

1. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: In R können die Logarithmen zu verschiedenen Basen mit der Funktion `log` berechnet werden, wobei im Argument `base` die Basis festgelegt wird. Plotten Sie die Logarithmusfunktion zu den Basen 2, 3, e (in `exp(1)`) und 10. Stellen sie alle vier Logarithmusfunktionen in einer Grafik dar. Wählen sie dazu einen geeigneten Bereich für die x-Achse.

Aufgabe 2: Stellen Sie die die folgenden Dichten der Normalverteilung jeweils in einer Grafik dar. Wählen Sie dabei geeignete Bereiche für die x-Achse:

- (a) Die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=1$ und die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=0$, $\sigma=\text{sd}=1$ in einer Grafik.
- (b) Die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=1$ und die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=2$, $\sigma=\text{sd}=1$ in einer Grafik.
- (c) Die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=1$ und die Dichte der Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=2$ in einer Grafik.

Welche Schlüsse ziehen Sie daraus?

Aufgabe 3: Geben Sie bei den einzelnen Datensätzen aus Kapitel 1 die Merkmalsträger, die Merkmale und den Datentyp der Merkmale an.

2. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Erstellen Sie die Häufigkeitstabelle und die Kreisdiagramme für die Prüf- und Schleiforte aus dem Datensatz `Druckfestigkeit.csv`.

Aufgabe 2: Stellen Sie die Daten im Datensatz `STEEL.DAT` mittels Histogrammen und Verteilungsfunktionen gegenüber. Geben Sie auch die Tabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten sowie den Summenhäufigkeiten an. Lesen Sie den Datensatz `STEEL.DAT` mit folgenden Befehlen ein:

```
> steel<-scan("STEEL.DAT")
Read 20 items
> steel1<-steel[1:10]
> steel2<-steel[11:20]
```

Aufgabe 3: Erstellen Sie per Hand das Histogramm für die Lebenszeiten von Glühbirnen im Datensatz `LAMPS.DAT`.

3. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Berechnen Sie alle sinnvollen Lagekennzahlen für die Daten im Datensatz `STEEL.DAT`.

Aufgabe 2: Kleine Stahlproben wurden Tausenden von Lastwechseln ausgesetzt. Nach 0, 1.000, 2.000, 3.000, 4.000, 5.000, 6.000, 7.000, 8.000, 9.000, 10.000, 12.000, 14.000, 16.000, 18.000 Lastwechseln wurden mit einem Mikroskop Aufnahmen der Probenoberfläche aufgenommen. Dabei wurden pro Zeitpunkt 54 Bildausschnitte von der Probenoberfläche aufgenommen. Mit einem Risserkennungsprogramm wurden Mikrorisse identifiziert. Aus diesen identifizierten Rissen wurden dann zu jedem Bildausschnitt und Zeitpunkt die Anzahl der Risse bestimmt. Die Datei `CrackCounts.dat` enthält diese Rissanzahlen. Dabei bezeichnen die Spalte `No` die Nummer des Bildausschnittes, die Spalten `T0`, `T1`, `T2`, `T3`, `T4`, `T5`, `T6`, `T7`, `T8`, `T9`, `T10`, `T12`, `T14`, `T16`, `T18` die Zeitpunkte 1 bis 18 (in tausend Lastwechseln). Erstellen Sie Histogramme von den Rissanzahlen zu den Zeitpunkten 0, 5, 10 und 18 und berechnen Sie die Mediane und die arithmetischen Mittel. Lesen Sie den Datensatz `CrackCounts.dat` mit folgendem Befehl ein:

```
> CrackCounts<-read.table("CrackCounts.dat",header=T)
```

4. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die vier prozentualen Anteile der Zementkomponenten a,b,c und d im Datensatz `SETTING.DAT` den Median und die 25%- und 75%- Quantile. Welche statistischen Kennzahlen könnten noch berechnet werden? Lesen Sie den Datensatz `SETTING.DAT` mit folgendem Befehl ein:

```
> read.table("SETTING.DAT",header=F,col.names=c("a","b","c","d","Hitze"))
```

Aufgabe 2: Stellen Sie die Daten im Datensatz `STEEL.DAT` mittels Box-Whisker-Plots gegenüber und berechnen Sie alle möglichen Streuungsparameter.

Aufgabe 3: Betrachten Sie den Datensatz `CrackCounts.dat` aus der 2. Aufgabe der 3. Übung. Erstellen Sie die Boxplots der Rissanzahlen für alle 15 Zeitpunkte.

5. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die χ^2 -Größe und den Kontingenzkoeffizienten von Pearson für das Beispiel 1.0.3 (Wirksamkeit von Rostschutzmitteln) im Skript. Lesen Sie dazu die Häufigkeitstabelle mit

```
Tabelle<-matrix(c(65,103,106,74,85,47),ncol=3,byrow=T)
```

ein. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2: Stellen Sie die prozentualen Anteile der Zementkomponenten b und d im Datensatz `SETTING.DAT` in einem Streudiagramm dar und berechnen Sie alle möglichen Zusammenhangsmaße. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3: Stellen Sie die Rissanzahlen aus dem Datensatz `CrackCounts.dat` aus der 2. Aufgabe der 3. Übung für die Zeitpunkte 5 und 10 sowie 10 und 18 in Streudiagrammen dar, berechnen Sie alle möglichen Zusammenhangsmaße und tragen Sie die Regressionsgerade in die Streudiagramme ein. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

6. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Erzeugen Sie jeweils 100 und 10000 Zufallszahlen von folgenden Normalverteilungen

- (a) Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=0$, $\sigma=\text{sd}=1$,
- (b) Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=1$,
- (c) Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=2$.

Erstellen Sie in allen Fällen ein Histogramm und berechnen Sie in allen Fällen das arithmetische Mittel, den Median, die empirische Varianz und die Standardabweichung. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus? Vergleichen Sie die Histogramme auch mit den grafischen Darstellungen von Aufgabe 2 des 1. Übungsblattes.

Aufgabe 2: Erzeugen Sie 10000 Zufallszahlen x_1, \dots, x_{10000} einer Normalverteilung mit $\mu=\text{mean}=1$, $\sigma=\text{sd}=1$. Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten von folgenden Fällen:

- (a) für die Zufallszahl x_n gilt $x_n \leq 1$,
- (b) für die Zufallszahl x_n gilt $x_n \leq -2$,
- (c) für die Zufallszahl x_n gilt $x_n \leq -5$,
- (d) für die Zufallszahl x_n gilt $-5 < x_n \leq -2$,
- (e) für die Zufallszahl x_n gilt $-2 < x_n \leq 4$,
- (f) für die Zufallszahl x_n gilt $x_n > 4$,
- (g) für die Zufallszahl x_n gilt $x_n \leq -2$ oder $x_n > 4$.

Welche der obigen relativen Häufigkeiten geben aufsummiert eine andere der obigen relativen Häufigkeiten?

7. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X sei folgendermaßen gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 2, \\ 1 - \frac{1}{k} & \text{für } k \leq x < k + 1, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Skizzieren Sie diese Verteilungsfunktion und bestimmen Sie aus der Verteilungsfunktion folgende Wahrscheinlichkeiten:

- (a) $P(X < 2)$, (b) $P(X \leq 2)$, (c) $P(X \leq 3)$,
(d) $P(X > 3)$, (e) $P(2 < X \leq 3)$, (f) $P(X \notin (2, 3])$,
(g) $P(2 < X < 3)$, (h) $P(X \in [2, 3])$.

Aufgabe 2: Simulieren Sie einen einfachen Würfelwurf mit $N = 1000$ und erstellen Sie dafür mit `plot(ecdf(wuerfel(1000)$Wuerfelergbnisse))` die empirische Verteilungsfunktion der Zufallszahlen, die die theoretische Verteilungsfunktion approximiert. Ändern Sie die Funktion `wuerfel` so ab, dass diese Zufallszahlen gemäß der Zufallsvariable X eines verfälschten Würfels ergibt mit

$$P(X = 6) = \frac{1}{5}, \quad P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5).$$

Simulieren Sie diesen verfälschten Würfel auch 1000 mal und stellen sie die empirische Verteilungsfunktion dieser Zufallszahlen wie für den unverfälschten Würfel dar.

8. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Erzeugen Sie 1000 Zufallszahlen von folgenden Verteilungen:

- (a) Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 4,$
- (b) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = 1, \lambda = 2,$
- (c) Weibullverteilung mit Parameter $(\alpha, \beta) = (1, 1), (\alpha, \beta) = (1, 2), (\alpha, \beta) = (2, 1), (\alpha, \beta) = (2, 2),$
- (d) Gammaverteilung mit Parameter $(\alpha, \beta) = (1, 1), (\alpha, \beta) = (1, 2), (\alpha, \beta) = (2, 1), (\alpha, \beta) = (2, 2),$
- (e) χ^2 -Verteilung mit 2, 3 und 10 Freiheitsgraden,
- (f) t -Verteilung mit 2, 3 und 10 Freiheitsgraden.

Stellen Sie die Zufallszahlen grafisch dar und stellen Sie diese Grafiken mit den grafischen Darstellungen der entsprechenden Dichten gegenüber.

Hinweis: Bei Zufallszahlen von einer stetigen Verteilung ist das Histogramm die richtige Darstellung, während bei Zufallszahlen von einer diskreten Verteilung ein Stabdiagramm gegeben durch `plot(x,type="h")` die angemessene Darstellung ist.

Aufgabe 2: Stellen Sie die folgenden Dichten von zweidimensionalen Normalverteilungen dar:

- (a) Mit `persp`, `contour`, `image` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=1$ und $\rho=rho=0.$
- (b) Mit `contour` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=2$ und $\rho=rho=0.$
- (c) Mit `contour` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=1$ und $\rho=rho=0.8.$
- (d) Mit `contour` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=1$ und $\rho=rho=0.5.$
- (e) Mit `contour` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=1$ und $\rho=rho=0.$
- (f) Mit `contour` die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit $\mu_1=m_1=0, \mu_2=m_2=1, \sigma_1=sd_1=1, \sigma_2=sd_2=1$ und $\rho=rho=-0.8.$

9. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Eine Firma bezieht ein Bauteil von vier Lieferanten A, B, C, D in folgenden Anteilen:

$$A: 30\%, \quad B: 20\%, \quad C: 40\%, \quad D: 10\%.$$

Der Anteil der fehlerhaften gelieferten Bauteile beträgt bei

$$A: \frac{10}{100}, \quad B: \frac{5}{100}, \quad C: \frac{5}{100}, \quad D: \frac{90}{100}.$$

Die Firma baut zufällig eins von den gelieferten Bauteilen ein.

- (a) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das eingebaute Bauteil fehlerhaft ist?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes eingebautes Bauteil von der Firma A stammt?

Aufgabe 2: Sei X eine Zufallsvariable mit Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1$. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \geq 3), \quad P\left(X \geq \frac{1}{2}\right), \quad P(X \geq 1), \quad P\left(X \geq 1 | X \geq \frac{1}{2}\right), \\ P(X \geq 2 | X \geq 1), \quad P(X \geq 4 | X \geq 1).$$

Welche Vermutung leiten Sie davon ab?

Aufgabe 3: Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben die Bewertungen eines Bauteiles in zwei Tests. Die Verteilung von (X, Y) ist durch folgende unvollständige Tabelle gegeben:

| $P(X = i, Y = j)$ | | Y | | | $P(X = i)$ |
|-------------------|---|----------------|---------------|----------------|------------|
| | | 1 | 2 | 3 | |
| X | 1 | $\frac{1}{20}$ | 0 | | 0.05 |
| | 2 | $\frac{3}{20}$ | | $\frac{1}{20}$ | 0.25 |
| | 3 | $\frac{3}{20}$ | | $\frac{1}{20}$ | 0.3 |
| | 4 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | | |

- a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
- b) Sind X und Y stochastisch unabhängig oder gibt es einen Zusammenhang zwischen den Tests?

10. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Die Dreiecks-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, deren Dichte auf dem Träger eine Dreiecksgestalt hat. Bestimmen Sie die Dichte der Dreiecksverteilung für den Träger $[0, 2]$. Sei X eine Zufallsvariable, die diese Dreiecksverteilung besitzt. Bestimmen Sie auch $E(X)$, $\text{var}(X)$ sowie das 0.25-Quantil $Q_{0.25}(X)$ und das 0.75-Quantil $Q_{0.75}(X)$.

Aufgabe 2: Sei die Verteilung von (X, Y) durch die Tabelle in Aufgabe 3 des 9. Übungsblattes gegeben. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, $\text{kov}(X, Y)$ und $\text{korr}(X, Y)$.

11. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Die Dicke eines Bleches soll 3100 Mikrometer betragen. Der Datensatz BLECH.DAT enthält die folgenden Dicken in $10\mu\text{m}$ bei 15 zufällig ausgewählten Blechen:

346, 363, 360, 318, 346, 268, 299, 287, 310, 349, 333, 365, 281, 265, 344.

Betrachten Sie das Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- (a) Bestimmen Sie den exakten P-Wert. Welche Entscheidung fällen Sie?
- (b) Bestimmen Sie den P-Wert per Simulation, in dem Sie 1000 mal 15 Zufallszahlen der Normalverteilung mit $\mu = 310$ erzeugen. Benutzen Sie einmal dazu $\sigma = 30$ und einmal $\sigma = 1$. Wie wirkt sich die Wahl von σ aus?
- (c) Geben Sie eine Entscheidungsregel an, die nicht den P-Wert benutzt.
- (d) Bestimmen Sie den exakten Wert für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung 2. Art für $\mu = 300$, wenn $\sigma = 1$ gilt.
- (e) Bestimmen Sie den exakten Wert für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung 2. Art für $\mu = 300$, wenn $\sigma = 30$ gilt. (Hier müssen Sie etwas überlegen, da das nicht im Skript vorgeführt wurde.)
- (f) Überprüfen Sie den in (d) berechneten Wert per Simulation.
- (g) Überprüfen Sie den in (e) berechneten Wert per Simulation.
- (h) Stellen Sie die Gütefunktion und die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art für alle möglichen μ grafisch da. Nehmen Sie dazu $\sigma = 1$ an.
- (i) Stellen Sie die Gütefunktion und die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art für einen Stichprobenumfang von $N = 100$ grafisch da. Nehmen Sie dazu wieder $\sigma = 1$ an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in (h).

12. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Betrachten Sie den Datensatz BLECH.DAT aus Aufgabe 1 des 11. Übungsblattes und das Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$.

- (a) Bestimmen Sie den P-Wert.
- (b) Geben Sie die Entscheidungsregel ohne den P-Wert an.
- (c) Welche Entscheidung fällen Sie?
- (d) Stellen Sie die Gütefunktion

$$\gamma(\mu) = P_{\mu}(\text{Entscheidung für } H_1).$$

grafisch dar. Nehmen sie dazu $\sigma = 1$ an.

Aufgabe 2: Betrachten Sie den Datensatz BLECH.DAT aus Aufgabe 1 des 11. Übungsblattes und folgende Testprobleme:

- (a) $H_0 : \sigma = 30$ gegen $H_1 : \sigma \neq 30$,
- (b) $H_0 : \sigma \geq 30$ gegen $H_1 : \sigma < 30$.

Welche Entscheidungen fällen Sie bei den 2 Testproblemen?

13. Übungsblatt zu
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
in den Ingenieurwissenschaften
Müller WS 2021/2022

Aufgabe 1: Im Datensatz BLECH2.DAT sind die Dicken von 15 zufällig ausgewählten Blechen einer weiteren Produktionslinie gegeben:

364, 339, 289, 304, 362, 324, 314, 330, 301, 274, 319, 314, 326, 328, 310.

Testen Sie, ob sich diese Blechdicken signifikant im Erwartungswert bzw. der Varianz von denen im Datensatz BLECH.DAT aus Aufgabe 1 des 11. Übungsblattes unterscheiden. Überprüfen Sie auch die Voraussetzungen der Tests. Benutzen Sie alle möglichen Tests.

Aufgabe 2: Testen Sie, ob es im Datensatz Druckfestigkeit.csv einen Zusammenhang zwischen Druckfestigkeit und Festbetonrohddichte gibt. Benutzen Sie alle Tests, die in Frage kommen. Überprüfen Sie auch die Voraussetzungen der Tests.

Aufgabe 3: Testen Sie, ob es im Datensatz Druckfestigkeit.csv einen Zusammenhang zwischen Festbetonrohddichte und Herstellungsort gibt.