum die punktweise berechneten 95%-Konfidenzintervalle an. Entgegen der Orientierung der Risswachstumskurve, simuliert die gemittelten Trajektorie einen explosiven Prozess mit starkem negativen Trend. Der geschätzte Pfad liefert somit keine brauchbaren Information zur Beschreibung der Risswachstumskurve. Eine Ursache dafür könnte ein falsch geschätzter Parameter sein. Die vorherigen Siumlationsergebnisse haben gezeigt, dass ein Prozess positiv ist, falls θ_1 nicht-negative Werte annimmt. Daher wird der zulässige Bereich von θ_1 in diesem Fall auf die positiven reellen Zahlen beschränkt. Mittels dieser Restriktion liefert eine Maximum-Likelihood-Schätzung mit denselben Beobachtungen die Parameter $\theta_1 = 0, \theta_2 = -5.53$ sowie $\theta_3 = 162.65$. Da θ_1 den Wert 0 hat, wird somit ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess als Spezialfall des Vasicek-Prozesses angepasst (vgl. Iacus, 2008). Der über hundert einzeln simulierte Trajektorien gemittelte Pfad des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit zugehörigem 95%-Konfidenzintervall ist der rechten Graphik in Abbildung 4.12 zu entnehmen. Die rote Kurve ist erwartungsgemäß ein explosiver Prozess mit positiven Trend. Bezüglich der Anpassung ist zu sagen, dass dieser Pfad nun eine bessere Beschreibung

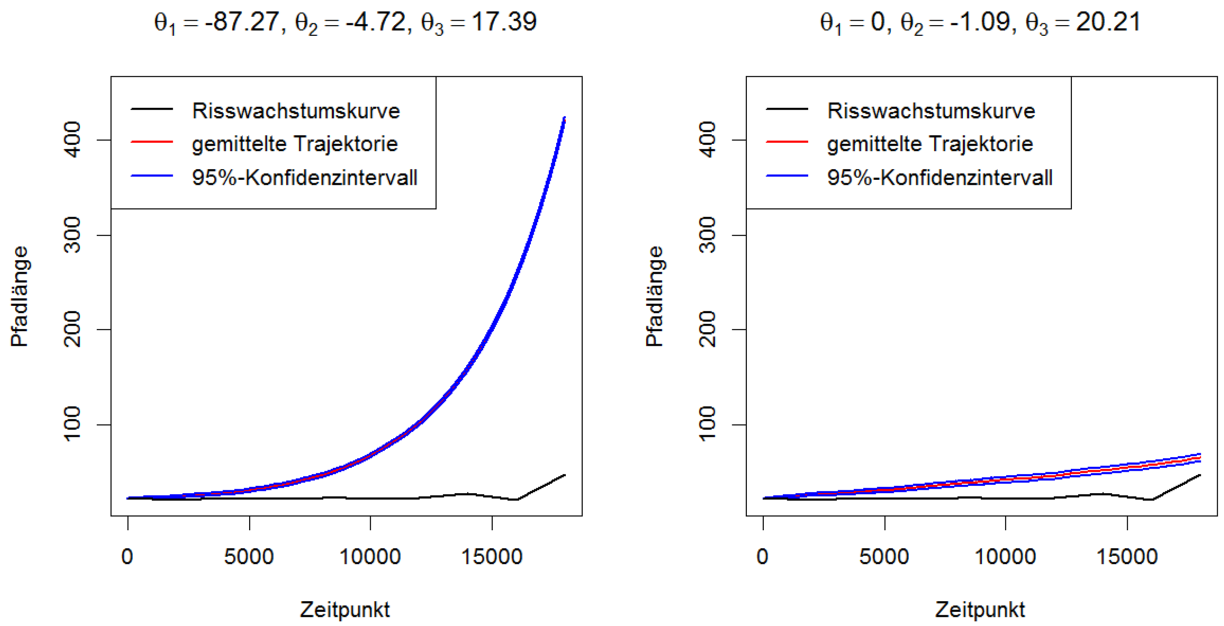

Abbildung 4.13: Risswachstumskurve aus Stahlprobe 31, die über einen Vasicek-Prozesses (links) und eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (rechts) beschrieben wird

für die Beobachtungen liefert. Jedoch werden die zugrundeliegenden Daten überschätzt. Ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses scheint daher ebenfalls eine schlechte Wahl zur Beschreibung der Risswachstumskurve zu sein. Wird in Stahlprobe 10 dieses Vorgehen ebenfalls anhand der Beobachtungsreihe mit Spaltenbezeichnung 14 durchgeführt, ist dasselbe Ergebnisse festzustellen. Dies wird anhand von Abbildung A.3 auf Seite 64 im Anhang ersichtlich.

Für Stahlprobe 31 ergeben sich bei 13 von 100 Risswachstumskurven negative Schätzungen von θ_1 und θ_2. Die zugehörigen Beobachtungen haben die Spaltenbezeichnungen 1, 2, 4, 7, 8, 19, 34, 36, 44, 52, 55, 91 und 100 in den Tabellen B.14, B.15, B.17 bis B.19 und B.23 ab Seite 77 im Anhang. Für den Großteil dieser Wachstumskurven ist bezüglich der angepassten Vasicek- und Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse dieselbe Aussage zu machen wie für die Ergebnisse in Stahlprobe 10 mit negativ geschätzten Parametern θ_1 und θ_2. Eine Besonderheit liegt jedoch für die Beobachtungen mit der Spaltenbezeichnung 100 vor. Die linke Graphik in Abbildung 4.13 zeigt den gemittelten simulierten Pfad des angepassten Vasicek-Prozesses. Es ist zu erkennen, dass die rote Kurve bereits für einen negativ geschätzten Wert von θ_1 einen positiven explosiven Prozess beschreibt. Jedoch scheint diese Trajektorie im Mittel die beobachteten Daten zu überschätzen. Der zugehörige Ornstein-Uhlenbeck-Prozess entspricht dem roten Pfad in der rechten Graphik. In diesem Fall bleibt der Prozess positiv, jedoch wird die Risswachstumskurve dieses Mal tendenziell unterschätzt. Insgesamt scheint somit der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess bessere Resultate bezüglich der Anpassungsgüte zu liefern. Die Simulationsergebnisse zu allen 15 Risswachstumskurven mit negativ geschätzten Parametern für θ_1 und θ_2 in Stahlprobe 31 sind dem PDF-Dokument mit dem Namen *SimErg.P31.Exakt.negneg.pdf* auf dem beiliegenden Datenträger zu entnehmen.

4.3.3 Resultate mit der Euler-Methode

Eine Parameterschätzung und Erstellung von Trajektorien mittels der Euler-Methode hat den Vorteil, dass die Trajektorien des approximierten stochastischen Prozesses deutlich schneller erzeugt werden können. Tabelle 4.3 zeigt hierzu einen Vergleich zwischen der Euler-Methode und exakter Likelihood-Inferenz bezüglich benötigter Rechenzeit (in Sekunden) zur Erzeugung von Trajektorien. Die Messung für Stahlprobe 10 wird anhand der Beobachtungen mit Spaltenbezeichnung 70 in Tabelle B.10 auf Seite 73 im Anhang durchgeführt. Für Stahlprobe 31 dienen die Beobachtungen mit der Spaltenbezeichnung 14 in Tabelle B.15 auf Seite 77 im Anhang. Die Berechnung werden auf einem Acer Laptop mit Betriebssystem Microsoft

Tabelle 4.3: Benötigte Rechenzeit (in Sekunden) zur Simulation von Trajektorien in Stahlprobe 10 und 31

Anzahl simulierter Pfade (P10)	2	10	25	50	100
Euler-Methode	3.73	7.99	16.45	30.44	58.34
Exakte Likelihood-Inferenz	8.81	34.76	84.77	183.67	375.59
Anzahl simulierter Pfade (P31)	2	10	25	50	100
Euler-Methode	1.51	3.42	7.16	13.15	25.68
Exakte Likelihood-Inferenz	3.91	14.97	35.55	72.01	142.25

Windows 7 Home Premium und einem Intel(R) Core(TM) i5-2450M-Prozessor mit 2.50 GHz durchgeführt. Anhand der Laufzeit ist zu erkennen, dass eine Erstellung von zwei Trajektorien über den approximativen Ansatz mehr als doppelt so schnell wie das exakte Verfahren ist. Werden hundert Trajektorien simuliert, ist die Euler-Methode sogar mehr als fünfmal schneller. Dieses Ergebnis lässt sich ebenfalls auf die restlichen Beobachtungen der Daten von Stahlprobe 10 und 31 übertragen.

Im Folgenden wird untersucht, inwiefern die effizientere Berechnung der Trajektorien mittels der Euler-Methode Auswirkungen auf die Anpassungsgüte an die beobachteten Daten hat. Herzu werden die Ergebnisse des approximierten Prozesses denen des exakten in Abhängigkeit der Parameterschätzung von θ_1 und θ_2 gegenübergestellt. Für beide Stahlproben ist zu beobachten,

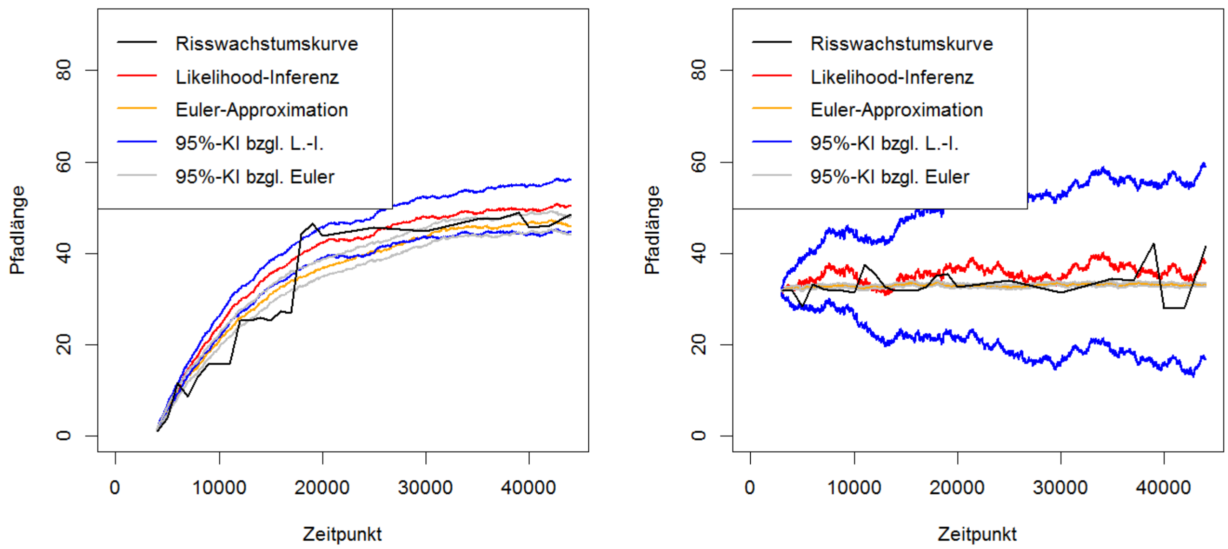

Abbildung 4.14: Vergleich beider Schätzverfahren bezüglich Risswachstumskurven aus Stahlprobe 10 mit hoher Volatilität

dass der approximierte Prozess stationär ist, wenn dies auch für den exakten Ansatz gilt und θ_2 deutlich größer als 0 geschätzt wird. Abbildung 4.14 zeigt hierzu für zwei Risswachstumskurven die geschätzten Prozesse mittels der beiden Methoden. Die zugrundeliegenden Daten entsprechen den Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 17 und 23 in Tabelle B.5 und B.6 auf den Seiten 68 und 69 im Anhang. Der orange gefärbte Pfad entspricht der gemittelten Trajektorie über hundert einzeln simulierte Trajektorien des zugehörigen approximierten Vasicek-Prozesses. Zum Vergleich gibt die rote Kurve den gemittelten Pfad an, der mittels exakter Likelihood-Inferenz anhand von hundert einzeln erzeugten Trajektorien simuliert wird. Die zugehörigen punktweisen 95%-Konfidenzintervalle sind als graue bzw. blaue Pfade gekennzeichnet. Der linken Graphik ist zu entnehmen, dass beide Trajektorien die Risswachstumskurve auf gleiche Weise annähern. Werden zusätzlich die zugehörigen Konfidenzintervalle betrachtet, unterscheide diese sich hinsichtlich ihrer Breite. Die einzeln simulierten Trajektorien des approximierten Prozesses scheinen somit weniger Volatilität zu unterliegen als bei der Simulation mit der exakten Methode.. In der rechten Graphik wird ebenfalls mittels beider Verfahren ein stationärer Prozess generiert, wobei sich die Konfidenzintervalle bezüglich ihrer Breite noch extremer unterscheiden. Eine Trajektorie, die mittels exakter Likelihood-Inferenz

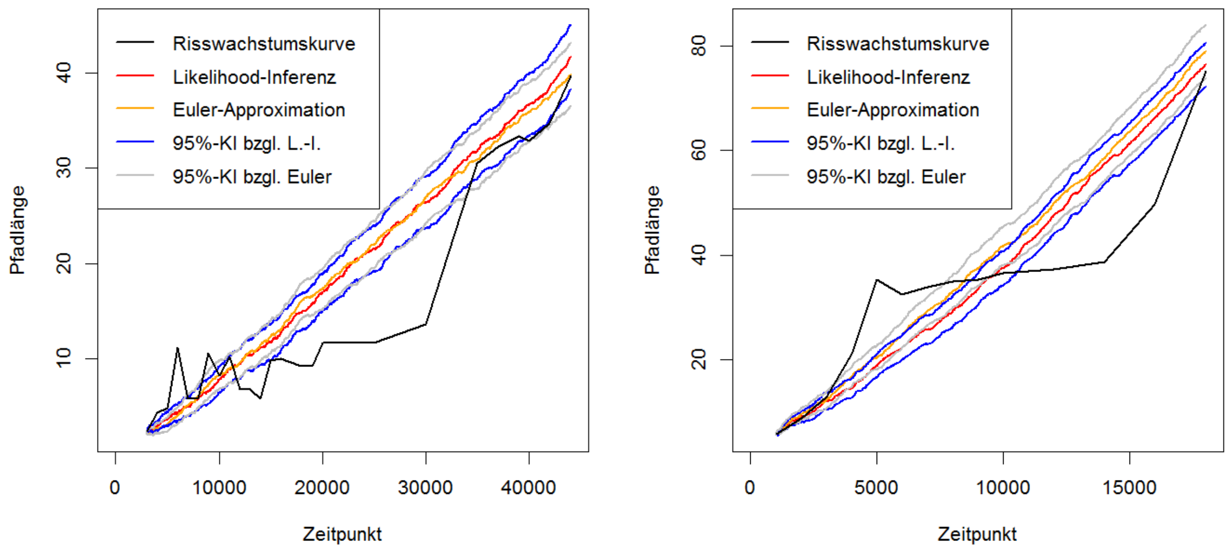

Abbildung 4.15: Vergleich beider Schätzverfahren bezüglich ihrer Anpassungsgüte anhand von Risswachstumskurven mit linearem Wachstum

erstellt wird, reagiert anscheinend für stationäre Prozesse sensibler auf die Volatilität in den beobachteten Daten als ein simulierter Pfad, der mittels der Euler-Methode generiert wird. Für verhältnismäßig kleine positive Werte von θ_2 geben beide Trajektorien weiterhin eine ähnlich gute Beschreibung für den Verlauf der Risswachstumskurve an. Die zugehörigen Konfidenzintervalle beider Trajektorien sind bezüglich der Breite ihrer Konfidenzintervalle in diesem Fall relativ ähnlich. Dies ist zum Beispiel in Abbildung 4.15 zu erkennen. Die Risswachstumskurve in der linken Graphik entspricht den Beobachtungen in Stahlprobe 10 mit der Splatenbezeichnung 26 in Tabelle B.6 auf Seite 69 im Anhang. Die rechte Graphik zeigt den Verlauf der Beobachtungen von Stahlprobe 31 und hat die Spaltenbezeichnung 25 in Tabelle B.16 auf Seite 78 im Anhang. Eine Besonderheit in der rechten Graphik ist, dass der Wert von θ_2 über die Euler-Methode einen Wert von 0.02 hat und der exakte Ansatz diesen Parameter auf $\theta_2 = -0.24$ schätzt. Somit wird über den orangenen Pfad ein stationärer und über den

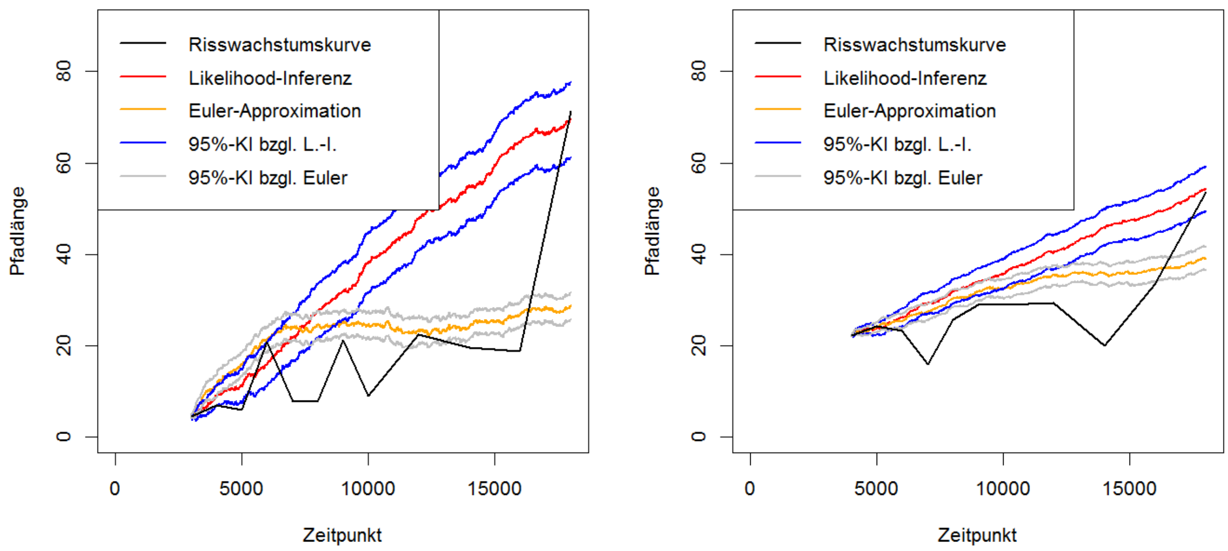

Abbildung 4.16: Vergleich der Anpassungsgüte beider Schätzverfahren anhand der Beschreibung von sprunghaften Anstiege in einer beobachteten Wachstumskurve

roten Pfad ein explosiver Prozess simuliert. Der explosive bzw. stationäre Effekt ist in diesem Fall jedoch so klein, dass kein sichtbarer Unterschied zu erkennen ist.

Ein Problem tritt jedoch auf, falls sprunghafte Anstiege in der Risswachstumskurve zu beobachten sind. Abbildung 4.16 liefert die Simulationsergebnisse für zwei Risswachstumskurven der Daten von Stahlprobe 31. Es handelt sich hierbei um die Beobachtungen mit den Spaltenbezeichnungen 32 und 72 in Tabelle B.17 und B.21 auf den Seiten 78 und 80 im Anhang. Es ist zu erkennen, dass mittels der Euler-Methode lediglich die frühen Zeitpunkte gut beschrieben werden. Der orangene Pfad scheint, ebenso wie die rote Kurve, insgesamt keine gute Vorhersagekraft für zukünftige Beobachtungen zu liefern.

Des Weiteren werden ebenfalls über die Euler-Methode explosive Prozesse erstellt, falls θ_1 positiv und θ_2 negativ ist. Dies ist repräsentativ in Abbildung 4.17 zu sehen. Die zugrundeliegenden Beobachtungen entsprechen den Daten von Stahlprobe 31 mit den Spaltenbezeichnungen 21 und 36 in Tabelle B.16 und B.17 ab Seite 78 im Anhang. Im Gegensatz zu den Simulationsergebnissen stationärer Prozesse, ist in diesem Fall das Konfidenzintervall der approximierten Trajektorie deutlich größer als das Konfidenzintervall des roten simulierten Pfades, der unter Verwendung der exakten Likelihood-Inferenz simuliert wird. Bezüglich der Anpassungsgüte an

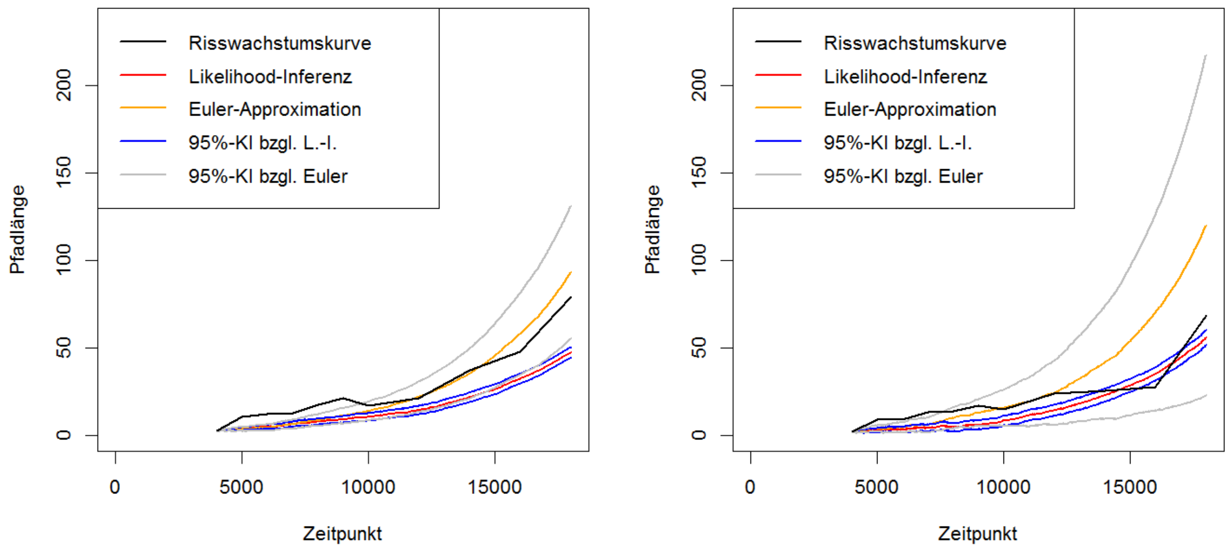

Abbildung 4.17: Vergleich der Anpassungsgüte beider Schätzverfahren bezüglich der Beschreibung explosiver Prozesse

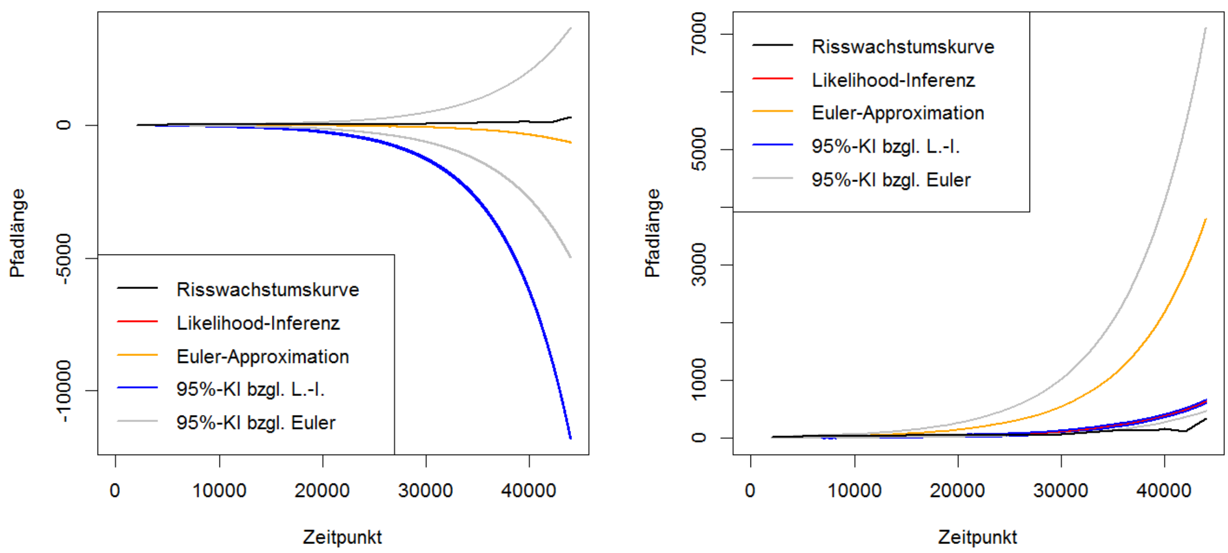

Abbildung 4.18: Risswachstumskurve aus Stahlprobe 10, die über einen Vasicek-Prozesses (links) und eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (rechts) mittels der Euler-Methode und exakter Likelihood-Inferenz beschrieben wird

die beobachteten Daten zu diesen explosiven Prozessen ist jedoch keine Aussage möglich, da in der linken Graphik der approximierte und in der rechten Graphik der exakte Prozess die Risswachstumskurve augenscheinlich besser beschreibt.
Für negative Werte θ_1 und θ_2 liefert die Euler-Methode ebenfalls zumeist im Mittel einen negativen explosiven Prozess. Dies ist zum Beispiel anhand der Graphiken in Abbildung 4.18 für die Beobachtungen mit der Spaltenbezeichnug 1 in Tabelle B.4 auf Seite 67 im Anhang zu sehen. Wird ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angepasst, ändert sich, wie in der rechten Graphik von Abbildung 4.18 zu sehen ist, ebenso der Verlauf dieses Pfades zu einem positiven explosiven Prozess. Im Bezug auf die Anpassungsgüte ist jedoch zu erkennen, dass der approximierte Prozess die beobachteten Daten noch deutlicher überschätzt als die gemittelte Trajektorie des stochastischen Prozesses, der über das exakte Verfahren geschätzt wird. Zudem ist das zugehörige Konfidenzintervall des orangenen Pfades deutlich breiter als das der roten gemittelten Trajektorie.
Eine Zusammenstellung der Abbildungen zu allen Vergleichstudien hinsichtlich der Anpassungsgüte des exakten und approximativen Prozesses auf die zugehörigen 100 Risswachstumskurven in Stahlprobe 10 und 31 befinden sich in den PDF-Dokumenten *SimErg.P10.Euler.pdf* und *SimErg.P31.Euler.pdf*.

4.4 Testergebnisse

Dieser Abschnitt beschäftigt sich damit, anhand von statistischen Tests, die geschätzten Prozesse bezüglich ihrer Homogenität miteinander zu vergleichen. Hierzu werden in den ersten beiden Unterabschnitte die geschätzten Parameter innerhalb von Stahlprobe 10 und 31 auf Gleichheit getestet. Anschließend wird im dritten Unterabschnitt untersucht, ob die Rissentwicklung zwischen beiden betrachteten Stahlproben einen Einfluss auf die geschätzten Parameter hat.
Das Signifikanzniveau für die nachfolgenden Untersuchungen wird auf den Wert von $\alpha = 0.05$ festgelegt.

4.4.1 Vergleich der Parameter in Stahlprobe 10

Neben einer separaten Analyse der hundert größten Risswachstumskurven von Stahlprobe 10, können diese ebenfalls bezüglich ihres geschätzten Verlaufs gegenübergestellt werden. Die beobachteten Risswachstumskurven in den Tabellen B.4 bis B.13 auf den Seiten 67 bis 76 im Anhang sind entsprechend ihrer Größe geordnet. Somit wird davon ausgegangen, dass

Tabelle 4.4: Geschätzte Parameter mittels exakter Likelihood-Inferenz (links) und der Euler-Methode (rechts) für die Beobachtungen der zehn größten und kleinsten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Nr.	θ_1^{Exakt}	θ_2^{Exakt}	θ_3^{Exakt}	Nr.	θ_1^{Euler}	θ_2^{Euler}	θ_3^{Euler}
1	-113.24	-6.70	158.10	1	-26.19	-6.18	186.08
2	75.63	-1.28	68.00	2	96.36	-0.85	70.06
3	156.22	2.83	80.34	3	174.78	4.32	75.27
4	3726.51	43.61	28.03	4	1945.17	22.71	13.99
5	289.96	5.26	55.49	5	320.88	6.45	48.90
6	46.40	-0.62	20.00	6	54.20	-0.43	20.36
7	149.02	2.11	35.72	7	150.64	2.30	34.23
8	338.31	7.08	55.07	8	263.07	5.31	49.56
9	303.05	6.48	48.02	9	312.33	7.00	41.09
10	182.98	6.63	57.25	10	153.29	5.83	50.46
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
91	179.50	11.62	36.57	91	157.28	10.54	28.84
92	79.06	4.11	15.43	92	81.44	4.43	13.87
93	531.10	19.85	94.61	93	396.79	14.90	66.98
94	78.02	4.38	24.80	94	59.54	3.44	21.30
95	61.63	3.00	11.70	95	71.70	3.92	10.77
96	170.63	8.11	23.86	96	133.07	6.19	21.42
97	39.41	2.26	18.98	97	40.38	2.61	18.01
98	135.69	7.46	22.21	98	121.03	6.72	19.25
99	262.37	12.09	25.10	99	188.94	8.52	21.67
100	154.70	9.39	14.81	100	125.19	7.61	12.78

sich die Risswachstumskurven der ersten Beobachtungsreihen tendenziell am ehesten von denen der letzten Beobachtungsreihen unterscheiden. Um eine Aussage über die Homogenität bezüglich Trend, Drift und Volatilität zu machen, werden die geschätzten Parameter der ersten und letzten zehn Beobachtungsreihen miteinander verglichen. Hierbei bietet sich ein zweiseitiger Wilcoxon-Rangsummen-Test an, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die beobachteten Parameter normalverteilt sind. Die zugrundeliegenden Testprobleme lauten demnach

$$H_0^j: \text{Es gibt keinen Unterschied bezüglich } \theta_j \text{ in Stahlprobe 10}$$
$$H_1^j: \text{Es gibt einen Unterschied bezüglich } \theta_j \text{ in Stahlprobe 10}$$

für $j = 1, 2, 3$. Da die Parameter sowohl mittels exakter Likelihood-Inferenz als auch mittels der Euler-Methode geschätzt werden, wird die Gültigkeit der Nullhypthose im Bezug auf beide Vorgehensweisen überprüft. Die zugehörigen Daten sind der Tabelle 4.4 zu entnehmen und zeigen Ausschnitte der Tabellen B.24 und B.26 auf den Seiten 82 und 84 im Anhang. Die resultierenden p-Werte stehen in Tabelle 4.5 und werden nicht auf ein globales Signifikanzniveau angepasst, da diese Tests als Vortests angesehen werden. Unabhängig der Schätzmethode ist zu erkennen, dass die Nullhypothese weder für θ_1 noch für θ_2 zum 5%-Niveau abgelehnt werden kann. Somit ist kein signifikanter Unterschied zwischen den ersten und letzten zehn geschätzten Prozessen bezüglich Trend und Drift zu beobachten. Hingegen kann für θ_3 in beiden Fällen die Nullhypothese verworfen werden. Es gibt somit in den betrachteten Risskurven der Daten von Stahlprobe 10 einen signifikanten Unterschied bezüglich der Volatilität.

Tabelle 4.5: p-Werte des zweiseitigen Wilcoxon-Rangsummen-Tests für Stahlprobe 10

Parameter	θ_1	θ_2	θ_3
Exakte Likelihood-Inferenz	0.5288	0.0892	0.0090
Euler-Methode	0.3150	0.1903	0.0115

4.4.2 Vergleich der Parameter in Stahlprobe 31

Ebenso ist es möglich, die Risswachstumskurven von Stahlprobe 31 gegenüberzustellen. Hierbei werden - wie im Unterabschnitt zuvor - die geschätzten Parameter der zehn größten mit denen der zehn kleinsten Risswachstumskurven verglichen, indem ein zweiseitiger Wilcoxcon-Rangsummen-Test durchgeführt wird. Die zugehörigen Testprobleme lauten daher

$$H_0^j: \text{Es gibt keinen Unterschied bezüglich } \theta_j \text{ in Stahlprobe 31}$$
$$H_1^j: \text{Es gibt einen Unterschied bezüglich } \theta_j \text{ in Stahlprobe 31}$$

für $j = 1, 2, 3$. Auch für Stahlprobe 31 werden die zu vergleichenden Parameter über ein exaktes und ein approximatives Verfahren geschätzt, so dass die Gültigkeit der Nullhypothese erneut für beide Methoden getrennt überprüft wird. Die zugehörigen Daten sind der Tabelle 4.6 zu entnehmen und zeigen Ausschnitte der Tabellen B.25 und B.27 auf den Seiten 83 und 85 im Anhang. Der Eintrag mit der Bezeichnung 98 wird hierbei durch den Eintrag mit der

Tabelle 4.6: Geschätzte Parameter mittels exakter Likelihood-Inferenz (links) und der Euler-Methode (rechts) für die Beobachtungen der zehn größten und kleinsten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Nr.	θ_1^{Exakt}	θ_2^{Exakt}	θ_3^{Exakt}	Nr.	θ_1^{Euler}	θ_2^{Euler}	θ_3^{Euler}
1	0.00	-6.15	37.64	1	0.00	-8.84	55.48
2	0.00	-3.81	74.77	2	27.95	-3.78	94.11
3	125.56	-0.31	30.31	3	130.20	-0.27	30.74
4	0.00	-3.94	20.62	4	0.00	-4.93	25.67
5	67.55	-1.15	37.40	5	74.27	-1.16	39.37
6	22.98	-1.96	18.78	6	21.08	-2.27	20.70
7	0.00	-3.77	36.17	7	0.00	-4.59	47.24
8	0.00	-4.08	37.34	8	0.00	-4.69	47.82
9	12.66	-3.35	58.15	9	254.34	8.10	66.59
10	112.70	0.31	42.23	10	125.19	0.62	41.22
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	247.96	5.15	13.20	90	210.82	4.39	11.04
91	0.00	-4.82	12.39	91	0.00	-6.95	17.66
92	33.55	-0.49	20.40	92	39.14	-0.25	20.89
93	86.13	1.60	21.62	93	79.08	1.50	19.82
94	126.39	2.78	27.51	94	108.95	2.33	24.86
95	104.51	1.94	15.28	95	102.20	2.01	13.40
96	126.09	2.55	19.85	96	109.89	2.18	18.23
97	56.05	0.37	13.34	97	57.56	0.49	13.01
99	131.66	2.87	36.36	99	136.80	3.29	30.37
100	0.00	-1.09	20.21	100	503.14	21.35	17.95

Bezeichnung 90 ersetzt. Der Grund dafür ist, dass es sich bei den zugehörigen Beobachtungen mit der Spaltenbezeichnung 98 in Tabelle B.23 auf Seite 81 im Anhang um die Pfadlängen handelt, die eine extreme Verunreinigung beschreiben. Die Beobachtungen beschreiben somit nicht die Entwicklung eines Risses. Die resultierenden p-Werte stehen in Tabelle 4.7 und werden, aus demselben Grund wie zuvor, nicht adjustiert betrachtet. Anhand dieser Resultate kann die Nullhypothese für θ_1 zum 5%-Niveau nicht abgelehnt werden. Daher gibt es keinen signifikanten Unterschied bezüglich des Trends zwischen den ersten und letzten zehn geschätzten

Prozessen. Hingegend kann für die Parameter θ_2 und θ_3 die Nullhypothese verworfen werden. Die Volatilität und der Drift weisen somit zwischen diesen beiden Stichproben signifikante Unterschiede auf. Diese Testentscheidungen gelten für beide betrachteten Schätzverfahren.

Tabelle 4.7: p-Werte des zweiseitigen Wilcoxon-Rangsummen-Tests für Stahlprobe 31

Parameter	θ_1	θ_2	θ_3
Exakte Likelihood-Inferenz	0.0524	0.0115	0.0068
Euler-Methode	0.1051	0.0185	0.0002

4.4.3 Parametervergleich zwischen beiden Stahlproben

Es ist bekannt, dass Stahlprobe 10 während der Durchführung der Zug-Druck-Experimente bei jeder Wiederholung einem niedrigeren Belastungsniveau ausgesetzt wurde als Stahlprobe 31. Daher ist zu vermuten, dass auch die Rissentwicklung unterschiedlich ist. Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, werden die geschätzten Parameter beider Stahlproben auf Gleichheit getestet. Dies wird ebenfalls durch die Anwendung eines zweiseitigen Wilcoxon-Rangsummmen-Tests überprüft. Die zugrundeliegenden Testprobleme lauten daher

$$H_0^j : \text{Es gibt bezüglich } \theta_j \text{ keinen Unterschied zwischen beiden Stahlproben}$$

$$H_1^j : \text{Es gibt bezüglich } \theta_j \text{ einen Unterschied zwischen beiden Stahlproben}$$

für $j = 1, 2, 3$. Im Fokus liegen zunächst die geschätzten Parameter von den Beobachtungen der zehn größten Risswachstumskurven beider Stahlproben. Diese Werte entsprechen den ersten zehn Zeilen in den Tabellen 4.4 und 4.6 der vorherigen Unterabschnitte. Jeweils für beide Schätzmethoden werden die zehn vorliegenden Parameter beider Stahlproben nun auf Gleichheit getestet. Die sich daraus ergebenen p-Werte sind der Tabelle 4.8 zu entnehmen. Die Nullhypothese kann für θ_1, θ_2 und θ_3, unabhängig von der Vorgehensweise bei der Parameterschätzung, verworfen werden. Das Belastungsniveau hat somit einen signifikaten Einfluss auf den Verlauf der größten Risswachstumskurven. Um eine allgemeine Aussage für alle hundert Risswachstumskurven zu bekommen, werden die geschätzten Parameter aller hundert Risswachstumskurven von Stahlprobe 10 mit denen von Stahlprobe 31 verglichen. Bei letztgenannter Stahlprobe werden jedoch lediglich die geschätzten Parameter von 99 Beobachtungsreihen

Tabelle 4.8: Mittels Bonferroni-Methode korrigierte p-Werte des zweiseitigen Wilcoxon-Rangsummen-Tests, um die Homogenität beider Stahlproben zueinander bezüglich der zehn größten Risswachstumskurven bewerten zu können

Parameter	θ_1	θ_2	θ_3
Exakte Likelihood-Inferenz	< 0.0001	< 0.0001	0.0011
Euler-Methode	0.0031	0.0048	0.0412

verwendet, da es sich bei den Beobachtungen mit Spaltenbezeichnug 98 um Pfadlängen handelt, die eine extreme Verunreinigung beschreiben. Aufgrund der resultierenden p-Werte in 4.9 lautet die Testentscheidung, dass die Nullhypothese für θ_1, θ_2 und θ_3 verworfen werden kann. Im Bezug auf alle beobachteten Risswachstumskurven sind die geschätzten Parameter beider

Tabelle 4.9: Mittels Bonferroni-Methode korrigierte p-Werte des zweiseitigen Wilcoxon-Rangsummen-Tests, um die Homogenität beider Stahlproben zueinander bezüglich aller Risswachstumskurven bewerten zu können

Parameter	θ_1	θ_2	θ_3
Exakte Likelihood-Inferenz	< 0.0001	< 0.0001	0.0091
Euler-Methode	< 0.0001	< 0.0001	0.0028

Stahlproben somit zum 5%-Niveau signifikant unterschiedlich. Das Belastunsniveau scheint daher einen Einluss auf die Rissentwicklung aller hundert Wachstumskurven zu haben. Diese Testentscheidungen gelten sowohl für die approximierende Euler-Methode als auch für die exakte Likelihood-Inferenz.

Die berechneten p-Werte in diesem Unterabschnitt liegen nach der Bonferroni-Methode adjustiert vor. Da insgesamt sechs Tests durchgeführt werden, ist der Korrekturfaktor ebenfalls sechs.

5 Zusammenfassung

Ein Ziel dieser Masterarbeit war die Entwicklung eines Algorithmus zur Zurückverfolgung von Rissen anhand von Bildaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten. Zu diesem Zwecke wurden die Pfadlängen der gefundenen Risse verwendet, um Risswachstumskurven zu erstellen. Anschließend dienten stochastische Prozesse dazu, diese Risswachstumskurven zu beschreiben. Hierbei wurde eine exakte Maximum-Likelihood-Methode sowie eine approximative Euler-Methode zur Anpassung von stochastischen Prozessen verwendet. Abschließend wurden die geschätzten Parameter der zugehörigen stochastischen Differentialgleichung mittels statistischer Tests auf Signifikanzen untersucht. Dadurch wurde anhand der geschätzten Parameter des simulierten Prozesses überprüft, ob es innerhalb und zwischen den Stahlproben bezüglich der Rissentwicklung Unterschiede gibt.

Die deskriptive Analyse der erzeugten Daten ergibt eine linksschiefe Verteilung der Pfadlängen aller Risse. Es gibt also nur wenige Risscluster, die überdurchschnittlich groß sind. Bei dem Algorithmus handelt es sich um ein iteratives Verfahren. Hierbei werden, beginnend beim spätesten beobachteten Zeitpunkt, für ein ausgezeichnetes Risscluster deren Vorgängerrisse ermittelt. Diese geschieht mittels paarweisen Vergleich der Koordinaten. Der Algorithmus bricht ab, falls entweder der Anfangszeitpunkt erreicht ist oder kein Vorgängerriss mehr gefunden wird. Anschließend liefert das Verfahren für den betrachteten Riss eine Wachstumskurve, die die zeitliche Entwicklung der Pfadlänge in diesem Risscluster beschreibt. Bei der Erzeugung von Risswachstumskurven wurden teilweise von einem früheren zu einem späteren Zeitpunkt abfallende Werte beobachtet. Ein möglicher Grund dafür ist, dass die Auflösung einzelner Bildsegmente in den Graustufenbilder relativ schlecht ist. Andere potentielle Ursachen waren Verunreiningungen auf der Stahlprobe sowie ein falsch berechneter Schwellenwert bei der Rissbestimmung, wodurch entweder zu viele oder zu wenig Risscluster erkannt werden.

Im Zuge der weiteren Analyse der Rissentwicklung wurden für beide Stahlproben jeweils nur die hundert größten Risswachstumskurven betrachtet, da davon auszugehen ist, dass diese den größten Einfluss auf den Schädigungsgrad des zugrundeliegenden Materials haben. Bevor die Risswachstumskurven durch einen Vasicek-Prozess beschrieben wurden, stand eine kurze Simulationsstudie zur Überprüfung des Einflusses der geschätzten Parameter im Vordergrund. Diese ergab, dass die stochastischen Prozesse in Abhängigkeit der Parameter verschiedene Verläufe haben und sich stark bezüglich Explosivität, Stationarität oder Volatilität unterscheiden. Anschließend wurde anhand einer Graphik deutlich, dass ein über mehrere Trajektorien gemittelter Pfad eine zugehörige Risswachstumskurve tendenziell besser beschreibt als eine einzelne Trajektorie. Bezüglich der Anpassungsgüte war zu erkennen, dass die Risswachstumskurven durch den Vasicek-Prozess unterschiedlich beschrieben werden. Hierbei scheinen die stationär geschätzten Prozesse die beste Anpassungsgüte an die beobachteten Daten zu haben. Die explosiven Prozesse überschätzen die wahre Risswachstumskurve jedoch sehr oft. In manchen Fällen war der Verlauf der Trajektorie sogar negativ. Daher wurde in diesem Fall der Vasicek-Prozess durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ersetzt, um einen positiven Verlauf der Trajektorien zu garantieren. Anschließend wurde ebenfalls mittels der Euler-Methode ein approximativer Prozess angepasst, um diesen mit dem exakten Verfahren zu vergleichen. Hierbei war zu erkennen, dass der approximative Prozess relativ robust gegenüber Schwankungen innerhalb der Daten ist. Die besten Ergebnisse wurden ebenfalls erzielt, falls ein stationärer Prozess generiert wird. Bei der Erklärung explosiver Verläufe tendiert der approximative Prozess dazu, die beobachteten Daten jedoch noch deutlich zu überschätzen als über das exakte Verfahren. Die geschätzten Parameter wurden anschließend mit einem Wilcoxon-Rangsummen-Test auf Gleichheit innerhalb und zwischen beiden Stahlproben untersucht. Bei der Überprüfung des Einflusses der geschätzten Parameter innerhalb einer Stahlprobe handelte es sich lediglich um Vortests, so dass das Signifikanzniveau in diesem Fall nicht adjustiert wurden. Hierbei wurden die geschätzten Parameter zu den Beobachtungen der größten zehn mit denen der kleinsten zehn Risswachstumskurven verglichen. In Stahlprobe 10 konnte lediglich im Bezug auf die Volatilität der simulierten Trajektorien ein signifikanter Unterschied nachgewiesen werden. Die Risswachstumskurven in Stahlprobe 31 unterschieden sich signifikant hinsichtlich Drift und Volatilität. Abschließend wurden die geschätzten Parameter zwischen beiden Stahlproben verglichen, indem zunächst die größten zehn und anschließend alle Risswachstumskurven

bezüglich der geschätzten Parameter des Vasicek-Prozesses auf Unterschied getestet wurden. Hierbei wurde zunächst mittels der Holm-Korrektur das Signifikanzniveau angepasst. Für beide Testfälle konnte für die Volatilität, den Drift und den Trend ein signifikanter Unterschied gezeigt werden. Das unterschiedliche Belastungsniveau in beiden Stahlproben scheint somit einen signifikanten Einfluss auf die Rissentwicklung zu haben. Sowohl mit dem exakten als auch mit dem approximativen Verfahren konnten dieselben Testentscheidungen gemacht werden.
Der Vasicek-Prozess scheint relativ schlechte Ergebnisse bezüglich der Schätzung explosiver Prozesse zu machen. Daher wäre es interessant zu überprüfen, ob durch die Einführung von Straffunktionen oder weitere Einschränkungen des Parameterraums die Anpassungsgüte verbessert werden kann. Des Weiteren wäre es interessant andere stochastische Prozess anzupassen und die Anpassungsgüte zu beurteilen.
Insgesamt scheinen stochastische Prozesse als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung eine guter Ansatz zur Beschreibung der Rissentwicklung zu sein, da bereits verhältnismäßig wenige Beobachtungen ausreichen, um relativ zuverlässige Aussagen über unbeobachtete Zeitpunkte zu machen.

A Abbildungen

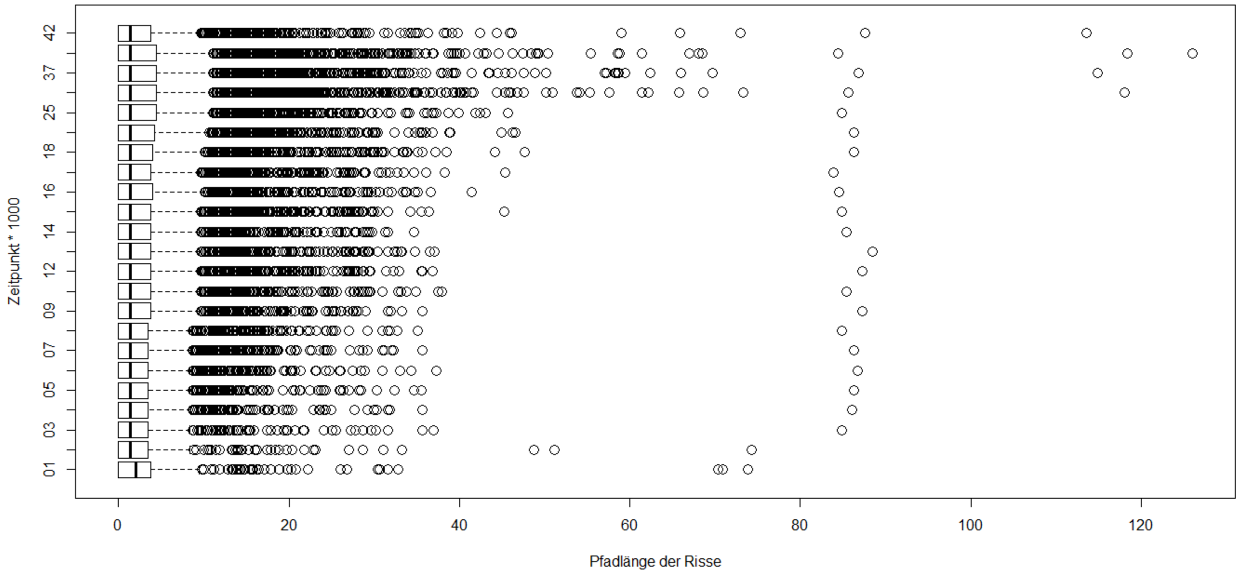

Abbildung A.1: Boxplots für die Pfadlängen der Risse von Stahlprobe 10 zu den übrigen 23 beobachteten Zeitpunkten

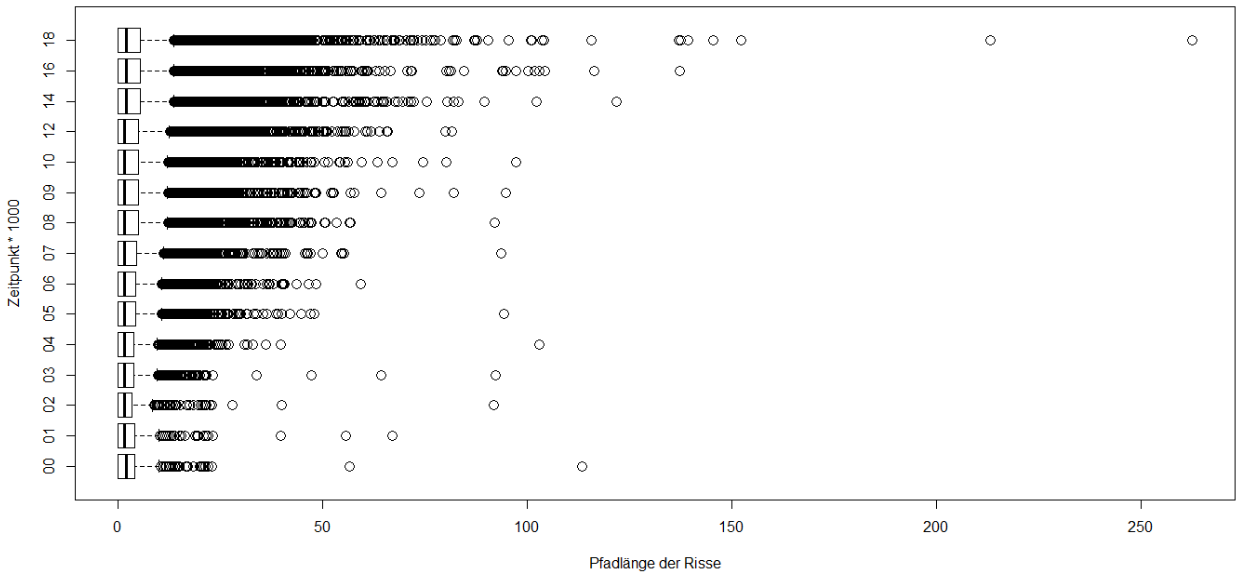

Abbildung A.2: Boxplots für die Pfadlängen der Risse von Stahlprobe 31 zu allen 15 beobachteten Zeitpunkten

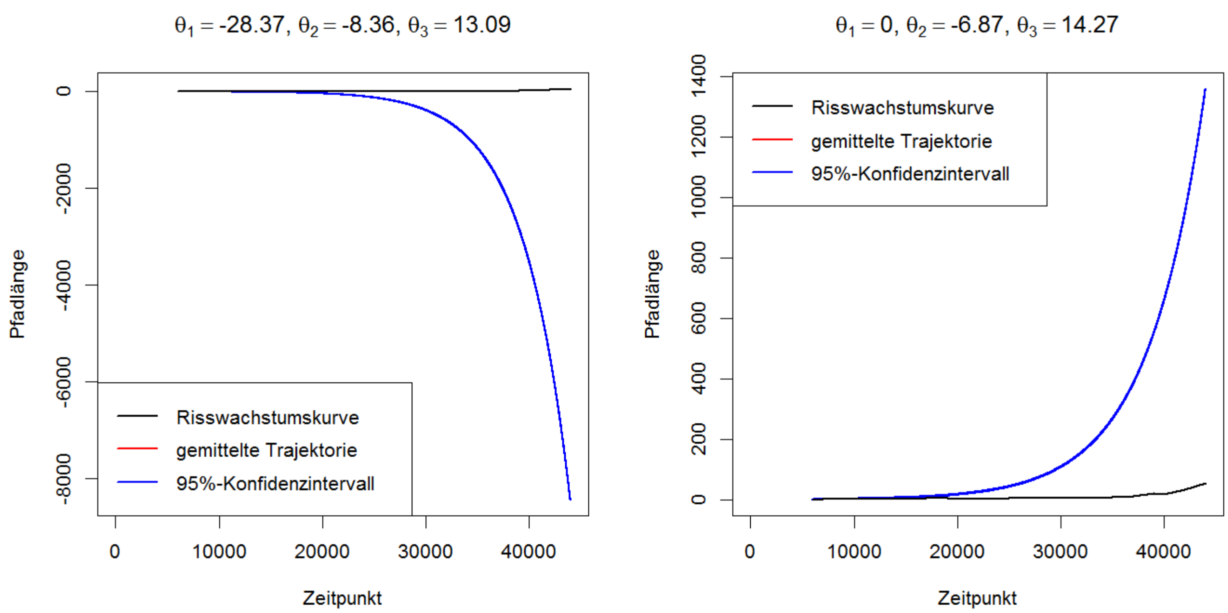

Abbildung A.3: Simulierte gemittelte Trajektorien eines Vasicek-Prozesses (links) und eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (rechts) für die Risswachstumskurve der Beobachtungsreihe mit der Spaltenbezeichnung 1 in Stahlprobe 10

B Tabellen

Tabelle B.1: Kennzahlen zur Beschreibung der Variable Pfadlänge für alle 29 Zeitpunkte in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	1. Quartil	Median	Arith. Mittel	3. Quartil	Maximum	Anzahl
0	1.00	2.00	3.73	4.41	72.57	432
1000	0.00	2.00	3.78	3.83	73.83	508
2000	0.00	1.41	3.22	3.41	74.25	582
3000	0.00	1.41	2.70	3.41	84.84	1328
4000	0.00	1.41	2.56	3.41	86.08	1785
5000	0.00	1.41	2.60	3.41	86.25	2210
6000	0.00	1.41	2.72	3.41	86.67	2598
7000	0.00	1.41	2.69	3.41	86.25	3058
8000	0.00	1.41	2.73	3.41	84.84	3070
9000	0.00	1.41	2.87	3.83	87.25	3472
10000	0.00	1.41	2.85	3.83	84.01	3798
11000	0.00	1.41	2.90	3.83	85.43	4394
12000	0.00	1.41	2.98	3.83	87.25	4592
13000	0.00	1.41	2.95	3.83	88.43	4798
14000	0.00	1.41	2.84	3.83	85.43	3696
15000	0.00	1.41	3.06	3.83	84.84	4988
16000	0.00	1.41	3.03	4.00	84.50	5130
17000	0.00	1.41	3.07	3.83	83.84	5214
18000	0.00	1.41	3.12	4.00	86.25	5810
19000	0.00	1.41	3.21	4.24	86.25	6066
20000	0.00	1.41	3.18	4.24	86.84	5917
25000	0.00	1.41	3.32	4.41	84.84	5997
30000	0.00	1.41	3.38	4.41	88.70	6215
35000	0.00	1.41	3.66	4.41	118.10	9456
37000	0.00	1.41	3.58	4.41	114.80	8178
39000	0.00	1.41	3.68	4.41	126.00	8356
40000	0.00	1.41	3.61	4.41	149.20	8184
42000	0.00	1.41	3.15	3.83	113.60	4940
44000	0.00	1.41	3.44	4.24	325.80	7217

Tabelle B.2: Kennzahlen zur Beschreibung der Variable Pfadlänge für alle 29 Zeitpunkte in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	1. Quartil	Median	Arith. Mittel	3. Quartil	Maximum	Anzahl
0	0.00	2.00	3.61	4.00	113.40	388
1000	0.00	1.41	3.19	4.00	66.94	426
2000	0.00	1.41	2.64	3.41	91.77	981
3000	0.00	1.41	2.98	3.83	92.15	1650
4000	0.00	1.41	3.01	3.83	102.90	2990
5000	0.00	1.41	3.27	4.24	94.25	4842
6000	0.00	1.41	3.29	4.24	59.28	5137
7000	0.00	1.41	3.49	4.41	93.50	6842
8000	0.00	1.41	3.73	4.83	91.98	7957
9000	0.00	1.41	3.78	4.83	94.77	8213
10000	0.00	1.41	3.92	4.83	97.30	9019
12000	0.00	1.41	4.17	5.00	81.50	9892
14000	0.00	2.00	4.58	5.41	121.70	11510
16000	0.00	2.00	4.63	5.41	137.30	11325
18000	0.00	2.00	4.88	5.41	262.60	12449

Tabelle B.3: Anzahl an gefundene Risscluster für den Riss mit der größten Pfadlänge zum Zeitpunkt 44000 in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	Anzahl Cluster	Zeitpunkt	Anzahl Cluster	Zeitpunkt	Anzahl Cluster	Zeitpunkt	Anzahl Cluster
42000	22	20000	11	13000	10	6000	9
40000	12	19000	10	12000	9	5000	8
39000	16	18000	10	11000	8	4000	6
37000	23	17000	10	10000	9	3000	7
35000	17	16000	16	9000	8	2000	1
30000	20	15000	10	8000	8	1000	0
25000	16	14000	11	7000	8	0	0

Tabelle B.4: Beobachtete Pfadlängen der 1 bis 10 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0										
1000										
2000	2.41						1.41			
3000	11.66	6.24	4.83	84.84	3.00	8.24	10.24		7.83	
4000	10.24	11.90	5.83	86.08	4.24	9.24	11.66	0.00	9.83	
5000	24.31	11.66	9.41	86.25	13.07	9.66	15.66	7.83	14.07	
6000	23.24	12.07	8.83	86.67	17.73	9.24	15.24	15.24	19.56	0.00
7000	24.49	13.49	9.83	86.25	18.49	10.66	18.07	15.24	17.73	1.00
8000	22.41	15.49	9.24	84.84	18.90	10.66	19.07	14.24	14.90	1.00
9000	24.66	16.31	9.83	87.25	21.73	10.66	19.49	26.90	16.49	4.83
10000	30.73	15.07	9.83	84.01	21.73	12.07	19.49	16.24	24.97	3.83
11000	33.14	13.49	10.24	85.43	25.14	13.07	21.07	27.73	33.80	6.66
12000	32.90	16.90	11.24	87.25	36.87	11.66	20.07	26.90	32.21	9.07
13000	33.14	15.49	12.66	88.43	37.04	11.66	20.07	27.90	34.80	7.66
14000	31.31	15.90	9.24	85.43	25.56	10.66	19.07	27.90	29.38	12.90
15000	45.21	16.90	11.24	84.84	36.46	12.07	29.73	28.07	34.21	13.31
16000	34.73	16.90	10.66	84.50	36.63	11.66	29.31	32.07	33.80	15.07
17000	45.38	23.97	13.07	83.84	38.28	14.49	21.49	36.07	31.80	23.56
18000	47.63	16.90	10.24	86.25	38.46	15.07	27.49	29.66	33.80	14.66
19000	46.21	16.90	15.31	86.25	38.87	21.49	29.31	35.31	36.87	22.56
20000	45.38	18.31	13.07	86.84	37.04	15.07	29.31	36.90	35.38	15.07
25000	38.66	25.97	13.07	84.84	39.87	26.90	42.38	38.73	37.28	14.07
30000	63.87	44.46	22.49	88.70	44.70	47.56	46.73	46.21	57.18	14.49
35000	118.08	57.60	65.77	85.67	68.60	61.46	53.80	44.38	54.11	30.38
37000	114.84	62.36	65.94	86.84	58.53	69.70	58.63	57.04	46.11	29.56
39000	126.01	118.37	66.94	84.43	58.53	68.53	61.46	58.80	68.11	50.36
40000	149.23	119.47	28.31	84.60	62.11	71.94	62.21	85.36	64.77	24.97
42000	113.60	87.60	28.97	72.94	38.14	65.87	46.14	59.04	34.73	28.38
44000	325.84	133.20	89.11	88.77	79.36	75.53	73.04	60.21	56.80	56.53

Tabelle B.5: Beobachtete Pfadlängen der 11 bis 20 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0										
1000										
2000		4.41				3.41				
3000		7.83	0.00		5.83	12.07		5.83		11.66
4000	4.41	9.83	3.83		9.24	13.49	1.00	6.41	4.83	12.07
5000	5.41	10.83	3.83		10.24	13.90	3.83	12.24	8.66	14.66
6000	4.83	11.83	4.83	1.41	9.24	13.49	11.49	8.66	12.07	16.66
7000	8.83	27.14	18.73	4.41	14.07	15.07	8.49	14.66	13.07	20.90
8000	8.41	12.41	24.38	2.41	12.66	14.31	12.90	16.49	13.49	16.66
9000	9.41	25.31	28.97	3.41	14.07	15.49	15.66	14.49	12.90	17.66
10000	8.41	26.73	29.97	3.00	13.90	14.49	15.66	15.07	28.63	20.66
11000	9.41	27.14	29.38	3.41	14.07	15.07	15.66	14.49	28.63	25.07
12000	9.41	26.31	29.38	4.41	15.49	14.49	25.21	15.07	28.80	19.66
13000	9.00	27.14	29.38	4.41	20.49	20.31	25.21	14.66	28.63	20.07
14000	9.00	12.90	24.97	2.41	14.90	14.49	25.80	17.90	28.63	19.66
15000	9.41	25.31	28.56	4.41	19.49	19.31	25.21	14.24	28.63	27.90
16000	16.49	26.31	41.38	3.41	19.90	19.49	27.21	24.73	29.63	20.49
17000	10.41	26.31	30.56	5.00	20.49	19.31	26.80	23.90	29.04	28.73
18000	15.66	26.73	33.38	6.83	23.31	15.90	44.11	14.07	29.04	28.31
19000	14.07	26.31	32.38	5.41	19.49	20.31	46.53	24.97	30.46	20.07
20000	13.66	30.14	44.38	4.41	24.31	15.49	43.70	24.14	30.04	28.31
25000	13.66	36.73	41.87	6.66	11.66	19.49	45.70	25.14	29.63	36.21
30000	17.07	28.31	58.53	6.24	23.31	22.90	44.70	27.14	32.21	39.38
35000	40.56	39.56	73.25	10.07	40.04	40.14	47.53	50.87	40.04	41.38
37000	39.14	39.56	58.36	13.07	28.97	29.14	47.53	48.87	43.46	43.56
39000	39.73	38.73	55.36	21.49	26.31	32.73	48.94	48.46	46.28	44.56
40000	51.80	38.90	56.94	18.90	42.21	43.97	45.70	50.28	45.28	44.97
42000	36.31	38.49	24.31	34.97	22.90	44.38	45.94	20.73	8.83	39.14
44000	56.46	55.97	55.53	54.53	53.80	49.14	48.53	48.28	48.28	46.80

Tabelle B.6: Beobachtete Pfadlängen der 21 bis 30 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkte	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0										
1000										
2000							2.41			
3000	5.83	1.00	31.66		1.00	2.41	10.24	2.41		15.90
4000	6.24	4.83	31.66		1.41	4.41	10.24	2.41		17.49
5000	7.66	6.66	28.24		2.83	4.83	20.49	3.41		15.49
6000	20.14	9.66	33.07		3.83	11.24	13.24	4.41		15.49
7000	20.73	9.90	32.24		5.41	5.83	14.24	6.41		17.07
8000	25.14	10.07	31.66		19.73	5.83	13.83	6.83		17.07
9000	22.80	9.24	31.66		18.90	10.66	27.90	8.83		18.90
10000	24.14	10.66	31.24		27.56	8.24	21.73	9.83	1.00	19.31
11000	25.14	10.49	37.49		27.56	10.24	28.07	9.24	1.41	20.73
12000	25.56	10.66	35.49		27.73	6.83	27.90	9.83	2.00	20.73
13000	26.97	11.49	32.66		27.56	6.83	22.49	9.24	3.41	20.31
140000	26.80	11.90	31.66		27.73	5.83	16.49	9.24	1.41	20.73
15000	28.73	12.07	31.66		27.38	9.83	21.49	9.83	9.66	25.90
16000	26.56	13.31	31.66	13.07	26.97	10.07	16.24	9.83	2.83	24.73
17000	25.97	13.66	32.66	13.90	26.97	9.66	26.56	9.83	3.41	26.31
18000	26.97	13.66	35.07	3.41	26.97	9.24	28.90	10.49	3.83	25.90
19000	27.56	12.90	35.49	5.24	38.80	9.24	17.24	10.24	7.66	25.31
20000	27.56	12.24	32.66	14.90	30.56	11.66	16.07	10.24	6.66	26.31
25000	27.56	13.49	34.07	14.73	28.38	11.66	16.66	18.66	7.66	26.73
30000	35.38	21.73	31.24	14.90	39.21	13.66	16.90	18.66	9.07	28.56
35000	46.04	40.21	34.49	15.24	39.97	30.56	62.18	22.49	24.90	32.97
37000	44.46	24.56	34.07	13.49	39.38	32.31	50.21	24.07	29.14	34.14
39000	43.21	40.63	42.21	23.24	39.38	33.31	49.21	29.49	29.56	36.97
40000	51.46	40.63	27.83	34.56	42.21	32.90	56.87	30.90	33.38	35.14
42000	34.38	20.31	28.07	28.14	39.80	34.73	17.31	19.07	12.66	34.14
44000	43.63	41.63	41.63	40.38	39.97	39.73	38.56	38.38	37.80	36.97

Tabelle B.7: Beobachtete Pfadlängen der 31 bis 40 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
0										
1000										
2000							4.41			
3000	5.41	6.41	1.41		3.41		4.41	4.00	6.41	3.41
4000	9.83	13.83	1.41	1.00	4.83	0.00	6.24	4.00	3.41	4.83
5000	12.24	16.83	2.41	2.00	4.41	1.00	11.66	12.07	5.41	8.24
6000	17.07	16.83	2.83	3.41	11.66	1.41	17.31	11.90	6.83	8.83
7000	18.07	18.66	2.83	2.41	11.66	16.49	22.38	23.56	7.83	9.83
8000	18.07	18.66	3.41	4.24	8.24	5.24	22.14	14.90	6.83	9.66
9000	18.49	19.66	4.41	10.49	12.66	12.90	21.97	11.49	8.24	11.24
10000	17.66	17.24	3.83	4.83	12.66	12.90	26.56	15.49	8.24	12.66
11000	18.49	29.49	7.83	5.24	14.66	15.31	32.80	27.56	9.66	14.90
12000	19.49	27.49	9.24	14.90	13.07	21.14	26.97	28.14	8.24	13.07
13000	20.07	27.66	9.24	9.24	13.66	16.90	33.21	26.31	8.24	12.07
14000	18.49	22.07	8.83	10.66	12.66	17.49	23.31	26.56	7.83	11.66
15000	21.90	23.24	8.83	10.07	14.07	27.73	27.14	26.73	7.83	15.07
16000	21.31	28.66	9.24	22.73	14.07	14.31	33.63	26.73	11.07	30.21
17000	22.31	27.66	12.49	24.56	14.07	18.73	33.46	15.66	11.07	30.80
18000	22.31	37.14	10.24	15.49	16.07	22.14	33.87	26.31	12.07	30.38
19000	22.73	28.07	14.90	15.90	14.07	18.90	27.38	34.80	12.07	30.21
20000	22.73	40.38	14.31	24.14	15.90	13.90	37.04	28.73	11.07	29.21
25000	23.31	33.90	16.49	30.38	17.31	28.31	35.87	31.63	17.90	29.80
30000	26.90	32.49	37.38	29.56	24.14	27.14	30.14	27.90	25.31	29.80
35000	31.31	45.38	36.56	34.97	32.38	31.21	38.38	39.21	18.49	33.04
37000	30.49	50.21	35.56	30.56	33.56	30.80	38.56	30.56	27.14	29.80
39000	36.80	34.31	39.04	30.14	33.56	29.80	44.56	34.80	47.46	33.63
40000	36.80	35.73	35.97	30.56	33.97	27.56	33.73	32.73	47.38	32.04
42000	31.14	33.07	14.07	18.31	15.49	24.56	33.56	12.07	35.21	28.80
44000	36.80	35.73	35.56	34.97	34.97	34.97	34.56	34.56	34.31	33.46

Tabelle B.8: Beobachtete Pfadlängen der 41 bis 50 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0										
1000										
2000						5.41				
3000			36.97	8.66	4.00	6.41	4.41		0.00	2.00
4000			31.80	11.07	9.24	7.41	3.83		3.83	2.41
5000	8.24		34.63	13.07	14.49	8.41	5.83	3.41	3.41	2.41
6000	8.07	6.41	34.38	13.07	13.07	7.83	6.83	4.41	4.83	5.41
7000	8.66	5.83	31.21	13.66	20.14	8.41	7.24	4.41	4.83	6.24
8000	10.24	3.83	30.97	13.66	21.14	13.07	6.83	5.41	4.83	12.66
9000	10.83	9.24	33.21	14.49	19.31	13.66	6.83	4.83	4.41	13.66
10000	10.83	7.24	30.56	14.49	19.90	13.07	7.83	6.41	3.41	14.24
11000	12.83	11.24	37.97	14.07	19.90	13.07	16.07	11.66	9.66	28.38
12000	12.83	11.24	29.56	14.07	20.07	15.07	20.31	12.49	10.66	14.24
13000	12.24	10.24	31.56	15.07	19.49	15.49	22.31	13.49	10.66	26.56
14000	13.07	7.83	28.97	14.07	20.31	15.49	8.24	4.41	9.24	14.07
15000	12.66	6.83	29.97	15.49	20.49	15.90	21.49	20.14	9.07	26.56
16000	13.24	12.07	28.97	18.31	18.31	16.07	22.31	12.49	10.66	25.56
17000	13.24	11.24	27.56	16.07	22.73	15.07	23.31	21.73	11.07	25.56
18000	13.66	8.24	29.97	16.07	20.49	16.49	22.31	22.14	15.07	31.14
19000	13.24	12.66	36.04	20.56	18.90	16.90	23.31	21.73	15.49	24.56
20000	13.24	7.24	31.80	21.56	19.90	16.90	22.31	20.14	12.07	27.14
25000	13.24	12.66	28.56	15.73	23.31	18.31	22.31	22.56	16.49	31.97
30000	14.66	12.07	29.56	4.83	24.31	28.97	23.31	22.73	8.83	30.97
35000	29.73	19.41	29.56	12.07	24.14	27.56	45.80	28.14	12.66	31.04
37000	30.14	23.90	27.97	12.49	23.14	26.97	23.31	30.14	19.90	28.97
39000	14.24	21.66	33.21	32.04	23.56	47.38	23.90	30.14	29.56	30.56
40000	19.31	34.56	27.97	31.63	25.97	29.38	17.07	29.56	29.97	32.80
42000	12.66	11.66	9.66	21.97	27.97	23.31	16.07	31.56	19.31	29.38
44000	33.38	33.31	33.21	33.04	32.56	32.14	31.97	31.97	31.56	30.97

Tabelle B.9: Beobachtete Pfadlängen der 51 bis 60 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0										
1000										
2000	4.83									
3000	9.24	11.07	7.66		3.41	1.00	30.21	1.00		
4000	9.66	19.90	7.24		3.83	1.00	29.97	3.00		
5000	15.49	12.83	6.83		4.41	5.83	32.38	2.41	0.00	
6000	14.66	11.83	8.66		5.41	9.66	30.97	4.41	4.24	
7000	14.49	12.83	7.83		10.66	9.66	30.97	4.41	5.24	
8000	14.66	18.90	7.83	0.00	6.24	9.66	31.80	4.83	4.41	
9000	15.90	19.07	8.24	2.41	10.66	11.24	31.97	7.24	8.83	
10000	14.07	19.90	8.07	1.41	11.66	10.41	31.38	5.41	4.00	
11000	17.49	20.24	7.83	4.83	10.66	28.14	30.97	18.73	8.24	
12000	21.07	20.49	15.31	4.83	12.07	17.49	31.38	18.73	12.41	3.83
13000	21.31	19.66	15.73	4.24	11.66	27.73	30.38	17.73	13.07	4.83
14000	20.90	20.31	14.90	5.24	10.66	10.83	29.80	17.73	11.07	6.83
15000	21.90	20.49	15.90	7.24	10.66	28.14	30.38	17.73	26.31	13.07
16000	21.90	19.49	14.73	9.66	15.07	28.14	28.97	19.73	24.07	10.07
17000	21.49	18.66	16.73	10.07	17.90	31.38	28.97	19.56	24.07	13.49
18000	23.31	19.49	16.73	9.07	18.49	30.97	30.80	19.14	25.07	13.90
19000	23.73	19.07	17.73	18.31	17.90	29.14	29.80	19.56	25.66	14.07
20000	22.49	21.07	16.73	18.73	14.49	29.97	28.97	19.56	25.07	14.66
25000	24.73	24.66	18.31	15.07	19.31	29.73	27.14	22.31	25.07	22.90
30000	32.38	24.07	18.73	16.49	16.90	29.14	28.38	22.97	24.83	13.66
35000	29.14	30.90	50.11	26.14	33.38	32.38	28.97	26.38	26.90	36.80
37000	32.97	26.24	28.63	16.07	28.97	33.21	29.38	24.56	28.31	14.66
39000	29.14	28.90	33.87	32.80	33.80	31.80	26.56	25.38	28.31	23.49
40000	32.14	30.07	30.46	44.04	28.97	31.38	25.73	23.97	27.31	29.31
42000	8.41	25.83	18.14	7.83	22.73	11.49	28.80	16.49	22.83	28.73
44000	30.31	30.07	29.46	29.31	28.97	28.97	28.97	28.38	28.31	28.24

Tabelle B.10: Beobachtete Pfadlängen der 61 bis 70 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
0										
1000										
2000	28.66									
3000	27.24	5.24		11.83		1.00		4.41	3.41	
4000	29.24	8.83	1.00	17.66		2.00		5.83	4.41	
5000	28.41	11.66	2.41	15.66	2.41	2.41	4.83	6.41	11.66	3.00
6000	27.41	13.49	4.83	15.66	2.41	2.41	5.24	5.83	8.24	2.00
7000	28.66	12.49	7.83	17.24	3.83	3.83	7.24	6.24	13.66	5.00
8000	29.24	15.90	6.24	17.66	4.83	5.83	6.24	6.24	12.24	3.41
9000	27.41	13.90	6.24	17.24	3.83	7.41	8.24	6.66	12.66	0.00
10000	33.90	13.90	6.83	18.66	3.41	8.83	6.24	6.24	13.66	4.41
11000	29.24	16.07	10.07	19.07	5.83	8.24	6.83	7.24	15.07	5.41
12000	28.66	13.90	10.07	19.07	5.83	17.49	11.07	8.24	16.49	4.41
13000	29.24	16.07	10.07	20.07	4.41	9.24	11.07	10.66	15.07	4.41
14000	27.83	14.90	6.83	18.07	4.41	17.49	6.24	8.24	15.07	4.41
15000	28.24	16.07	8.24	25.73	4.41	9.83	17.90	11.07	22.49	6.66
16000	28.07	16.07	11.07	18.66	5.83	18.31	11.07	13.49	23.90	6.83
17000	27.66	15.31	17.31	26.49	5.83	19.07	11.49	12.07	23.90	6.24
18000	28.07	16.07	15.90	25.49	5.83	18.66	21.31	13.07	27.31	5.41
19000	28.24	16.31	15.49	25.49	4.83	19.49	21.73	11.66	24.49	6.24
20000	28.66	16.49	14.90	25.49	4.83	20.66	21.31	17.07	23.90	5.83
25000	1.41	19.31	16.90	26.49	4.83	27.73	20.73	13.49	18.07	5.66
30000	28.07	27.97	15.90	27.90	5.41	12.90	25.14	19.90	23.49	8.66
35000	29.24	27.97	19.73	31.73	16.73	41.63	25.14	33.56	28.14	29.14
37000	28.24	28.97	19.14	33.97	11.24	43.38	23.73	19.07	27.31	16.49
39000	28.49	28.56	16.90	34.38	22.31	26.73	25.14	32.97	28.14	25.14
40000	29.07	28.56	36.63	33.97	30.80	28.14	25.14	19.66	26.90	11.07
42000	21.66	18.31	26.14	27.73	20.49	28.73	19.73	19.90	17.07	7.41
44000	28.24	27.97	27.56	27.31	26.90	26.31	26.14	26.14	26.07	25.97

Tabelle B.11: Beobachtete Pfadlängen der 71 bis 80 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
0										
1000										
2000										0.00
3000	4.41	3.83	3.00			5.41	2.41	1.00		4.41
4000	5.00	4.41	4.83	2.41		6.83	2.83	8.24		4.83
5000	6.00	6.24	4.83	3.41		6.41	2.83	2.41	2.00	6.83
6000	6.41	6.24	4.83	4.83		13.24	3.83	4.83	2.41	6.41
7000	7.41	7.66	5.83	4.41		6.24	3.41	3.41	4.83	8.24
8000	6.41	6.24	5.83	4.83		11.83	3.41	11.07	5.24	7.83
9000	10.24	8.83	6.66	3.83		8.83	3.83	8.24	5.41	18.49
10000	14.24	8.83	6.83	6.24		9.83	9.24	10.66	6.66	8.83
11000	15.24	9.83	7.24	11.07		11.66	13.49	13.07	8.24	24.56
12000	21.90	11.07	7.83	14.07		6.24	12.66	10.66	13.07	26.38
13000	17.66	14.07	7.83	12.49		15.07	12.66	11.07	13.49	25.73
14000	19.49	9.24	7.83	8.24		15.07	13.66	9.66	12.07	16.07
15000	24.90	14.66	8.41	17.90		3.83	14.66	10.07	14.07	24.14
16000	24.90	14.24	8.83	12.66		13.66	14.24	10.66	14.07	25.31
17000	27.31	15.07	8.83	17.90		10.24	21.90	11.07	13.07	15.66
18000	24.90	15.24	8.83	12.49		5.41	13.66	11.07	24.73	24.31
19000	25.90	15.83	8.83	17.90		9.66	14.66	12.07	15.66	25.31
20000	24.49	15.24	16.90	13.49		9.24	14.66	13.07	26.14	24.73
25000	23.49	17.07	17.49	19.31		11.24	22.49	13.66	25.56	23.73
30000	24.49	16.66	17.49	20.90		15.83	21.90	12.07	24.31	15.07
35000	24.49	24.56	24.97	23.97		25.24	24.14	30.97	27.73	26.31
37000	24.07	17.83	25.73	24.73	1.00	12.24	23.31	25.31	25.73	25.56
39000	24.49	27.49	26.14	25.14	25.14	22.83	21.90	29.97	26.31	24.14
40000	24.07	19.24	24.56	24.56	24.31	23.83	21.90	29.56	23.73	26.31
42000	26.31	18.49	17.90	13.49	13.66	11.41	11.66	14.07	23.73	15.07
44000	25.90	25.66	25.56	25.31	25.31	24.83	24.56	24.31	24.31	24.31

Tabelle B.12: Beobachtete Pfadlängen der 81 bis 90 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
0										
1000										
2000										
3000	5.41	3.83	4.83		15.49				0.00	
4000	24.31	4.83	6.41		12.07				5.83	
5000	23.73	7.24	5.83	5.24	13.07				5.83	
6000	24.73	8.24	6.83	4.24	14.49	4.41			6.83	
7000	24.90	8.83	6.83	5.24	14.49	4.41	1.00		6.83	
8000	25.49	8.83	7.41	10.90	13.66	5.41	1.41		7.41	
9000	26.14	22.07	8.83	5.24	14.90	7.83	4.24		7.83	
10000	25.31	23.14	7.41	10.90	13.66	6.83	3.83		13.66	
11000	27.14	22.07	8.24	10.90	14.07	9.66	4.24		8.83	
12000	26.73	20.66	10.24	16.07	13.66	12.07	9.49		9.66	
13000	26.73	23.07	9.24	10.90	14.07	9.24	4.24		9.24	
14000	26.14	21.66	6.83	10.49	14.07	7.83	3.83		8.24	
15000	27.14	21.66	8.83	15.49	14.07	10.24	4.83		18.90	
16000	27.14	21.66	7.83	14.90	18.73	8.24	4.24		14.49	
17000	27.14	22.49	10.24	15.49	14.66	8.24	10.49		15.31	
18000	29.56	23.31	9.83	15.49	14.07	11.66	5.83		15.73	
19000	27.73	23.07	9.83	16.49	15.49	11.07	12.49		24.56	
20000	31.56	22.07	10.24	15.49	19.14	10.66	9.24		18.73	
25000	27.73	20.66	21.90	15.49	17.90	17.07	13.73		21.14	
30000	24.31	23.73	21.90	16.90	18.31	16.66	13.49		20.31	
35000	30.56	25.73	24.31	23.14	27.56	26.38	14.73	35.97	29.73	29.24
37000	30.97	25.14	21.90	23.56	18.66	26.56	13.31	24.49	31.38	29.24
39000	30.97	26.14	22.31	24.14	23.73	20.31	14.73	23.90	29.14	24.24
40000	30.38	24.73	24.31	23.73	24.97	20.31	14.73	23.49	26.38	29.24
42000	22.90	22.73	9.66	6.83	17.73	10.66	13.73	11.24	24.14	19.24
44000	24.31	24.14	24.14	23.73	23.73	23.73	23.56	23.49	23.49	23.41

Tabelle B.13: Beobachtete Pfadlängen der 91 bis 100 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10

Zeitpunkt	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0										
1000										
2000										
3000			2.00		4.83	1.41			3.83	8.83
4000			4.24		5.83	8.83			3.83	8.83
5000	1.00	5.24	8.24		7.66	5.24	3.83	0.00	9.66	9.83
6000	3.83	7.24	8.24		7.24	6.83	3.83	2.41	9.49	10.24
7000	3.83	8.24	13.07		8.83	8.00	3.83	1.41	11.66	10.24
8000	1.00	8.24	12.07		8.66	7.41	4.24	4.41	11.07	10.66
9000	2.41	8.24	13.07		9.24	8.41	2.83	9.66	12.07	12.24
10000	2.41	7.83	22.07		11.49	8.83	4.24	9.24	12.24	11.66
11000	3.41	9.24	13.07		11.07	16.31	5.24	11.83	12.07	12.66
12000	9.66	10.24	23.07		11.66	8.83	5.24	10.41	22.31	11.66
13000	7.66	10.24	23.49		12.07	10.83	4.24	9.83	22.14	12.66
14000	2.00	4.83	13.49		10.66	8.41	4.83	10.41	12.07	11.66
15000	5.41	8.83	23.07		11.66	15.14	4.83	9.66	22.31	12.66
16000	12.07	10.07	23.07	0.00	10.24	15.31	5.24	10.24	21.73	13.07
17000	9.49	9.41	23.07	1.41	12.07	15.73	6.24	10.24	23.14	18.49
18000	16.49	10.24	23.49	2.41	12.24	19.14	5.24	11.24	22.14	12.66
19000	17.07	9.66	24.07	5.24	13.07	16.31	9.66	11.24	21.73	15.49
20000	11.49	11.07	24.07	2.41	11.66	21.97	5.24	20.07	23.14	15.07
25000	18.49	21.73	24.90	6.24	13.07	20.56	5.24	15.66	23.97	16.49
30000	17.31	16.90	23.24	10.49	15.49	24.80	5.83	16.66	23.14	16.49
35000	23.73	15.66	46.73	20.90	23.31	23.38	12.83	22.73	24.14	17.90
37000	23.31	22.31	45.38	28.21	22.56	24.80	23.31	28.38	23.73	17.90
39000	18.07	20.49	44.56	22.97	21.14	28.80	23.73	24.14	23.73	18.07
40000	22.66	23.56	76.94	23.97	22.31	23.38	20.90	17.66	23.14	18.07
42000	3.83	19.07	8.41	11.07	15.90	24.80	12.66	12.24	23.90	15.07
44000	23.31	23.31	23.24	23.14	23.14	22.97	22.90	22.73	22.73	22.73

Tabelle B.14: Beobachtete Pfadlängen der 1 bis 10 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0									113.43	
1000									66.94	
2000	2.83								91.77	0.00
3000	14.31		4.83		1.41		4.83		92.15	2.41
4000	26.97		9.49		2.41	6.24	6.66	0.00	102.91	6.83
5000	31.38	1.41	17.73	16.31	7.83	12.49	11.24	3.41	94.25	17.73
6000	31.80	1.41	17.31	15.31	9.66	19.31	17.31	6.24	59.28	18.73
7000	32.80	3.41	9.49	17.56	14.66	20.31	19.31	7.24	93.50	21.14
8000	42.46	8.66	16.31	26.38	37.80	20.66	37.90	14.49	91.98	22.14
9000	42.04	5.24	16.90	29.80	36.38	20.66	37.90	14.66	94.77	23.14
10000	44.04	8.24	17.90	20.56	36.80	25.97	39.14	19.73	97.30	23.14
12000	43.38	7.83	17.31	31.80	36.38	45.46	40.73	22.14	45.73	27.38
14000	50.04	10.07	28.14	48.04	35.97	45.63	40.31	32.97	60.28	65.53
16000	50.63	17.73	29.14	50.46	35.97	45.87	44.38	48.63	47.80	46.46
18000	48.80	48.63	48.63	48.46	48.11	47.46	47.38	47.21	46.97	46.87

Tabelle B.15: Beobachtete Pfadlängen der 11 bis 20 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0				7.83						
1000				7.83			3.00			
2000	3.83	1.41	8.07	10.24	3.83		5.00	5.83		1.41
3000	10.83	8.24	10.07	21.14	16.49		7.24	18.73	14.31	14.49
4000	16.24	15.31	12.49	21.73	18.07	1.00	15.49	18.73	17.31	6.66
5000	28.07	22.56	18.73	24.56	14.49	17.56	23.31	39.11	19.14	19.56
6000	25.24	36.80	18.73	22.38	22.90	17.14	24.31	26.63	19.49	21.97
7000	15.07	23.56	30.97	25.56	22.07	18.56	40.80	46.28	20.31	37.28
8000	33.14	37.63	39.80	28.80	34.56	36.46	44.46	46.63	23.97	50.36
9000	32.31	82.01	29.63	30.38	42.63	20.56	45.21	48.04	24.97	44.53
10000	24.14	80.25	36.80	36.80	37.38	30.80	45.21	56.11	35.87	50.46
12000	44.63	52.11	43.14	34.97	47.38	33.21	47.21	55.53	37.46	57.70
14000	38.38	89.57	41.21	58.77	55.04	32.63	83.11	57.94	41.11	63.43
16000	100.25	97.23	42.80	93.98	80.77	29.38	61.11	84.50	47.53	81.25
18000	101.01	100.98	95.33	90.40	87.60	87.25	86.94	82.67	82.15	81.87

Tabelle B.16: Beobachtete Pfadlängen der 21 bis 30 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0			5.83							
1000			5.83	1.00	5.83		0.00		9.41	
2000			5.83	12.66	8.83	0.00	4.41		12.41	0.00
3000		1.41	10.07	13.66	12.90	6.66	14.49	5.24	10.66	14.83
4000	2.41	11.24	22.38	17.07	21.14	9.66	14.66	4.83	14.07	23.90
5000	10.66	14.24	28.73	26.90	35.38	12.90	18.90	8.66	18.66	25.31
6000	12.07	16.66	32.38	26.90	32.56	12.49	16.66	14.07	15.07	26.31
7000	12.49	27.49	25.73	33.31	33.97	17.73	40.80	15.90	16.31	29.14
8000	17.31	27.49	50.38	35.14	34.97	18.31	36.14	15.49	17.31	34.80
9000	21.14	24.90	48.38	17.66	35.38	57.70	36.56	15.49	23.49	34.80
10000	17.07	26.97	51.38	26.90	36.56	30.31	38.31	32.56	21.49	36.80
12000	21.14	25.49	56.38	30.31	37.21	61.70	60.46	34.97	22.66	65.77
14000	37.04	46.80	54.80	60.38	38.80	67.77	63.46	31.31	71.53	72.25
16000	47.94	42.97	54.21	40.90	49.70	71.84	65.28	47.21	71.53	93.91
18000	78.91	77.36	76.94	76.28	75.25	75.25	74.36	73.18	72.11	72.01

Tabelle B.17: Beobachtete Pfadlängen der 31 bis 40 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
0	113.43		3.83							
1000	66.94		2.41		7.24					2.41
2000	91.77		2.41	0.00	22.97		1.00	6.66	9.41	7.24
3000	92.15	4.41	9.66	3.41	20.90		10.07	18.07	15.24	12.83
4000	102.91	6.83	5.24	10.66	31.63	2.00	20.97	26.38	19.07	17.90
5000	94.25	5.83	17.90	13.66	41.94	8.66	31.63	46.94	29.14	24.97
6000	59.28	20.73	15.66	16.90	40.11	8.66	36.38	48.36	36.97	43.46
7000	93.50	7.66	16.90	15.07	54.53	13.07	34.56	45.70	38.21	38.87
8000	91.98	7.83	27.49	15.07	56.70	13.49	34.38	46.53	44.21	32.97
9000	94.77	21.14	20.73	15.49	52.70	16.90	29.38	45.70	44.04	34.63
10000	97.30	8.83	23.49	15.49	43.53	14.90	55.46	46.94	47.87	37.38
12000	49.87	22.31	33.31	23.56	43.87	23.97	54.46	60.87	50.87	35.56
14000	69.53	19.49	47.28	24.56	75.36	25.38	62.46	60.94	49.87	38.97
16000	70.53	18.73	61.11	39.21	47.70	27.56	60.94	60.11	66.53	54.43
18000	71.53	71.36	70.36	68.84	68.84	68.67	67.60	67.53	67.11	66.70

Tabelle B.18: Beobachtete Pfadlängen der 41 bis 50 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0										
1000						0.00				
2000			1.00	2.41		9.66	6.24			
3000	3.41		9.07	2.83	4.83	15.07	19.49	5.41		6.83
4000	10.24		11.90	4.83	13.66	19.49	25.31	10.07		8.24
5000	11.66		44.80	8.07	15.66	29.66	24.31	29.38	2.41	10.24
6000	16.49	10.24	35.38	8.07	16.24	18.90	25.31	29.97	3.41	16.31
7000	13.07	19.49	34.38	14.31	21.31	39.38	33.31	29.80	4.41	18.73
8000	41.97	17.31	50.63	13.90	20.49	42.21	41.38	32.63	5.41	16.90
9000	23.73	52.46	52.04	13.90	31.56	42.63	41.38	35.63	6.83	20.56
10000	23.73	34.90	59.53	15.73	47.21	54.11	39.73	35.04	6.41	22.14
12000	65.53	31.07	53.53	20.31	55.46	27.66	48.97	31.63	10.07	31.90
14000	62.70	60.87	63.36	26.97	52.38	64.94	58.04	34.46	29.56	31.90
16000	63.70	56.04	55.70	30.38	50.21	59.46	61.11	38.14	53.28	52.63
18000	65.70	65.53	64.94	64.11	63.63	63.53	62.70	62.43	61.53	61.28

Tabelle B.19: Beobachtete Pfadlängen der 51 bis 60 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0										
1000										
2000			3.41						2.41	0.00
3000	2.00		4.41	2.41	6.66				12.31	19.49
4000	6.83		4.83	6.24	9.66	3.41	6.24	6.41	16.31	20.73
5000	8.00	10.07	19.14	13.83	18.49	4.41	7.24	9.66	36.38	21.73
6000	8.83	10.24	9.66	20.31	19.07	4.41	5.66	8.24	36.80	23.97
7000	19.97	14.90	19.14	21.31	18.66	14.41	10.49	8.66	37.21	22.73
8000	21.56	16.90	21.73	29.14	20.49	13.07	7.66	12.24	37.21	32.21
9000	14.73	14.66	24.14	31.56	22.90	20.24	23.56	13.07	40.63	47.87
10000	18.90	14.90	22.90	30.73	21.24	21.49	22.14	17.90	41.21	47.28
12000	30.21	15.49	23.73	42.21	21.56	22.07	35.46	27.38	45.21	48.70
14000	31.38	17.14	58.94	46.04	23.97	35.80	22.56	34.80	56.28	59.60
16000	32.63	19.83	54.28	44.21	29.63	23.73	60.60	57.53	55.70	56.84
18000	60.87	60.53	60.53	60.53	59.11	58.80	58.43	58.36	57.70	57.60

Tabelle B.20: Beobachtete Pfadlängen der 61 bis 70 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
0										
1000					1.41					
2000			12.07	3.83	5.83		4.00			
3000	1.00	2.00	13.31	5.24	8.07	6.24	17.83	3.83	7.83	13.73
4000	9.24	14.41	22.38	7.66	9.66	12.90	24.07	10.83	10.66	12.31
5000	11.66	16.83	18.14	12.90	16.90	20.14	21.24	11.24	18.31	23.38
6000	12.49	17.83	21.49	13.90	17.31	5.83	21.24	7.83	19.73	21.97
7000	13.90	34.38	30.63	15.90	50.04	27.38	23.07	22.31	18.90	24.38
8000	21.14	37.04	33.21	20.97	53.46	29.38	32.73	25.73	20.07	28.97
9000	21.73	33.97	31.21	21.38	52.63	20.14	26.90	21.49	20.90	32.04
10000	35.80	36.80	33.46	25.80	66.94	29.21	26.90	25.90	28.90	30.14
12000	50.53	39.14	35.63	32.21	61.77	32.56	26.90	33.56	23.73	50.11
14000	23.97	45.56	55.36	49.94	64.36	47.11	35.38	54.87	48.36	50.53
16000	54.28	38.73	52.53	38.87	62.87	54.77	35.80	53.87	49.94	51.36
18000	57.46	57.21	57.11	56.43	55.87	55.60	54.97	54.63	54.53	54.36

Tabelle B.21: Beobachtete Pfadlängen der 71 bis 80 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
0										
1000										
2000			5.24		2.00	3.83				
3000			17.49		9.49	14.31		2.41	5.41	
4000		22.14	39.73	4.24	13.49	16.90	6.66	4.83	6.83	
5000		24.14	47.80	4.24	20.14	19.73	5.41	11.90	6.83	1.41
6000		23.14	46.56	5.24	40.63	20.97	4.83	11.90	8.83	6.83
7000	12.49	15.90	54.63	12.07	40.46	18.31	13.24	14.90	9.24	3.83
8000	12.90	25.56	47.21	23.14	41.87	30.56	14.83	15.90	22.14	9.83
9000	12.90	28.97	73.70	20.90	41.46	37.46	16.24	23.14	21.73	9.83
10000	12.90	28.97	74.53	33.56	44.28	38.46	17.90	22.49	22.73	14.49
12000	22.73	29.38	46.73	32.80	44.70	39.87	33.38	26.38	37.46	27.73
14000	34.21	19.90	50.56	40.46	47.87	41.63	50.28	42.21	47.87	50.46
16000	31.63	33.38	59.70	50.28	49.11	41.87	18.66	50.87	48.28	49.04
18000	53.70	53.53	53.21	53.11	53.11	52.77	52.70	51.87	51.70	51.46

Tabelle B.22: Beobachtete Pfadlängen der 81 bis 90 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
0										
1000										
2000		15.07	2.41	8.83	7.83	0.00		5.83	4.41	2.83
3000	2.41	18.49	12.24	11.66	17.14	5.24		4.83	7.66	14.31
4000	9.24	20.49	12.83	11.83	31.63	6.24		7.83	30.80	26.97
5000	13.31	20.49	13.83	12.66	33.04	10.07	2.41	21.90	31.38	31.38
6000	13.90	36.97	14.66	16.07	31.63	11.07	11.07	17.83	31.80	31.80
7000	26.21	35.21	16.24	16.07	34.04	32.87	10.49	22.90	37.87	32.80
8000	45.11	33.90	28.80	29.56	35.63	32.87	19.07	28.31	39.46	42.46
9000	25.80	40.04	36.04	24.14	36.46	37.28	9.66	31.56	39.80	42.04
10000	38.04	37.80	36.80	29.14	36.46	38.28	28.56	38.38	41.46	44.04
12000	41.87	36.21	47.70	44.80	37.04	40.70	48.11	32.97	39.46	43.38
14000	81.94	39.63	54.70	47.21	36.46	38.70	48.28	44.04	41.70	50.04
16000	42.46	43.63	56.94	53.46	37.87	42.94	40.04	46.56	41.70	50.63
18000	51.46	51.14	51.04	51.04	50.70	50.60	50.28	49.87	48.87	48.80

Tabelle B.23: Beobachtete Pfadlängen der 91 bis 100 größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31

Zeitpunkt	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0								113.43		22.07
1000								66.94		21.49
2000								91.77	0.00	20.66
3000		4.83		1.41		4.83		92.15	2.41	21.49
4000		9.49		2.41	6.24	6.66	0.00	102.91	6.83	21.90
5000	1.41	17.73	16.31	7.83	12.49	11.24	3.41	94.25	17.73	21.90
6000	1.41	17.31	15.31	9.66	19.31	17.31	6.24	59.28	18.73	21.49
7000	3.41	9.49	17.56	14.66	20.31	19.31	7.24	93.50	21.14	21.90
8000	8.66	16.31	26.38	37.80	20.66	37.90	14.49	91.98	22.14	22.31
9000	5.24	16.90	29.80	36.38	20.66	37.90	14.66	94.77	23.14	22.90
10000	8.24	17.90	20.56	36.80	25.97	39.14	19.73	97.30	23.14	21.31
12000	7.83	17.31	31.80	36.38	45.46	40.73	22.14	45.73	27.38	23.14
14000	10.07	28.14	48.04	35.97	45.63	40.31	32.97	60.28	65.53	27.56
16000	17.73	29.14	50.46	35.97	45.87	44.38	48.63	47.80	46.46	20.66
18000	48.63	48.63	48.46	48.11	47.46	47.38	47.21	46.97	46.87	46.80

Tabelle B.24: Geschätzte Parameter für die hundert größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10 zur Erstellung eines Vasicek-Prozesses mittels exakter Likelihood-Inferenz

Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3
1	-113.24	-6.70	158.10	35	139.67	5.55	29.13	69	207.05	9.02	21.85
2	75.63	-1.28	68.00	36	313.70	12.68	42.17	70	108.26	8.57	35.89
3	156.22	2.83	80.34	37	336.84	10.09	33.04	71	126.60	5.02	14.81
4	3726.51	43.61	28.03	38	523.89	19.05	52.34	72	132.74	7.11	21.25
5	289.96	5.26	55.49	39	62.75	1.89	25.00	73	57.33	2.31	14.55
6	46.40	-0.62	20.00	40	142.15	4.57	21.66	74	169.34	8.95	28.21
7	149.02	2.11	35.72	41	144.13	7.42	29.75	75	529.64	24.00	33.86
8	338.31	7.08	55.07	42	226.04	14.22	44.53	76	423.64	30.62	47.92
9	303.05	6.48	48.02	43	1266.86	42.57	46.95	77	130.75	6.63	23.86
10	182.98	6.63	57.25	44	103.17	4.95	26.50	78	137.42	7.55	28.49
11	56.93	0.23	33.13	45	262.97	10.75	15.48	79	160.58	6.96	25.76
12	324.06	9.20	46.77	46	178.46	7.47	33.88	80	396.20	19.25	43.56
13	336.87	6.90	57.45	47	241.95	10.34	43.66	81	1572.79	57.65	24.42
14	-28.37	-8.36	13.09	48	165.82	6.70	30.72	82	207.79	8.94	17.87
15	222.90	7.89	49.21	49	74.68	3.28	22.75	83	97.63	5.14	21.99
16	97.65	2.21	27.71	50	332.62	12.27	43.31	84	256.33	15.22	31.84
17	211.02	4.48	27.36	51	327.62	13.26	34.57	85	190.40	10.10	19.31
18	223.11	6.70	49.77	52	230.94	9.28	19.80	86	100.71	5.45	20.66
19	519.25	16.09	60.00	53	131.82	5.47	34.30	87	110.39	7.96	21.79
20	171.95	4.35	28.59	54	271.88	15.21	56.15	88	214.76	10.31	22.84
21	220.54	5.88	27.82	55	93.33	3.71	20.39	89	155.76	7.09	24.91
22	135.38	4.97	37.29	56	439.84	17.14	55.21	90	3176.91	126.69	60.49
23	18966.26	571.38	115.39	57	311.66	10.71	7.50	91	179.50	11.62	36.57
24	129.92	5.81	38.19	58	145.48	6.34	22.40	92	79.06	4.11	15.43
25	215.86	5.90	28.37	59	180.96	7.17	24.67	93	531.10	19.85	94.61
26	33.45	-0.24	17.24	60	224.22	10.13	35.13	94	78.02	4.38	24.80
27	321.75	10.77	67.32	61	184.87	7.37	27.87	95	61.63	3.00	11.70
28	50.59	0.93	21.50	62	132.04	5.42	16.62	96	170.63	8.11	23.86
29	99.34	4.74	39.61	63	169.76	9.26	32.03	97	39.41	2.26	18.98
30	54.49	1.25	9.46	64	229.37	8.47	20.53	98	135.69	7.46	22.21
31	131.00	4.07	12.82	65	38.88	1.55	21.04	99	262.37	12.09	25.10
32	372.37	10.89	37.33	66	151.73	6.21	35.63	100	154.70	9.39	14.81
33	96.63	3.20	32.42	67	157.92	7.37	26.25				
34	174.27	6.43	36.52	68	136.21	7.11	30.48				

Tabelle B.25: Geschätzte Parameter für die hundert größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31 zur Erstellung eines Vasicek-Prozesses mittels exakter Likelihood-Inferenz

Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3
1	-152.68	-7.88	22.19	35	390.94	7.04	49.38	69	73.47	0.88	21.34
2	-48.34	-4.42	72.53	36	-17.21	-3.90	21.59	70	96.64	1.52	19.06
3	125.56	-0.31	30.31	37	218.98	3.45	32.37	71	4.49	-1.44	15.37
4	0.00	-3.94	20.62	38	284.35	4.56	22.71	72	24.49	-0.25	24.25
5	67.55	-1.15	37.40	39	137.83	1.82	15.22	73	536.25	9.63	48.71
6	22.98	-1.96	18.78	40	119.81	1.58	26.21	74	76.20	0.91	18.86
7	-61.67	-4.93	32.64	41	191.83	3.21	53.10	75	195.30	3.76	20.41
8	-81.44	-6.08	32.56	42	347.69	6.86	61.97	76	126.11	2.38	17.75
9	12.66	-3.35	58.15	43	311.60	5.36	43.86	77	139.29	3.80	47.31
10	112.70	0.31	42.23	44	-19.67	-4.26	15.01	78	59.66	0.37	13.24
11	123.62	0.63	56.33	45	117.18	1.53	22.72	79	61.39	0.53	16.68
12	258.96	2.75	67.94	46	253.20	4.83	50.27	80	69.31	0.70	19.38
13	12.14	-2.12	37.80	47	154.62	2.33	15.87	81	277.33	5.95	64.14
14	65.07	-0.44	30.10	48	153.84	2.93	28.35	82	149.96	3.25	20.74
15	89.86	0.14	25.71	49	32.87	-1.23	15.97	83	111.33	1.79	17.87
16	165.38	2.53	60.44	50	27.57	-0.96	13.97	84	78.47	1.13	20.02
17	138.28	1.24	41.22	51	35.49	-0.98	23.41	85	272.98	6.65	17.92
18	224.20	2.90	40.44	52	-115.56	-9.039	11.99	86	123.11	2.37	23.74
19	-43.70	-3.24	17.85	53	93.29	1.22	34.67	87	145.16	3.02	32.73
20	153.51	1.54	29.95	54	89.21	0.94	15.10	88	97.09	1.72	20.23
21	2.62	-2.67	15.53	55	-31.62	-3.60	17.12	89	279.72	6.50	23.64
22	55.24	-0.66	29.44	56	58.54	0.14	31.95	90	247.96	5.15	13.20
23	117.29	1.16	34.46	57	93.43	1.49	39.18	91	-20.09	-6.04	10.78
24	166.78	2.75	49.45	58	39.16	-0.47	15.63	92	33.55	-0.49	20.40
25	51.61	-0.51	22.70	59	210.27	3.79	20.46	93	86.13	1.60	21.62
26	198.39	2.98	61.49	60	204.78	3.63	25.73	94	126.39	2.78	27.51
27	134.35	1.47	31.02	61	146.30	2.93	39.86	95	104.51	1.94	15.28
28	23.17	-1.58	23.27	62	188.60	3.87	25.60	96	126.09	2.55	19.85
29	77.22	0.43	37.85	63	90.01	1.26	20.29	97	56.05	0.37	13.34
30	180.76	2.23	34.43	64	59.61	0.26	20.38	98	988.04	14.02	113.43
31	19007.42	232.14	344.93	65	181.42	2.88	39.91	99	131.66	2.87	36.36
32	68.24	0.07	51.20	66	149.40	3.07	37.49	100	-87.27	-4.72	17.39
33	44.61	-0.78	22.89	67	146.74	3.31	25.69				
34	-9.43	-3.55	14.68	68	95.26	1.39	23.85				

Tabelle B.26: Geschätzte Parameter für die hundert größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 10 zur Erstellung eines Vasicek-Prozesses mittels der Euler-Methode

Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3
1	-26.19	-6.18	186.08	35	148.56	6.42	25.56	69	187.79	8.28	18.44
2	96.36	-0.85	70.06	36	222.50	9.07	35.21	70	120.26	11.79	28.24
3	174.78	4.32	75.27	37	270.14	8.02	28.83	71	105.40	4.06	13.89
4	1945.17	22.71	13.99	38	419.39	15.31	38.06	72	130.62	7.38	18.49
5	320.88	6.45	48.90	39	70.60	2.44	23.79	73	57.81	2.45	13.87
6	54.20	-0.43	20.36	40	119.98	3.75	20.33	74	138.00	7.40	24.32
7	150.64	2.30	34.23	41	190.94	11.20	23.62	75	94.11	4.74	6.55
8	263.07	5.31	49.56	42	163.95	10.74	34.14	76	267.78	19.99	30.50
9	312.33	7.00	41.09	43	695.66	23.56	25.17	77	119.16	6.19	21.08
10	153.29	5.83	50.46	44	132.58	6.88	23.07	78	150.14	9.07	23.27
11	67.30	0.81	32.90	45	212.92	8.73	13.41	79	120.89	5.04	23.44
12	261.52	7.42	40.78	46	169.91	7.46	29.50	80	284.87	13.65	33.56
13	342.48	7.36	49.04	47	255.83	11.74	34.32	81	705.43	25.49	14.11
14	-37.49	-10.88	15.71	48	118.63	4.59	27.99	82	166.95	7.14	15.90
15	252.53	9.89	40.84	49	81.93	4.04	21.07	83	107.58	6.15	19.18
16	91.54	2.11	26.62	50	233.10	8.36	37.21	84	223.27	13.63	23.40
17	180.76	3.74	25.82	51	306.52	12.58	25.79	85	213.80	11.66	15.21
18	239.33	7.84	42.40	52	195.77	7.98	17.04	86	108.95	6.46	17.70
19	485.05	15.55	41.54	53	202.28	9.80	26.65	87	80.00	5.59	19.04
20	136.35	3.34	26.85	54	224.45	12.78	39.50	88	88.92	4.26	10.53
21	208.19	5.72	24.73	55	106.65	4.77	18.38	89	130.35	5.98	22.40
22	164.99	7.27	32.14	56	319.81	12.17	43.51	90	121.12	4.80	9.32
23	1184.41	36.04	18.87	57	235.42	8.11	6.31	91	157.28	10.54	28.84
24	39.48	0.73	32.49	58	128.70	5.66	20.14	92	81.44	4.43	13.87
25	181.98	4.92	26.09	59	143.71	5.55	22.32	93	396.79	14.90	66.98
26	37.57	0.02	17.32	60	220.05	10.82	22.65	94	59.54	3.44	21.30
27	324.68	12.00	51.01	61	260.67	10.43	18.75	95	71.70	3.92	10.77
28	64.28	1.96	20.96	62	133.67	5.75	14.61	96	133.07	6.19	21.42
29	90.37	4.75	34.79	63	114.80	5.89	28.23	97	40.38	2.61	18.01
30	47.63	1.02	9.27	64	180.41	6.64	18.24	98	121.03	6.72	19.25
31	126.39	4.04	11.83	65	40.59	1.94	20.27	99	188.94	8.52	21.67
32	311.56	9.07	31.22	66	176.15	7.84	29.23	100	125.19	7.61	12.78
33	111.35	4.29	29.50	67	117.80	5.34	23.55				
34	148.77	5.49	32.76	68	151.37	8.67	25.73				

Tabelle B.27: Geschätzte Parameter für die hundert größten Risswachstumskurven in Stahlprobe 31 zur Erstellung eines Vasicek-Prozesses mittels der Euler-Methode

Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3	Nr.	θ_1	θ_2	θ_3
1	-254.21	-12.96	34.97	35	351.02	6.56	35.17	69	81.69	1.25	20.16
2	27.95	-3.78	94.11	36	-6.09	-4.13	28.42	70	96.42	1.61	17.59
3	130.20	-0.27	30.74	37	188.85	2.94	28.95	71	14.92	-1.20	17.56
4	-43.88	-5.82	24.63	38	247.42	4.02	19.11	72	78.25	1.81	24.39
5	74.27	-1.16	39.37	39	134.98	1.85	13.89	73	386.32	6.81	34.79
6	21.08	-2.27	20.70	40	115.04	1.57	24.72	74	70.30	0.78	18.18
7	-65.68	-6.18	46.22	41	170.28	2.94	45.99	75	168.83	3.24	18.18
8	-78.85	-7.17	46.96	42	235.05	4.64	45.10	76	116.27	2.22	16.27
9	254.34	8.10	66.59	43	252.48	4.29	36.78	77	151.65	4.90	35.85
10	125.19	0.62	41.22	44	-22.42	-5.28	19.46	78	60.77	0.46	12.97
11	144.55	1.31	54.17	45	110.08	1.44	21.33	79	60.90	0.56	16.27
12	238.63	2.57	60.74	46	239.00	4.74	40.15	80	70.33	0.84	18.41
13	50.97	-1.17	42.35	47	143.24	2.20	14.55	81	240.30	5.27	47.27
14	78.81	-0.10	30.72	48	163.61	3.54	24.40	82	128.40	2.76	18.56
15	90.18	0.17	25.55	49	38.98	-1.18	17.61	83	105.07	1.71	16.62
16	261.18	6.74	50.49	50	32.81	-0.87	14.81	84	75.93	1.12	19.09
17	156.91	1.82	38.31	51	45.46	-0.65	24.67	85	237.57	5.96	13.41
18	203.73	2.68	36.15	52	-241.51	-18.84	25.51	86	109.28	2.05	21.96
19	-53.09	-3.91	21.65	53	98.66	1.56	32.53	87	125.58	2.64	28.17
20	142.80	1.42	28.36	54	91.26	1.10	14.30	88	90.46	1.60	18.96
21	-0.74	-3.35	18.08	55	-32.15	-4.11	21.23	89	223.66	5.20	19.21
22	79.34	0.12	30.49	56	92.42	1.95	31.14	90	210.82	4.39	11.04
23	112.32	1.11	33.14	57	102.07	2.04	35.51	91	-40.47	-10.57	16.28
24	194.67	4.05	42.80	58	44.21	-0.32	16.13	92	39.14	-0.25	20.89
25	59.82	-0.30	23.21	59	184.68	3.36	17.92	93	79.08	1.50	19.82
26	168.12	2.48	55.37	60	178.57	3.15	22.77	94	108.95	2.33	24.86
27	127.63	1.42	29.40	61	153.45	3.46	33.13	95	102.20	2.01	13.40
28	23.55	-1.79	25.16	62	174.00	3.74	21.29	96	109.89	2.18	18.23
29	94.66	1.06	36.70	63	92.09	1.40	19.09	97	57.56	0.49	13.01
30	180.41	2.39	30.03	64	70.98	0.74	19.96	98	612.15	8.71	76.42
31	1049.98	13.32	65.27	65	157.20	2.40	36.60	99	136.80	3.29	30.37
32	148.19	5.72	49.69	66	122.21	2.43	33.55	100	503.14	21.35	17.95
33	43.58	-0.91	23.48	67	150.73	3.79	22.17				
34	-14.03	-4.48	17.80	68	92.20	1.41	22.32				

Literaturverzeichnis

[1] R. Bardenheier (2005): Dynamic Impact Testing - VHS High Rate Testing Systems. Instron Ltd., High Wycombe, UK

[2] M. Besel, A. Brückner-Foit (2008): Surface damage evolution of engineering steel, In: Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structure (31), p. 885 - 891.

[3] C.G. Broyden (1970): The convergence of a class of double rank minimization algorithms, J. Inst. Maths Applies, No. 6,222-231.

[4] W. Burger, M.J. Burge (2008): Digital Image Processing: An Algorithmic Introduction Using Java, Springer, New York.

[5] K.C. Chan, G.A. Karolyi, F.A. Longstaff, A.B. Sanders (1992): An empirical investigation of alternative models of the short-term interest rate, J. Finance, No. 47, 1209 - 1227.

[6] T. Deck (2006): Der Itô-Kalkül: Einführung und Anwendungen, Springer, Berlin Heidelberg.

[7] L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot (2011): Statistik: Der Weg zur Datenanalyse, Springer.

[8] R. Fletcher (1970): A new approach to variable metric algorithms, In: Computer J., No. 13, p. 317 - 322.

[9] R. Fletcher (2000): Practical Methods of Optimization, Wiley.

[10] C. Fuchs (2013): Inference for Diffusion Processes, Springer, Berlin Heidelberg.

[11] U. Genschel, C. Becker (2005): Schließende Statistik: Grundlegende Methoden, Springer, Berlin Heidelberg.

[12] D. Goldfarb (1970): A family of variable metric methods derived by variational means, In: Maths. Comp., No. 24, 23 - 26.

[13] C. Gunkel, A. Stepper, A.C. Müller, C.H. Müller (2012): Micro crack detection with Dijkstra's shortest path algorithm, In: Machine Vision and Applications, Vol. 3, No. 3.

[14] S.M. Iacus (2008): Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. With R Examples, Springer, New York.

[15] S.M. Iacus (2009): sde: Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. R package version 2.0.10.

[16] J. Keppler, A.C. Müller, C.H. Müller, A. Stepper (2011): crackrec: Crackrecognition. R package version 2.1.6.

[17] A. Klenke (2008): Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer, Berlin Heidelberg.

[18] D. Meintrup, S. Schäffler (2005): Stochastik: Theorie und Anwendung, Springer, Berlin Heidelberg.

[19] C.H. Müller, C. Gunkel, L. Deneke (2011): Statistical analysis of damage evolution with a new image tool, In: Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 00, p. 1 - 11.

[20] B. Øksendal (2010): Stochastic Differential Equations, Springer, Heidelberg New York.

[21] R Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/

[22] D.F. Shanno (1970): Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization, In: Maths. Comp., No. 24, 647 - 656.

[23] W. Voß (2004): Taschenbuch der Statistik, Carl Hanser Verlag, München Wien.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung des Urhebers

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht habe.

Dortmund, den 24. Dezember 2013

Stefan H. Meinke

Einverständniserklärung des Urhebers

Ich erkläre mich hiermit einverstanden, dass meine Masterarbeit nach §6 (1) des URG der Öffentlichkeit durch die Übernahme in die Bereichsbibliotheken zugänglich gemacht wird. Damit können Leser der Bibliothek die Arbeit einsehen und zu persönlichen wissenschaftlichen Zwecken Kopien aus dieser Arbeit anfertigen. Weitere Urheberrechte werden nicht berührt.

Dortmund, den 24. Dezember 2013

Stefan H. Meinke