Prof. Dr. Christine Müller

1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Gesamt:**
10	10	8	12	12	8	14	6	20	100

Probe-Klausur "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften"

NAME: ____________________ VORNAME: ____________________

FACHRICHTUNG: ____________________ GEBURTSDATUM: ____________

MATRIKEL-NUMMER: | | | | | | | | | | | | | | |

Bitte beachten Sie folgendes:

1) Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares. Bei der Korrektur werden **nur** Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt. Das Entfernen der Heftklammer ist **nicht** erlaubt. Die Lösungen dürfen nicht mit Bleistift geschrieben werden.

2) Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 40 Punkte erreicht worden sind.

3) Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden. Die Lösungen sollen so erfolgen, dass der Lösungsweg deutlich erkennbar ist (kurze Kommentare! Angabe aller Voraussetzungen! Behauptungen begründen! benutzte Sätze zitieren!). Teillösungen werden gewertet.

4) Vereinfachen Sie Formeln und Brüche durch Kürzen etc. so weit wie möglich.

5) Als Hilfsmittel sind nur drei auf beiden Seiten handgeschriebene DIN-A4-Blätter zugelassen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

6) Klausuren, die nicht unmittelbar nach der entsprechenden Aufforderung der Aufsichtspersonen abgegeben werden, können später **nicht** mehr berücksichtigt werden.

7) **Klausureinsicht:** Die Möglichkeit der Einsichtnahme ist am **???** von ??? Uhr bis ??? Uhr im Raum ??? im Mathematik-Gebäude gegeben.

Kenntnis genommen: ______________________________

(Unterschrift)

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Seien `xdata` und `ydata` zwei Datenvektoren. Geben Sie für folgende R-Befehle an, was diese aus den Daten berechnen, wozu das gebraucht wird und für welche Datentypen (nominal, ordinal, quantitativ diskret, quantitativ stetig) es sinnvoll ist.

`cumsum(table(xdata))`	
Datentyp	Ergebnis und wozu es benutzt wird

`cor(rank(xdata),rank(ydata))`	
Datentyp	Ergebnis und wozu es benutzt wird

`plot(table(xdata)/length(xdata),type=''h'')`	
Datentyp	Ergebnis und wozu es benutzt wird

`table(xdata,ydata)`	
Datentyp	Ergebnis und wozu es benutzt wird

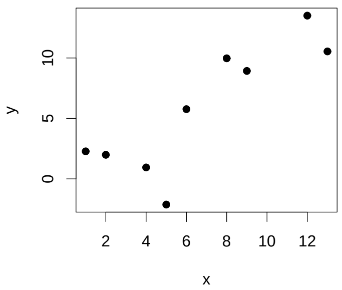
`hist(xdata,plot=F)`	
Datentyp	Ergebnis und wozu es benutzt wird

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei der Datensatz durch $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1, x_6 = 5$ gegeben. Bestimmen Sie:

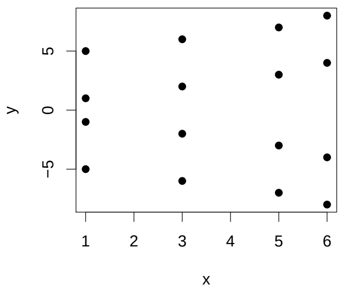
Geordneter Datensatz	
Ränge der Daten	$R(x_1) =$, $R(x_2) =$, $R(x_3) =$, $R(x_4) =$, $R(x_5) =$, $R(x_6) =$
Median	
Quartilsabstand	
arithmetisches Mittel	

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Was gilt für den Korrelationskoeffizienten von Pearson r_{xy} und für den Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten r_{xy}^{sp}? Kreuzen Sie in der nebenstehenden Tabelle an. Beachten Sie, dass falsche Kreuze zu negativen Punkten führen.

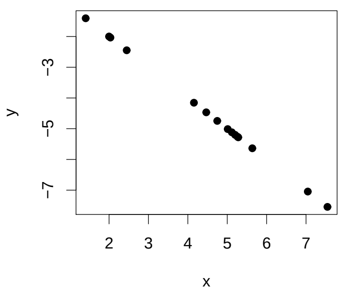
a)



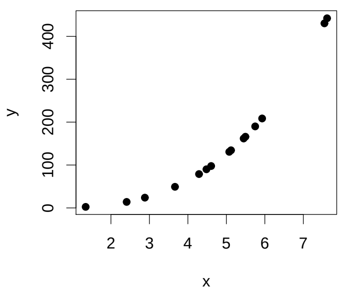
b)



c)



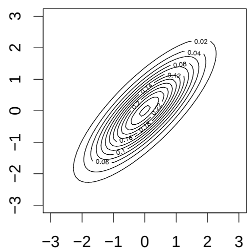
d)



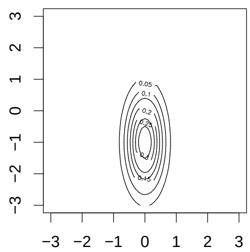
	a)	b)	c)	d)
$r_{xy} = -1$				
$-1 < r_{xy} < 0$				
$r_{xy} = 0$				
$0 < r_{xy} < 1$				
$r_{xy} = 1$				
$r_{xy}^{sp} = -1$				
$-1 < r_{xy}^{sp} < 0$				
$r_{xy}^{sp} = 0$				
$0 < r_{xy}^{sp} < 1$				
$r_{xy}^{sp} = 1$				

Aufgabe 4: (12 Punkte)
Was gilt für die folgenden Darstellungen der Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung? Kreuzen Sie in der nebenstehenden Tabelle an. Dabei beziehen sich μ_1, σ_1^2 auf die Randverteilung auf der horizontalen Achse und μ_2, σ_2^2 auf die Randverteilung auf der senkrechten Achse. Beachten Sie, dass falsche Kreuze zu negativen Punkten führen.

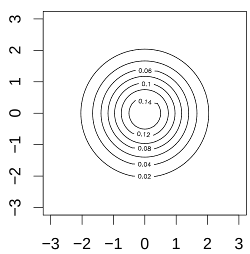
a)



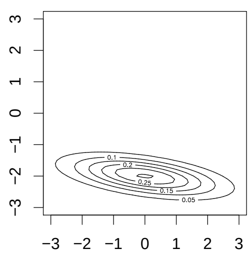
b)



c)

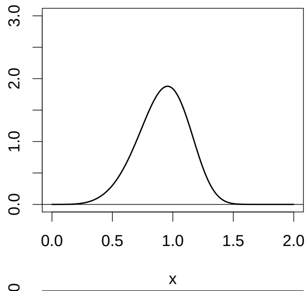


d)



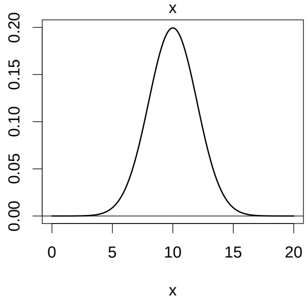
	a)	b)	c)	d)
$\rho < 0$				
$\rho = 0$				
$\rho > 0$				
$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$				
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$				
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$				
$\mu_1 < \mu_2$				
$\mu_1 = \mu_2$				
$\mu_1 > \mu_2$				

Aufgabe 5: (12 Punkte)
Verbinden Sie mit Strichen, was zusammen gehört. Kreuzen Sie außerdem bei den R-Befehlen an, ob damit Zufallszahlen, die Verteilungsfunktion, die Dichte oder die Quantile der Verteilung erzeugt werden.



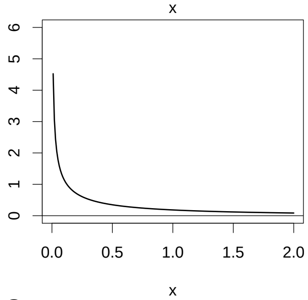
`rbinom(20,size=5,prob=0.5)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil



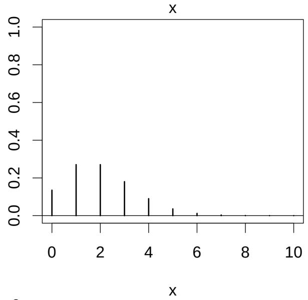
`dpois(2,lambda=2)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil



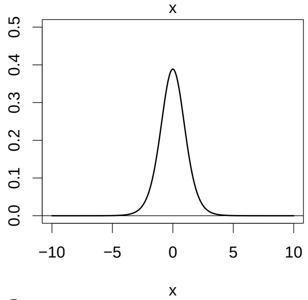
`qweibull(0.4,shape=5,scale=1)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil



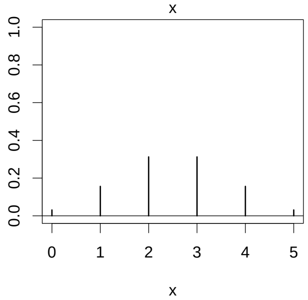
`dweibull(0.2,shape=0.5,scale=1)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil



`pnorm(11,mean=10,sd=2)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil



`qt(0.9,df=10)`

Zufallszahlen	Verteilungsfunktion	Dichte	Quantil

Aufgabe 6: (8 Punkte)

(a) Sei X eine Zufallsgröße, die eine Rechteckverteilung auf $[1,5]$ besitzt. Berechnen Sie $P(2 \leq X \leq 4)$ und $P(2 \leq X \leq 4 | X \leq 3)$.

(b) Sei X eine Zufallsgröße, die eine Normalverteilung mit Parameter $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 9$ besitzt, d.h. $X \sim N(2,9)$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X \leq 4)$ so an, dass sie mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormal-Verteilung berechnet werden kann.

(c) Sei X eine Zufallsgröße, die eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 4$ besitzt. Berechnen Sie $P(0 \leq X \leq 5)$ und $P(1 \leq X \leq 6 | X \geq 1)$. Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.

(d) Eine Firma bezieht ein Bauteil von vier Lieferanten A, B, C, D in folgenden Anteilen:

A: 30%, B: 20%, C: 40%, D: 10%.

Der Anteil der fehlerhaften gelieferten Bauteile beträgt bei

$$\text{A: } \frac{10}{100}, \quad \text{B: } \frac{5}{100}, \quad \text{C: } \frac{5}{100}, \quad \text{D: } \frac{90}{100}.$$

Die Firma baut zufällig eins von den gelieferten Bauteilen ein. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das eingebaute Bauteil fehlerhaft ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes eingebautes Bauteil von der Firma A stammt?

Aufgabe 7: (14 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und Y ist durch folgende Tabelle gegeben:

$P(X=i, Y=j)$		Y 1	2	3	$P(X=i)$
X	1	$\frac{1}{20}$	0		0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y=j)$					

(a) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle. Benennen Sie die Randverteilungen! (2 Punkte)

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie die Antwort. (1 Punkte)

(c) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $Z = 2X + Y$? (1 Punkte)

(d) Berechnen Sie $\mathtt{E}(X)$, $\mathtt{Var}(X)$, $\mathtt{E}(Y)$, $\mathtt{Var}(Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$. (10 Punkte)

Aufgabe 8: (6 Punkte)
Tragen Sie entweder F (für Falsch) oder T (für True=Richtig) ein. Schreiben Sie F bzw. T deutlich. Wenn T und F nicht unterscheidbar sind, wird die Antwort als nicht gegeben bewertet.
Hinweis: Bei Multiple Choice Fragen führen falsche Antworten zu Punktabzügen. In jeder Teilaufgabe wird jedoch keine negative Punktzahl angerechnet. Es können mehrere Antworten korrekt sein! Für jede Teilaufgabe sind maximal 2 Punkte erreichbar. Anmerkung: In der Klausur wird es nur 3 Teilaufgaben geben.

(a) Seien A, B Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P).
Wann gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$?

- ☐ immer
- ☐ falls A Teilmenge von B ist
- ☐ falls $A \cap B$ leer ist
- ☐ falls A und B stochatisch unabhängig sind

(b) Welche Eigenschaften des Erwartungswertes sind richtig?

- ☐ $\mathtt{E}(X - Y) = \mathtt{E}(X) - \mathtt{E}(Y)$
- ☐ $\mathtt{E}(X \cdot Y) = \mathtt{E}(X) \cdot \mathtt{E}(Y)$, falls X und Y stochastisch unabhängig sind
- ☐ $\mathtt{E}(X \cdot Y) = \mathtt{E}(X) \cdot \mathtt{E}(Y)$ für beliebige Zufallsvariablen X und Y
- ☐ $\mathtt{E}(X - \mathtt{E}X) = 0$

(c) Welche Eigenschaften der Varianz sind richtig?

- ☐ $\mathtt{Var}X \geq 0$
- ☐ $\mathtt{Var}(X + Y) = \mathtt{Var}X + \mathtt{Var}Y$ für beliebige Zufallsvariablen X und Y
- ☐ $\mathtt{Var}(aX) = a^2 \mathtt{Var}X$
- ☐ $\mathtt{Var}X = \mathtt{E}X^2 - (\mathtt{E}X)^2$

(d) Für die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X gilt **immer**:

- ☐ $F(x) = P(X \leq x)$
- ☐ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ für $a < b$
- ☐ F ist monoton steigend
- ☐ F ist eine Treppenfunktion

(e) Seien X und Y normal verteilte Zufallsgrößen mit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Was gilt dann immer?

- ☐ $X + 2Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + 2\mu_2, \sigma_1^2 + 2\sigma_2^2)$.
- ☐ $aX - Y \sim \mathcal{N}(a\mu_1 - \mu_2, a^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, falls X und Y stochastisch unabhängig sind.
- ☐ $X/Y \sim \mathcal{N}(\mu_1/\mu_2, \sigma_1^2/\sigma_2^2)$.

Aufgabe 9: (20 Punkte)
Seien `xdata` und `ydata` Datenvektoren. Geben Sie an, welche Hypothesen und Alternativen mit den folgenden Tests beantwortet werden können. Geben Sie außerdem an, für wie viele Stichproben und ob für univariate oder bivariate Daten diese Test geeignet sind. Nennen Sie die Voraussetzungen, wann diese Tests verwendet werden dürfen. Zu den Voraussetzungen zählen insbesondere Annahmen an den Datentyp und Verteilungsannahmen.

`chisq.test(table(xdata,ydata))`			
Hypothese H_0 Alternative H_1	1 oder 2 Stichproben	uni- oder bi- variate Daten	Voraussetzungen

`var.test(xdata,ydata,alternative=''less''`			
Hypothese H_0 Alternative H_1	1 oder 2 Stichproben	uni- oder bi- variate Daten	Voraussetzungen

`t.test(xdata,ydata,alternative=''greater'',var.equal=T`			
Hypothese H_0 Alternative H_1	1 oder 2 Stichproben	uni- oder bi- variate Daten	Voraussetzungen

`cor.test(xdata,ydata,alternative=''two.sided'',method=''pearson'')`			
Hypothese H_0 Alternative H_1	1 oder 2 Stichproben	uni- oder bi- variate Daten	Voraussetzungen

`wilcox.test(xdata,alternative=''less'',mu=1)`			
Hypothese H_0 Alternative H_1	1 oder 2 Stichproben	uni- oder bi- variate Daten	Voraussetzungen