Statistik V - Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. Christine Müller
Technische Universität Dortmund

Wintersemester 2010/2011

Literatur:

R.B. Ash (19972). Real Analysis and Probability. Academic Press.

H. Bauer (1968). Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. De Gruyter.

P. Billingsley (1995). Probability and Measure. Wiley.

L. Breiman (1968). Probability. Addison-Wesley Educational Publishers Inc.

P. Gänssler, W. Stute (1977). Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer.

A. Klenke (2007). Probability Theory: A Comprehensive Course. Springer.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Maß- und Integrationstheorie

1 Fortsetzung von Maßen

1.1 Folgen von Mengen

1.1.1 Bezeichnung

a) A^c bezeichnet das Komplement einer Menge A, d.h. $A^c = \Omega \setminus A$, wenn Ω der Grundraum ist.

b) $\emptyset$ ist die leere Menge.

c) $\mathscr{P}(\Omega) := \{A;\ A \subset \Omega\}$ ist die Potenzmenge von Ω.

1.1.2 Satz (Gesetze von De Morgan)

Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

a) $\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c$.

b) $\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^c$.

1.1.3 Satz

Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

a) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots \cup (A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$,

b) $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty (A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$.

Gilt zusätzlich $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$, so folgt

c) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1})$,

d) $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus A_{n-1})$ *mit* $A_0 = \emptyset$.

1.1.4 Definition

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega;\ \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}\\ &= \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega;\ \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\}\\ &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} A_n$ *existiert, falls* $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$,
und dann gilt
$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} An$.

1.1.5 Satz

a) Gilt $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$ *und* $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A$ *so gilt* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

b) Gilt $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ *und* $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = A$ *so gilt* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

1.1.6 Bezeichnung

a) Für $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ schreiben wir $A_n \uparrow A$.

b) Für $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ schreiben wir $A_n \downarrow A$.

1.1.7 Satz

a) Aus $A_n \uparrow A$ *folgt* $A_n^c \downarrow A^c$.

b) Aus $A_n \downarrow A$ *folgt* $A_n^c \uparrow A^c$.

c) $(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n^c$.

d) $(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n^c$.

e) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

1.1.1 Übungsaufgabe

Beweisen Sie die Sätze 1.1.3, 1.1.5 und 1.1.7.

1.1.2 Übungsaufgabe

Definiere Teilmengen der reellen Zahlen wie folgt: $A_n = (-1/n, 1]$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (-1, 1/n]$ für gerades $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

1.1.3 Übungsaufgabe

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $A_n = (-\infty, x_n)$. Was ist die Beziehung zwischen $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$?

1.2 Mengensysteme

1.2.1 Definition (Ring)
Ist $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge, dann heißt ein Mengensystem $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ein Ring über $\Omega \iff$
(i) $\emptyset \in \mathscr{R}$,
(ii) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{R}$,
(iii) $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{R}$.

1.2.2 Definition (Dynkin-System, Algebra, σ-Algebra))
Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge.
a) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *heißt Dynkin-System über* Ω: $\iff$
(i) $\Omega \in \mathscr{A}$,
(ii) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$,
(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ *paarweise disjunkt, d.h.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

b) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *heißt Algebra (algebra, field) über* Ω: $\iff$ *(i), (ii) und*
(iv) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

c) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *heißt* σ*-Algebra über* Ω: $\iff$ *(i), (ii) und*
(v) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

1.2.3 Bemerkung
Gilt $\Omega \in \mathscr{R}$ für den Ring $\mathscr{R}$, so ist $\mathscr{R}$ eine Algebra.

1.2.4 Lemma
Eine σ*-Algebra* $\mathscr{A}$ *ist abgeschlossen bzgl. abzählbarer Mengenoperationen, z. B.*

$$(A_n \in \mathscr{A})_{n\in\mathbb{N}} \overset{(ii)}{\Rightarrow} (A_n^c \in \mathscr{A})_{n\in\mathbb{N}} \overset{(iv)}{\Rightarrow} \bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathscr{A} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathscr{A}.$$

1.2.5 Satz (Erzeugte σ-Algebra)
Ist $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, *dann gibt es eine kleinste von* $\mathscr{E}$ *erzeugte* σ*-Algebra* $\sigma(\mathscr{E})$, *d.h.*
a) $\sigma(\mathscr{E})$ *ist* σ*-Algebra,*
b) $\mathscr{E} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$,
c) $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{A}$ *und* $\mathscr{A}$ σ*-Algebra* $\Rightarrow \sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{A}$.

Beweis
Betrachte $\sigma(\mathscr{E}) := \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} \mathscr{A}$, wobei $\mathbb{A}(\mathscr{E}) = \{\mathscr{A};\ \mathscr{A}\ \sigma\text{-Algebra und } \mathscr{E} \subset \mathscr{A}\}$.
Dann gilt $\mathbb{A}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, da $\mathscr{P}(\Omega)$ σ-Algebra ist und $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Damit ist $\sigma(\mathcal{E})$ wohldefiniert.
Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathscr{E})$ eine σ-Algebra ist:

(i) $\bigwedge_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} \Omega \in \mathscr{A} \Rightarrow \Omega \in \sigma(\mathscr{E})$

(ii) $A \in \sigma(\mathscr{E}) \Rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} A \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigwedge_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} A^c \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathscr{E})$

(iii) $(A_n \in \sigma(\mathscr{E}))_{n\in\mathbb{N}} \;\Rightarrow\; \bigwedge_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} (A_n \in \mathscr{A})_{n\in\mathbb{N}} \;\Rightarrow\; \bigwedge_{\mathscr{A}\in\mathbb{A}(\mathscr{E})} \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \sigma(\mathscr{E})$.

□

1.2.6 Beispiel

(i) Ω abzählbar (endlich oder unendlich)

$\mathscr{E} = \{\{\omega\};\ \omega \in \Omega\}$ das System der Elementarereignisse

$\Rightarrow \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{P}(\Omega)$.

(ii) Ω überabzählbar

$\mathscr{E} = \{\{\omega\};\ \omega \in \Omega\}$

$\Rightarrow \sigma(\mathscr{E}) = \{A;\ A \in \mathscr{P}(\Omega),\ A$ abzählbar oder $\overline{A}$ abzählbar $\}$.

1.2.7 Lemma

Ein Dynkin-System $\mathscr{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es durchschnittsstabil ist, d.h. es gilt $D_1 \cap D_2 \in \mathscr{D}$ für alle $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$.

Beweis

Es muss nur gezeigt werden, dass ein durchschnittsstabiles Dynkinsystem eine σ-Algebra ist. Dazu muss nur Eigenschaft (v) aus Definition 1.2.2 gezeigt werden. Für alle $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ gilt wegen der Durchschnittsstabilität und (ii) und (iii) in Definition 1.2.2:

$$\begin{aligned} D_2 \setminus D_1 &= D_2 \cap D_1^c \in \mathscr{D}, \\ D_1 \cup D_2 &= (D_1 \setminus D_2) \cup (D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \setminus D_1) \in \mathscr{D}. \end{aligned} \tag{1}$$

Seien nun $A_n \in \mathscr{D}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebig. Mit Induktion folgt aus (1) $D_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Definition 1.2.2 (i) und (ii) gilt auch $D_0 := \emptyset \in \mathscr{D}$. Damit folgt mit Eigenschaft (iii) aus Definition 1.2.2

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D_{n+1} \setminus D_n) \in \mathscr{D}.$$

□

1.2.8 Lemma

Ist $\mathscr{E}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger, d.h. es gilt $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{E}$ für alle $E_1, E_2 \in \mathscr{E}$, dann gilt

$$\mathscr{D}(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E}),$$

wobei $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System ist.

Beweis

Wegen $\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$ und Lemma 1.2.7 muss nur noch gezeigt werden, dass $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ durchschnittsstabil ist. Sei für $D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$

$$\mathscr{D}_D := \{Q \in \mathscr{P}(\Omega);\ Q \cap D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})\}.$$

$\mathscr{D}_D$ ist Dynkin-System, denn (i) und (iii) aus Definition 1.2.2 gelten offensichtlich und Eigenschaft (ii) folgt aus:

$$\begin{aligned} & Q \in \mathscr{D}_D \Longrightarrow Q \cap D \in \mathscr{D}(\mathscr{E}) \\ \Longrightarrow \quad & Q \cup D^c = (Q \cap D) \cup D^c \in \mathscr{D}(\mathscr{E}) \Longrightarrow Q^c \cap D = (Q \cup D^c)^c \in \mathscr{D}(\mathscr{E}) \Longrightarrow Q^c \in \mathscr{D}_D. \end{aligned}$$

Da $\mathscr{E}$ durchschnittsstabil ist gilt $\mathscr{E} \subset D_E$ für alle $E \in \mathscr{E}$ und somit $\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset D_E$ für alle $E \in \mathscr{E}$. Somit gilt für alle $D \in \mathscr{D}(\mathscr{E}), E \in \mathscr{E}$:

$$D \in \mathscr{D}_E \Longrightarrow D \cap E \in \mathscr{D}(\mathscr{E}) \Longrightarrow E \in \mathscr{D}_D,$$

also $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_D$ für alle $D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ und somit $\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_D$ für alle $D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$. Die letzte Eigenschaft bedeutet aber: $\forall \tilde{D} \in \mathscr{D}(\mathscr{E}), D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ gilt $\tilde{D} \in \mathscr{D}_D$, d.h. $\tilde{D} \cap D \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$. □

1.2.9 Definition (Borel-σ-Algebra)
Sei $\Omega = \mathbb{R}$ (bzw. $\Omega = \mathbb{R}^p$) und $\mathscr{E} = \{[a,b];\ a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$ (bzw. $\mathscr{E}_p = \{[a,b];\ a = (a_1,\dots,a_p)^\top,\ b = (b_1,\dots,b_p)^\top \in \mathbb{R}^p,\ a \leq b\}$, wobei $a \leq b$ gilt, falls $a_i \leq b_i$ für $i = 1,\dots,p$ gilt). Dann heißt $\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{E})$ (bzw. $\mathscr{B}_p := \sigma(\mathscr{E}_p)$) die ***Borel-$\sigma$-Algebra über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^p$).***

1.2.10 Bemerkung
$\mathscr{B}_p$ lässt sich auch durch das System

$$\mathscr{E}'_p = \{(-\infty, b];\ b \in \mathbb{R}^p\}$$

erzeugen, d. h. $\mathscr{B}_p = \sigma(\mathscr{E}'_p)$, denn: Für jedes $(-\infty, b] \in \mathscr{B}_p$ gilt:

$$(-\infty, b] = \bigcup_{n \geq 1} [-n\ 1_p\ ,\ b] \in \sigma(\mathscr{E}_p)$$

mit $1_p = (1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^p$ und der Konvention $[a,b] := \emptyset$, falls nicht $a \leq b$ gilt. Somit gilt $\sigma(\mathscr{E}'_p) \subseteq \mathscr{B}_p$. Andererseits gilt für jedes $[a,b] \in \mathscr{E}_p$:
$[a,b] = \bigcap_{n \geq 1} (a^{(n)}, b]$ mit $a^{(n)} = a - \frac{1}{n} 1_p$ und
$(a^{(n)},\ b] = (-\infty, b] \setminus \bigcup_{\pi=1}^{p} (-\infty, a^{(n)}(\pi)] \in \sigma(\mathscr{E}'_p)$,
wobei $a^{(n)}(\pi) = (a_1^{(n)}(\pi),\dots,a_p^{(n)}(\pi))^T$ mit $a_\varrho^{(n)}(\pi) = \begin{cases} b_\varrho & \text{für } \varrho \neq \pi \\ a_\pi^{(n)} & \text{für } \varrho = \pi \end{cases}$.
Folglich $[a,b] \in \sigma(\mathscr{E}'_p)$ und damit $\mathscr{B}_p \subseteq \sigma(\mathscr{E}'_p)$.
Weitere Erzeuger von $\mathscr{B}_p$ sind z.B. (dabei gelte $a < b \Leftrightarrow a_i < b_i$ für $i = 1,\dots,p$):

(i) $\mathscr{E}_p^1 = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R}^p,\ a < b\} = \{\{x \in \mathbb{R}^p;\ a < x < b\};\ a,b \in \mathbb{R}^p\ a < b\}$,

(ii) $\mathscr{E}_p^2 = \{(a,b];\ a,b \in \mathbb{R}^p,\ a \leq b\} = \{\{x \in \mathbb{R}^p;\ a < x \leq b\};\ a,b \in \mathbb{R}^p\ a \leq b\}$,

(iii) $\mathscr{E}_p^3 = \{(-\infty, b);\ b \in \mathbb{R}^p\}$.

(iv) $\mathscr{E}_p^4 = \{O;\ O \subset \mathbb{R}^p \text{ ist offene Menge}\}$.

Eine Menge $O \subset \mathbb{R}^p$ ist dabei offen, wenn für jedes $x \in O$ ein offenes p-dimensionales Intervall (a_x, b_x) existiert mit $x \in (a_x, b_x) \subset O$. Damit gilt $\mathscr{E}_p^1 \subset \mathscr{E}_p^4$ und somit $\sigma(\mathscr{E}_p^1) \subset \sigma(\mathscr{E}_p^4)$. Umgekehrt gilt auch $\mathscr{E}_p^4 \subset \sigma(\mathscr{E}_p^1)$, denn jedes $O \in \mathscr{E}_p^4$ ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen (a_n, b_n), wobei a_n und b_n aus rationalen Komponenten bestehen, d.h. $a_n, b_n \in \mathbb{Q}^p$. Ist nämlich $x \in (a_x, b_x) \subset O$ so gibt es $q(x)$, $a_{q(x)}$, $b_{q(x)} \in \mathbb{Q}^p$ mit $x \in (a_{q(x)}, b_{q(x)}) \subset O$. Da die rationalen Zahlen abzählbar sind, ist somit O eine abzählbare Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{E}_p^1$.

1.2.11 Lemma
Sei $\Omega_0 \subset \Omega$.
a) Ist $\mathscr{A}$ eine (σ-)Algebra über Ω, so ist $\mathscr{A}_0 = \{A \cap \Omega_0;\ A \in \mathscr{A}\}$ eine (σ-)Algebra über Ω_0, die sogenannte **Spur-(σ-)Algebra** *von $\mathscr{A}$ bzgl. Ω_0.*
b) Ist $\mathscr{A}$ eine von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra über Ω, so ist $\mathscr{A}_0 = \{A \cap \Omega_0;\ A \in \mathscr{A}\}$ die von $\mathscr{E}_0 = \{A \cap \Omega_0;\ A \in \mathscr{E}\}$ erzeugte σ-Algebra.

1.2.1 Übungsaufgabe
Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Man gebe

a) die kleinste σ-Algebra über Ω an,

b) die größte σ-Algebra über Ω an,

c) die von $\{\{1\}, \{1, 3, 4\}\}$ erzeugte σ-Algebra über Ω an.

1.2.2 Übungsaufgabe
Man zeige für $p = 1$, dass die in Beispiel 1.2.10 angegebenen Erzeuger $\mathscr{E}_p$, $\mathscr{E}_p^1$ und $\mathscr{E}_p^2$ der Borel-σ-Algebra wirklich die gleichen σ-Algebren erzeugen.
Hinweis: Man zeige, dass jedes Element eines Erzeugers sich durch abzählbare Schnitte und Vereinigungen von Elementen des anderen Erzeugers darstellen läßt.

1.2.3 Übungsaufgabe
Man zeige für $p = 1$, dass die in Beispiel 1.2.10 angegebenen Erzeuger $\mathscr{E}_p$, $\mathscr{E}_p^1$ und $\mathscr{E}_p^2$ der Borel-σ-Algebra keine Algebren sind.
Man zeige aber, dass

$$\mathscr{A}(\overline{\mathbb{R}}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i\,;\ n \in \mathbb{N},\ I_i = (a_i, b_i] \text{ oder } I_i = [-\infty, b_i] \text{ mit } a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}} \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}$$

eine Algebra ist, die die Borel-σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erzeugt. Dabei wird die Borel-σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$ durch $\mathscr{E}(\overline{\mathbb{R}}) = \{[a, b];\ a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leq b\}$ erzeugt.

1.3 Maße

1.3.1 Definition

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring über Ω und $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$.

a) μ heißt endlich additiv: $\Longleftrightarrow$

$A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{R}$ paarweise disjunkt, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $\Longrightarrow$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

b) μ heißt (Prä-)Maß auf $\mathscr{R}$: $\Longleftrightarrow$

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{R} \Longrightarrow$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ (σ-Additivität).

c) Ein Maß μ auf einer Algebra heißt endlich (unendlich), falls $\mu(\Omega) < \infty$ ($\mu(\Omega) = \infty$).

d) Ein Maß μ auf einer Algebra heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(\Omega) = 1$.

e) Ein Maß μ heißt σ-endlich, falls $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ existieren mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $\mu(A_i) < \infty$ für $i = 1, 2, \ldots$.

1.3.2 Definition

a) $(\Omega, \mathscr{A})$ heißt messbarer Raum: $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ ist σ-Algebra über Ω.

b) $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ heißt Maßraum (Wahrscheinlichkeitsraum): $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ ist σ-Algebra über Ω und μ ist (W-)Maß auf $\mathscr{A}$.

1.3.3 Beispiel

Wird im Fall $p = 1$ $\mu(\bigoplus_{n=1}^N (a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^N (b_n - a_n)$ als die aufsummierte Länge der Intervalle $(a_n, b_n]$ definiert und im Fall $p > 1$ $\mu(\bigoplus_{n=1}^N (a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^p (b_{ni} - a_{ni})$ als der aufsummierte Flächen-/Rauminhalt der mehrdimensionalen Intervalle $(a_n, b_n]$ definiert, so ist $\mu : \mathscr{R}_p \to [0, \infty)$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathscr{R}_p = \{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i];\ a_i, b_n \in \mathbb{R}^p,\ a_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.3.4 Lemma

Ist μ ein Maß auf einer Algebra $\mathscr{A}$, dann gilt:

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathscr{A}$,

b) $A, B \in \mathscr{A},\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$,

c) $A_1, A_2 \ldots \in \mathscr{A},\ \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$,

d) $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathscr{A},\ A_n \uparrow A \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$,

e) $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathscr{A},\ A_n \downarrow A,\ \mu(A_1) < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

1.3.5 Lemma

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Algebra $\mathscr{A}$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, $A_1', A_2', \ldots \in \mathscr{A}$, $A_n \uparrow A$, $A_n' \uparrow A'$ und $A \subset A'$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n')$.

1.3.1 Übungsaufgabe

Beweisen Sie Lemma 1.3.4.

1.3.2 Übungsaufgabe

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathscr{R} = \{A \subset \Omega; ; \sharp A < \infty\}$ und $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ gegeben durch $\mu(A) = \sharp A$, wobei $\sharp A$ die Anzahl der Elemente in A bezeichnet.

a) Für welches Ω ist $\mathscr{R}$ ein Ring über Ω?

b) Für welches Ω ist μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$?

1.3.3 Übungsaufgabe

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω, $\omega_0 \in \Omega$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega_0 \notin A, \\ 1, & \text{falls } \omega_0 \in A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ ist. Es ist das sogenannte Dirac-Maß.

1.3.4 Übungsaufgabe

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \left\{A \subset \Omega;\ A \text{ ist abzählbar oder } \overline{A} \text{ ist abzählbar } \right\}$ und $\mu : \mathscr{A} \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{falls } \overline{A} \text{ abzählbar ist.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

b) Zeigen Sie, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ ist.

1.4 Fortsetzung von Maßen

1.4.1 Lemma

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Algebra, $\mathscr{G} = \{A \subset \Omega;\ \exists A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ mit $A_n \uparrow A\}$ und für alle $A \in \mathscr{G}$ sei $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$, falls $A_n \uparrow A,\ A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$. Dann gilt für $\mathscr{G}$ und $\mu : \mathscr{G} \longrightarrow [0, \infty]$:
a) μ ist wohldefiniert,
b) $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$,
c) $\mu(A) = P(A)$ für $A \in \mathscr{A}$,
d) $G_1, G_2 \in \mathscr{G} \Longrightarrow G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 \in \mathscr{G}$ und $\mu(G_1 \cup G_2) + \mu(G_1 \cap G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2)$,
e) $G_1, G_2 \in \mathscr{G}, G_1 \subset G_2 \Longrightarrow \mu(G_1) \le \mu(G_2)$,
f) $G_n \in \mathscr{G},\ n = 1, 2, \ldots,\ G_n \uparrow G \Longrightarrow G \in \mathscr{G}$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n) = \mu(G)$.

1.4.2 Lemma

Sei $\mathscr{G}$ und $\mu : \mathscr{G} \longrightarrow [0, \infty]$ so, dass $\emptyset, \Omega \in \mathscr{G}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$ sowie d), e) und f) aus Lemma 1.4.1 gelten. Definiere für jedes $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G);\ G \in \mathscr{G},\ G \supset A\}.$$

Dann gilt:
a) $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{G}$, $0 \le \mu^*(A) \le 1$ für alle $A \subset \Omega$,
b) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$,
c) $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$,
d) $A_n \uparrow A \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$.

1.4.3 Definition

$\lambda : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty)$ heißt äußeres Maß auf Ω: $\Longleftrightarrow$
(i) $\lambda(\emptyset) = 0$,
(ii) $A \subset B \Longrightarrow \lambda(A) \le \lambda(B)$ (Monotonie),
(iii) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i)$ (σ-Subadditivität).

1.4.4 Lemma

Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra und $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty]$ endlich addititiv.
a) Gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ für alle $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathscr{A}$ mit $A_n \uparrow A$ (σ-Stetigkeit von unten), so ist μ σ-additiv.
b) Gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ für alle $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathscr{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ (σ-Stetigkeit von oben gegen die leere Menge), so ist μ σ-additiv.

1.4.5 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.4.2 gilt:

$$\mathscr{H} := \{H \subset \Omega;\ \mu^*(H) + \mu^*(H^c) = 1\}$$

ist σ-Algebra und μ^* ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{H}$.

1.4.6 Satz
Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Algebra $\mathscr{A}$. Dann ist μ^* ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathscr{A})$ und es gilt $\mu^*(A) = P(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$, d.h. $\mu^* : \sigma(\mathscr{A}) \longrightarrow [0,1]$ *ist die Fortsetzung* von $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$.

1.4.7 Lemma (Monotone Class Theorem)
Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra über Ω und $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ sei monotones Mengensystem, d.h. $A_n \in \mathscr{G}$, $A_n \uparrow A$ oder $A_n \downarrow A \Longrightarrow A \in \mathscr{G}$. Aus $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$ folgt dann $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{G}$.

1.4.8 Satz (Carathéodory's Fortsetzungssatz)
Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra über Ω und μ ein σ-endliches Maß auf $\mathscr{A}$. Dann hat μ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß μ^* auf $\sigma(\mathscr{A})$.

1.4.9 Satz (Approximationssatz*)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ eine Maßraum, $\mathscr{A}_0$ eine Algebra über Ω mit $\sigma(\mathscr{A}_0) = \mathscr{A}$ und μ σ-endlich auf $\mathscr{A}_0$. Ist $A \in \mathscr{A}$ und $\mu(A) < \infty$, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathscr{A}_0$ mit $\mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) < \epsilon$.

1.4.10 Lemma
Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra und $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty]$ endlich addititiv. Gibt es für alle $A \in \mathscr{A}$ und $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathscr{A}$ und eine kompakte Menge $C \subset \Omega$ mit $A \supset C \supset B$ und $\mu(A \setminus B) < \epsilon$, dann ist μ σ-additiv.
($(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt und $\bigcap_{i=1}^n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^\infty \neq \emptyset$.)

Betrachte wieder die Algebra

$$\mathscr{A}(\overline{\mathbb{R}}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^n I_i\,;\ n \in \mathbb{N},\ I_i = (a_i, b_i] \text{ oder } I_i = [-\infty, b_i] \text{ mit } a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}} \text{ für } i = 1, \dots, n \right\},$$

die die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\overline{R})$ über $\overline{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erzeugt.

1.4.11 Satz
Sei $F : \overline{R} \to \overline{R}$ monoton wachsend und rechtseitig stetig. Ist

$$\mu(I) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{falls } I = (a,b],\ a, b \in \overline{R}, \\ F(b) - F(-\infty), & \text{falls } I = [-\infty, b],\ b \in \overline{R}, \end{cases}$$

und $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$, falls $I_1, \dots, I_n$ paarweise disjunkt sind, dann ist μ ein Maß auf $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{R}})$ und es besitzt eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathscr{B}(\overline{R})$.

1.4.12 Definition
Ist $F(x) = x$, so heißt das durch Satz 1.4.11 gegebene Maß auf $\mathscr{B}(\overline{R})$ das Lebesgue-(Borel)-Maß und wird mit λ bezeichnet.

1.4.13 Beispiel (Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^p$)
Mittels des Satzes 1.4.8 kann nicht nur das in Beispiel 1.3.3 definierte Längenmaß eindeutig fortgesetzt werden, sondern auch die in Beispiel 1.3.3 definierten Flächen- und Rauminhalts-Prämaße können eindeutig zu einem Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_p$ fortgesetzt werden. Diese Maße werden auch **Lebesgue-Maße** genannt und mit λ_p im p-dimensionalen Fall bezeichnet.

1.4.14 Definition
Ein Maß μ auf $\mathscr{B}(\overline{R}^p)$ heißt Lebesgue-Stieltjes-Maß (LS-Maß), falls $\mu((a,b]) < \infty$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^p$ gilt.
($(a,b] = ((a_1,\ldots,a_p),(b_1,\ldots,b_p)] := \{(x_1,\ldots .x_p) \in \mathbb{R}^p;\ a_i < x_i \le b_i,\ i = 1,\ldots,p\}$)

1.4.15 Satz (Eindeutigkeitssatz)
Sei $\mathscr{E}$ ein Erzeuger einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ und μ_1 und μ_2 Maße auf $\mathscr{A}$. Gilt

(i) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ *für alle* $E \in \mathscr{E}$,

(ii) $E_1, E_2 \in \mathscr{E} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathscr{E}$,

(iii) *es gibt* $(E_n \in \mathscr{E})_{n\ge 1}$ *mit* $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *und* $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$,

so gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{A}$.

Beweis
Sei $E \in \mathscr{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Dann betrachte man das System

$$\mathscr{D}_E := \{D \in \mathscr{A};\ \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}.$$

$\mathscr{D}_E$ ist ein Dynkin-System, denn es gilt: $\Omega \in \mathscr{D}_E$. Für $D \in \mathscr{D}_E$ gilt außerdem

$$\mu_1(E \cap D^c) = \mu_1(E \setminus (E \cap D^c)) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D^c) = \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D^c) = \mu_2(E \cap D^c)$$

also D^c in $\mathscr{D}_E$, so dass auch Eigenschaft (iii) der Definition eines Dynkinsystems erfüllt ist. Sind ferner $D_1, D_2, \ldots$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\begin{aligned}\mu_1\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n\right)\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^\infty (E \cap D_n)\right)\\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu_1(E \cap D_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_2(E \cap D_n) = \mu_2\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n\right)\right),\end{aligned}$$

also $\bigcup_{n=1}^\infty D_n \in \mathscr{D}_E$, so dass auch Eigenschaft (ii) der Definition eines Dynkinsystems erfüllt ist. Da $\mathscr{E}$ durchschnittsstabil ist, gilt $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_E$ und somit mit Lemma 1.2.8 $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{D}(\mathscr{E})$. Da $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System ist und $\mathscr{D}_D$ ein Dynkin-System ist, das $\mathscr{E}$ enthält, gilt $\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_D \subset \mathscr{A}$. Also gilt $\mathscr{D}_D = \mathscr{A}$ und somit $\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)$ für alle $D \in \mathscr{A}$.
Für die Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ ist dann auch $\mu_1(E_n \cap D) = \mu_2(E_n \cap D)$ für alle $D \in \mathscr{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt und es gilt $E_n \cap D \uparrow D$ für alle $D \in \mathscr{A}$. Somit folgt mit der σ-Stetigkeit des Maßes

$$\mu_1(D) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(E_n \cap D) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(E_n \cap D) = \mu_2(D)$$

für alle $D \in \mathbb{A}$. □

1.4.16 Bemerkung
Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$. Dann ist die p-dimensionale Verteilungsfunktion als

$$F(x) := P((-\infty, x]) = P(\{(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p;\ y_1 \leq x_1, \dots, y_p \leq x_p\})$$

definiert. Wegen des Eindeutigkeitssatzes legt eine Verteilungsfunktion auch im p-dimensionalen Fall das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig fest.

1.4.1 Übungsaufgabe (Fortsetzung von Übungsaufgabe 1.3.2)
Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathscr{R} = \{A \subset \Omega;; \sharp A < \infty\}$ und $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ gegeben durch $\mu(A) = \sharp A$.

c) Für welches Ω lässt sich μ auf die von $\mathscr{R}$ erzeugte σ-Algebra fortsetzen?
d) Für welches Ω gibt es eine eindeutige Fortsetzung von μ auf $\mathcal{P}(\Omega)$?

1.4.2 Übungsaufgabe
Sei Ω die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$,

$$\mathscr{A} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q};\ a, b \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\} \cup \{\mathbb{Q}\},$$

$\sigma(\mathscr{A})$ die von $\mathscr{A}$ erzeugte σ-Algebra und $\mu(A) = \sharp A$ für $A \in \sigma(\mathscr{A})$. Zeigen Sie:
a) $\sigma(\mathscr{A})$ besteht aus allen Teilmengen von $\mathbb{Q}$, d.h. $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{Q})$.
b) μ ist ein Maß sowohl auf $\mathscr{A}$ als auch $\sigma(\mathscr{A})$, aber es ist nur σ-endlich auf $\sigma(\mathscr{A})$. Auf $\mathscr{A}$ ist es kein σ-endliches Maß.
c) Es gibt Mengen $A \in \sigma(\mathscr{A})$ mit $\mu(A) < \infty$, die nicht durch Mengen aus $\mathscr{A}$ approximiert werden können, d.h. es gibt keine Folge $A_n \in \mathscr{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mu((A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A)) = 0$.
d) Ist $\lambda = 2\mu$, dann gilt $\lambda = \mu$ auf $\mathscr{A}$ aber nicht auf $\sigma(\mathscr{A})$.

2 Das Maß-Integral

2.1 Messbare Funktionen

2.1.1 Definition (Messbare Abbildung, Zufallsvariable)
Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ *und* $(\Omega', \mathscr{B})$ *messbare Räume und* $\mathscr{B}_p$ *die Borel-*σ*-Algebra auf* $\overline{\mathbb{R}}^p$.

(i) *Eine Abbildung* $f: \Omega \ni \omega \to f(\omega) \in \Omega'$ *heißt* $\mathscr{A}$***-***$\mathscr{B}$***-messbar***
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{B \in \mathscr{B}} f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega; f(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}.$$

(ii) *Eine Abbildung* $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^p$ *heißt* ***(Borel)-messbar****, falls* f $\mathscr{A} - \mathscr{B}_p$*-messbar ist.*

(iii) *Eine Abbildung* $X: \Omega \ni \omega \to X(\omega) \in \Omega'$ *heißt* ***Zufallsvariable (zufälliges Element)*** *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mit Werten in* $(\Omega', \mathscr{B})$*, falls* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und* X $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}$*-messbar ist.*

2.1.2 Satz (Charakterisierung der Messbarkeit)
Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ *und* $(\Omega', \mathscr{B})$ *messbare Räume und* $\mathscr{E}$ *ein Erzeuger von* $\mathscr{B}$*. Dann ist* f $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}$*-messbar*
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{E \in \mathscr{E}} f^{-1}(E) \in \mathscr{A}.$$

Beweis

$\Leftarrow$: Das System $\mathscr{C}$ aller Mengen $C \in \mathscr{P}(\Omega')$ mit $f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra über Ω'. Folglich gilt $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ genau dann, wenn $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$ ist. Nach Voraussetzung gilt $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$, was $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ impliziert. $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ ist aber gleichbedeutend mit der Messbarkeit von f. $\square$

2.1.3 Satz (Kriterium für reelwertige messbare Abbildungen)
Sei $\mathscr{B}_p$ *die Borel-*σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}^p$ *und* $\mathscr{A}$ *eine* σ*-Algebra auf* Ω*. Dann ist* $f: \Omega \ni \omega \longrightarrow f(\omega) \in \mathbb{R}^p$ $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}_p$*-messbar*
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{b \in \mathbb{R}^p} f^{-1}((-\infty, b]) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \leq b\} \in \mathscr{A},$$
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{b \in \mathbb{R}^p} f^{-1}((-\infty, b)) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) < b\} \in \mathscr{A},$$
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{b \in \mathbb{R}^p} f^{-1}([b, \infty)) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \geq b\} \in \mathscr{A},$$
$\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{b \in \mathbb{R}^p} f^{-1}((b, \infty)) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) > b\} \in \mathscr{A}.$$

Beweis

Der Beweis folgt mit Satz 2.1.2 aus der Tatsache, dass $\{(-\infty, b];\ b \in R^p\}$, $\{(-\infty, b);\ b \in R^p\}$, $\{[b, \infty);\ b \in R^p\}$, $\{(b, \infty);\ b \in R^p\}$ Erzeuger von $\mathscr{B}_p$ sind. □

2.1.4 Folgerung

$$f : \Omega \ni \omega \longrightarrow f(\omega) := \begin{pmatrix} f_1(\omega) \\ \vdots \\ f_p(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ ist } \mathscr{A}\text{-}\mathscr{B}_p\text{-messbar}$$

$\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\pi=1,\dots,p} f_\pi : \Omega \ni \omega \to f_\pi(\omega) \in \mathbb{R} \text{ ist } \mathscr{A}\text{-}\mathscr{B}\text{-messbar.}$$

Beweis

Mit Hilfe des Kriteriums 2.1.3:

"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} f_\pi \quad ((-\infty, b_\pi]) &= \{\omega;\ f_\pi(\omega) \le b_\pi\} \\ &= \bigcup_{n\ge 1} \{\omega;\ f_\pi(\omega) \le b_\pi,\ f_\varrho(\omega) \le n,\ \varrho = 1, \dots, p, \varrho \ne \pi\} \\ &= \bigcup_{n\ge 1} \{\omega;\ f(\omega) \le b^{(n)}\} \in \ \mathscr{A}, \end{aligned}$$

wobei $b^{(n)} \in \mathbb{R}^p$ mit $b_\pi^{(n)} = b_\pi$ und $b_\varrho^{(n)} = n$ für $\varrho \ne \pi$.

"$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty,\ b]) &= \{\omega;\ f(\omega) \le b\} \\ &= \bigcap_{\pi=1}^{p} \{\omega;\ f_\pi(\omega) \le b_\pi\} \in \ \mathscr{A} \text{ falls } b = (b_1, \dots, b_p)^\top. \end{aligned}$$

□

2.1.5 Satz

Sei $\mathscr{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, so gilt

$$\begin{aligned} \{f < g\} &:= \{\omega;\ f(\omega) < g(\omega)\} \in \mathscr{A}, \qquad & \{f \le g\} &:= \{\omega;\ f(\omega) \le g(\omega)\} \in \mathscr{A}, \\ \{f = g\} &:= \{\omega;\ f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathscr{A}, \qquad & \{f \ne g\} &:= \{\omega;\ f(\omega) \ne g(\omega)\} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Beweis

Da die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist, folgt die Behauptung mit Hilfe des Kriteriums 2.1.3 aus

$$\begin{aligned} \{f < g\} &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{q < g\}, \qquad & \{f \le g\} &= \overline{\{f > g\}}, \\ \{f = g\} &= \{f \le g\} \cap \{f \ge g\}, \qquad & \{f \ne g\} &= \overline{\{f = g\}}. \end{aligned}$$

□

2.1.6 Satz

Sei $\mathscr{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $a, c \in \mathbb{R}$. Sind $f, g, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, so sind auch

$$af + c,\quad f^2,\quad |f|,\quad f+g,\quad f-g,\quad f*g,\quad f/g,\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, falls sie wohldefiniert sind, d.h. weder $\infty - \infty$ noch ∞/∞ vorkommt noch durch 0 geteilt wird.

Beweis

Mit dem Kriterium 2.1.3 ist mit f zunächst auch $af + c$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, denn $\{af + c \le b\} = \{f \le \frac{b-c}{a}\} \in \mathscr{A}$ für alle $b \in \mathbb{R}$, falls $a > 0$, und $\{af + c \le b\} = \{f \ge \frac{b-c}{a}\} \in \mathscr{A}$ für alle $b \in \mathbb{R}$, falls $a < 0$ (der Fall $a = 0$ ist trivial).
Ebenso ist wegen $\{f^2 \le b\} = \{f \le \sqrt{b}\} \cap \{f \ge -\sqrt{b}\}$ auch f^2 messbar.
Mit g ist dann auch $b - g$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar. Damit gilt

$$\{f + g \le b\} = \{f \le b - g\} \in \mathscr{A},$$

weshalb $f + g$ nach Satz 2.1.5 $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar ist. Die Messbarkeit von $f * g$ folgt aus

$$f * g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

Wegen $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \le b\} \in \mathscr{A}$ für alle $b \in \mathbb{R}$, ist auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ folgt die Messbarkeit von $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Der Rest folgt aus

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\ge n} f_m,\quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\ge n} f_m.$$

□

2.1.7 Satz

a) Ist $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ stetig, so ist f $\mathscr{B}_p$-$\mathscr{B}_q$-messbar.
b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend, dann ist f $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_1$-messbar.
c) Ist $f : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{A} - \mathscr{A}'$-messbar und ist $g : \Omega' \to \Omega''$ $\mathscr{A}' - \mathscr{A}''$-messbar, so ist die Hintereinanderausführung $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ $\mathscr{A} - \mathscr{A}''$-messbar.

Beweis

a) Sei $\mathscr{E}_p = \{O \subset \mathbb{R}^p;\ O \text{ ist offen}\}$ und $\mathscr{E}_q = \{O \subset \mathbb{R}^q;\ O \text{ ist offen}\}$. Eine Charakterisierung der Stetigkeit ist, dass das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist, d.h. es gilt $f^{-1}(O) \in \mathscr{E}_p$ für alle $O \in \mathscr{E}_q$. Da $\mathscr{E}_p$ und $\mathscr{E}_q$ nach Bemerkung 1.2.10 Erzeuger der Borel-σ-Algebren $\mathscr{B}_p$ und $\mathscr{B}_q$ sind, folgt die Behauptung aus Satz 2.1.2. □

2.1.1 Übungsaufgabe

a) Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum und $A \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A, \end{cases}$$

messbar ist.

b) Zeigen Sie für messbares $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dass auch $|f|$ messbar ist.

c) Zeigen Sie für messbare $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, dass auch $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ messbar sind.

2.1.2 Übungsaufgabe

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathscr{A}$

a) die kleinste σ-Algebra über Ω,

b) die größte σ-Algebra über Ω,

c) die von $\{\{1\}, \{1, 3, 4\}\}$ erzeugte σ-Algebra über Ω.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung gegeben durch

$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{für } \omega = 1, \\ 5, & \text{für } \omega = 2, \\ -1, & \text{für } \omega = 3, \\ -1, & \text{füt } \omega = 4. \end{cases}$$

Für welche der σ-Algebren in a), b), c) ist f messbar? Begründen Sie die Antwort.

2.1.3 Übungsaufgabe (Fortsetzung von Übungsaufgabe 1.3.4)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \big\{A \subset \Omega;\ A \text{ ist abzählbar oder } \overline{A} \text{ ist abzählbar }\big\}$ und $\mu : \mathscr{A} \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{falls } \overline{A} \text{ abzählbar ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar ist genau dann, wenn sie auf dem Komplement einer abzählbaren Menge konstant ist.

2.2 Das Maß-Integral

Während beim Riemann-Integral der Urbildbereich $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bzw. $[a,b] \subset \mathbb{R}^p$ einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in immer kleinere Teilmengen zerlegt wird, wird beim Maß-Integral der Bildbereich $\mathbb{R}$ zerlegt. Dadurch können Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf beliebigen Räumen Ω zugelassen werden. Wichtig ist nur, dass $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum ist, auf dem ein Maß μ existiert, und dass f $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar ist.
Wir werden zuerst nur nichtnegative Funktionen f betrachten. Durch $0 < a_1^n < a_2^n < \ldots < a_{m(n)}^n < \infty$ wird eine Zerlegung von $[0,\infty)$ gegeben, denn $[0,\infty) = [0,a_1^n] \cup (a_1^n, a_2^n] \cup (a_2^n, a_3^n] \cup \ldots \cup (a_{m(n)-1}^n, a_{m(n)}^n] \cup (a_{m(n)}^n, \infty)$. Da f $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar ist, liegen alle $f^{-1}([0,a_1^n])$, $f^{-1}((a_1^n, a_2^n])$, …, $f^{-1}((a_{m(n)-1^n}, a_{m(n)}^n])$, $f^{-1}((a_{m(n)}^n, \infty))$ in $\mathscr{A}$ und die Funktion

$$f_n = \sum_{i=1}^{m(n)-1} a_i^n \; 1_{f^{-1}((a_i^n, a_{i+1}^n])} + a_{m(n)}^n \; 1_{f^{-1}((a_{m(n)}^n, \infty))}$$

ist $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar. Wird die Zerlegung immer feiner, d.h. es gilt

(i) $\lim_{n\to\infty} \max\{|a_{i+1}^n - a_i^n|;\ i = 1, \ldots, m(n)-1\} = 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{m(n)} = \infty$,

(iii) $\displaystyle\bigwedge_{i\in\{1,\ldots,m(n+1)\}} \bigvee_{j\in\{1,\ldots,m(n)\}} (a_i^{n+1}, a_{i+1}^{n+1}] \subset (a_j^n, a_{j+1}^n]$ oder

$$(a_i^{n+1}, a_{i+1}^{n+1}] \subset [0, a_1^n] \cup (a_{m(n)}^n, \infty),$$

dann gilt $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ punktweise. Denn für jedes $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es $i(\omega,n)$ mit $f(\omega) \in (a_{i(\omega,n)}^n, a_{i(\omega,n)+1}^n]$. Damit gilt $f_n(\omega) = a_{i(\omega,n)}^n \le f(\omega)$.
Wegen $\lim_{n\to\infty} |a_{i(\omega,n)+1}^n - a_{i(\omega,n)}^n| = 0$ folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) = f(\omega)$.

2.2.1 Definition (Maß-Integral von Elementarfunktionen)
Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$.

*(i) Eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ heißt **Elementarfunktion**, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt, d.h. wenn sie die Gestalt $f = \sum_{i=1}^n a_i \; 1_{A_i}$ hat, wobei $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, eine disjunkte Zerlegung von Ω ist.*

(ii) Ist $f = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{A_i}$ eine Elementarfunktion, so heißt

$$\int f(\omega)\; \mu(d\omega) := \int f \; d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \; \mu(A_i)$$

*das **(μ)-Integral von f (über Ω)**.*

2.2.2 Lemma
Das μ-Integral von f hängt nicht von der speziellen Darstellung von f als Elementarfunktion ab, d.h. die Definition des Maß-Integrals ist widerspruchsfrei.

Beweis

Seien $f = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{A_i}$ und $f = \sum_{j=1}^m b_j \; 1_{B_j}$ zwei Darstellungen von f. Betrachte nun $(A_i \cap B_j)_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m}$. Dann gilt $a_i = b_j$ für jedes Indexpaar i, j mit $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ und somit mit der σ-Additivität und $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_m$

$$\sum_{i=1}^n a_i \; \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \; \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_i \; \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \; \mu(B_j).$$

□

2.2.3 Lemma (Eigenschaften des μ-Integrals für Elementarfunktionen)
Seien f, g Elementarfunktionen und $\alpha \in [0, \infty)$. Dann gilt:

(i) $f = 1_A \;\Rightarrow\; \int f \; d\mu = \mu(A)$,

(ii) $\int (\alpha \; f) \; d\mu = \alpha \int f \; d\mu$,

(iii) $\int (f + g) \; d\mu = \int f \; d\mu + \int g \; d\mu$,

(iv) $f \leq g \Rightarrow \int f \; d\mu \leq \int g \; d\mu$.

Beweis

Es müssen nur (iii) und (iv) gezeigt werden. Dazu sei $f = \sum_{i=1}^n a_i \; 1_{A_i}$ und $g = \sum_{j=1}^m b_j \; 1_{B_j}$. Aus

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \; 1_{A_i \cap B_j} \text{ und } g = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_i \; 1_{A_i \cap B_j}$$

folgen dann die Behauptungen. □

2.2.4 Lemma
Für jede isotone Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen und jede Elementarfunktion f gilt:

$$f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \;\Rightarrow\; \int f \; d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n \; d\mu.$$

Beweis

Sei $f = \sum_{i=1}^n a_i \; 1_{A_i}$ und $\alpha \in (0, 1)$ beliebig. Nach Satz 2.1.5 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := \{g_n \geq \alpha f\} \in \mathscr{A}.$$

Dann gilt $g_n \geq \alpha \; f \; 1_{B_n}$ und mit Lemma 2.2.3 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int g_n \; d\mu \geq \alpha \int f \; 1_{B_n} \; d\mu.$$

Da die Folge (g_n) isoton ist und $f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ gilt, folgt andererseits $B_n \uparrow \Omega$, also $A_i \cap B_n \uparrow A_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$, und somit mit der σ-Stetigkeit, die auch für beliebige Maße gilt,

$$\alpha \int f\, d\mu = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i \cap B_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} \int f\, 1_{B_n}\, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\mu.$$

Da $\alpha < 1$ beliebig ist, folgt die Behauptung. □

2.2.5 Folgerung
Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von isotonen Elementarfunktionen. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\mu.$$

Beweis

Wegen $f_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ und $g_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ folgt aus Lemma 2.2.4

$$\int f_m\, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\mu \quad \text{und} \quad \int g_m\, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. □

2.2.6 Definition (Maß-Integral für nichtnegative Funktionen)
Sei $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von Elementarfunktionen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$. Dann wird die Zahl

$$\int f(\omega)\, \mu(d\omega) := \int f\, d\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu,$$

*welche nach Folgerung 2.2.5 unabhängig von der speziellen Darstellung mittels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, das **(μ)-Integral von f (über Ω)** genannt.*

2.2.7 Definition (Maß-Integral)
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion.

*(i) Dann heißt $f^+ := \sup\{f, 0\}$ der **Positiv-** und $f^- := -\inf\{f, 0\}$ der **Negativteil von f**.*

(ii) Sind $\int f^+\, d\mu$ und $\int f^-\, d\mu$ endlich, so heißt

$$\int f(\omega)\, \mu(d\omega) := \int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

*das **(μ)-Integral von f (über Ω)** und f **$(\mu$-$)$integrierbar**.*

2.2.8 Bemerkung
Nach Satz 2.1.6 sind mit f und f_n auch $\sup\{f, 0\}$, $-\inf\{f, 0\}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$

$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare, nichtnegative Funktionen. Damit existieren die Integrale von diesen Funktionen und die Definition 2.2.7 sowie die Aussagen von Satz 2.3.1 und Satz 2.3.2 machen Sinn.

2.2.9 Definition
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt $f = g$ $(f \geq g)$ μ-fast überall (μ-f.ü.) $:\Longleftrightarrow$ Es gibt $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt $f(\omega) = g(\omega)$ $(f(\omega) \geq g(\omega))$.

2.2.10 Satz (Eigenschaften des μ-Integrals)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.
a) Seien f, g μ-integrierbare Funktionen und $\alpha \in [0, \infty)$. Dann gilt:

(i) $\int(\alpha\, f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$.

(ii) $\int(f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

(iii) $f \geq g \implies \int f\, d\mu \geq \int g\, d\mu$.

(iv) $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu$.

b) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:

(i) $f : \Omega \to [0, \infty]$: $f = 0$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int f d\mu = 0$.

(ii) $f \geq 0$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int_A f\, d\mu \geq 0 \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

(iii) $f = 0$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int_A f\, d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

c) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $|\int f d\mu| < \infty$. Dann gilt:

(i) $f \geq g$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int_A f\, d\mu \geq \int_A g\, d\mu \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

(ii) $f = g$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

(iii) $\mu(f = \infty) = \mu(f = -\infty) = 0$.

2.2.1 Übungsaufgabe
Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar und

$$f_N(\omega) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^N}, & \text{falls } \frac{k-1}{2^N} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^N} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, 2^N, \\ N, & \text{falls } f(\omega) \geq N. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen f_N Treppenfunktionen sind, für die $\lim_{N\to\infty} f_N(\omega) = f(\omega)$ und $f_N(\omega) \leq f_{N+1}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie auch, daß f_N gleichmäßig gegen f konvergiert, falls f beschränkt ist.

2.2.2 Übungsaufgabe

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, f messbar und $\mathcal{X} \subset \overline{\mathbb{R}}$ abzählbar mit der Eigenschaft $\mu(\{f \notin \mathcal{X}\}) = 0$, (d.h. f nimmt „im wesentlichen“ nur die abzählbar vielen Werte aus $\mathcal{X}$ an). Zeigen Sie, daß $\int f\, d\mu = \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, \mu(\{f = x\})$ gilt.

2.2.3 Übungsaufgabe

Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, d.h. $\mu(A) = \sharp(A)$. Bestimmen Sie $\int f d\mu$ für folgende Funktionen $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$f(x) = 1_{[-10,10]}(x), \quad f(x) = (2 - x)\, 1_{[0,4]}(x), \quad f(x) = \frac{1}{2^x}.$$

2.2.4 Übungsaufgabe (Fortsetzung von Übungsaufgabe 2.1.3)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \big\{A \subset \Omega;\ A \text{ ist abzählbar oder } \overline{A} \text{ ist abzählbar}\ \big\}$ und $\mu : \mathscr{A} \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{falls } \overline{A} \text{ abzählbar ist.} \end{cases}$$

Was ist das μ-Integral $\int f\, d\mu$ einer $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$?

2.3 Konvergenz von Maß-Integralen

2.3.1 Satz (Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi))
Für jede isotone Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}$*-messbaren Funktionen* $f_n : \Omega \to [0,\infty)$ *gilt*

$$\int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis

Wir setzen $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Zu jedem f_n gibt es eine isotone Folge $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen mit $f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_{nm}$. Sei

$$v_m = \sup\{g_{1m}, \ldots, g_{mm}\}.$$

Dann ist wegen der Isotonie der $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von Elementarfunktion mit $v_m \leq \sup\{f_1, \ldots, f_m\} \leq f_m \leq f$, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ isoton ist. Also gilt $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m \leq f$. Für alle $m \geq n$ hat man aber auch $g_{nm} \leq v_m$ und somit

$$f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_{nm} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m.$$

Also gilt $f = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m$ und somit

$$\int f \, d\mu = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int v_m \, d\mu.$$

Wegen $v_m \leq f_m = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_{mk}$ folgt mit Lemma 2.2.4 $\int v_m \, d\mu \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int g_{mk} \, d\mu = \int f_m \, d\mu$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit

$$\int f \, d\mu = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int v_m \, d\mu \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \int f_m \, d\mu.$$

Umgekehrt gilt aber auch $g_{nm} \leq f_n \leq f = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m$ und somit mit Lemma 2.2.4 $\int g_{nm} \, d\mu \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \int v_m \, d\mu = \int f \, d\mu$, woraus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int g_{nm} \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

folgt. □

2.3.2 Satz (Lemma von Fatou)
Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}$*-messbaren Funktionen* $f_n : \Omega \to [0,\infty)$ *gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

2.3.3 Definition
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ eine Maßraum und f_n, $n \in \mathbb{N}$, messbar. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt μ-f.ü. konvergent, falls es ein messbares f und $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \notin N$ gilt.

2.3.4 Satz (Satz von der majorisierten (dominierten) Konvergenz (H. Lebesgue))
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine μ-f.ü. konvergente Folge von messbaren Funktionen. Existiert eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to [0, \infty)$ mit $|\int g d\mu| < \infty$ und $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

2.3.1 Übungsaufgabe

(i) Seien $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ meßbar. Zeigen Sie, dass $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ gilt.

(ii) Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of measurable functions. Show: If $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$, then $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ converges almost everywhere and $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.

2.3.2 Übungsaufgabe
Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\int |f_n| \, d\mu < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ an, die fast überall gegen eine Funktion f mit $\int |f| \, d\mu < \infty$ konvergiert und für die $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \neq \int f \, d\mu$ gilt.

2.3.3 Übungsaufgabe
Sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, meßbar und μ-f.ü. konvergent gegen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $p > 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0$ gilt, falls ein $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert. sodass $\int |g|^p \, d\mu < \infty$ und $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.4 Weitere Eigenschaften des Maß-Integrals

2.4.1 Definition

Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $T : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbar, so heißt

$$\mu^T : \mathscr{A}' \ni A' \longrightarrow \mu^T(A') := \mu(T^{-1}(A')) \in \overline{\mathbb{R}}$$

das Bildmaß von μ unter T.

2.4.2 Satz (Transformationssatz für Integrale)

Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, $T : \Omega \to \Omega'$ eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbare Funktion und μ^T das Bildmaß von μ unter T.

(i) Ist $f : \Omega' \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{A}'$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion, dann gilt

$$\int f \, d\mu^T = \int f(t) \, \mu^T(dt) = \int f(T(\omega)) \, \mu(d\omega) = \int f \circ T \, d\mu.$$

(ii) f ist μ^T-integrierbar genau dann, wenn $f \circ T$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt $\int f \, d\mu^T = \int f \circ T \, d\mu$.

Beweis

(i) Wir zeigen zuerst den Beweis für Elementarfunktionen. Sei f eine Elementarfunktion. Dann gilt $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i'}$ mit $a_i \in [0, \infty)$, $A_i' \in \mathscr{A}'$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$f \circ T(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{A_i'}(T(\omega)) = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{T^{-1}(A_i')}(\omega)$$

und somit

$$\int f \circ T \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \, \mu(T^{-1}(A_i')) = \sum_{i=1}^n a_i \, \mu^T(A_i') = \int f \, d\mu^T.$$

Sei nun f eine nichtnegative $\mathscr{A}'$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion. Dann gibt es eine isotone Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen mit $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann ist aber auch $(f_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von Elementarfunktionen mit $f \circ T = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \circ T$. Damit gilt

$$\int f \circ T \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \circ T \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu^T = \int f \, d\mu^T.$$

Für beliebiges messbares f folgt die Behauptung aus der Zerlegung von f in f^+ und f^-.
(ii) f ist μ^T-integrierbar

$\Longleftrightarrow$

$\int f^+ \, d\mu^T = \int f^+ \circ T \, d\mu < \infty$ und $\int f^- \, d\mu^T = \int f^- \circ T \, d\mu < \infty$

$\Longleftrightarrow$

$f \circ T$ ist μ-integrierbar. $\square$

2.4.3 Definition
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.
a) $f :\to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine μ-fast überall definierte Funktion $:\Longleftrightarrow$ es gibt $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ so, dass f eindeutig auf $\Omega \setminus N$ erklärt ist.
b) $f :\to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine μ-fast messbare Funktion $:\Longleftrightarrow$ es gibt $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ so, dass $f \cdot 1_{N^c}$ messbar ist.
c) Eine μ-fast messbare Funktion f heißt μ-integrierbar $:\Longleftrightarrow$ es gibt $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ so, dass $f \cdot 1_{N^c}$ messbar ist und $\int f^+ \cdot 1_{N^c}\, d\mu < \infty$ oder $\int f^- \cdot 1_{N^c}\, d\mu < \infty$ gilt.

2.4.4 Satz (Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit)
(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion. Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, also insbesondere auf $[a, b]$ beschränkt, so ist f auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, d.h. $f\ 1_{[a,b]}$ ist λ-integrierbar, wobei λ das Lebesgue-Maß ist, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int f(x)\ 1_{[a,b]}(x)\ \lambda(dx) = \int f\ 1_{[a,b]}\ d\lambda.$$

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion, die auf jedem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist. Dann ist f Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. In diesem Fall gilt

$$\lim_{a\downarrow-\infty,\, b\uparrow\infty} \int_a^b f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int f(x)\ \lambda(dx) = \int f\ \ d\lambda.$$

2.4.1 Übungsaufgabe
Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, d.h. $\mu(A) = \sharp A$ für alle $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Sei $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $T(n) = \frac{1}{n}$ gegeben. Bestimmen Sie μ^T und $\int x^2 \mu^T(dx)$.

2.4.2 Übungsaufgabe
Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $T : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{A} - \mathscr{A}'$ messbar, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ messbar, dann gilt für alle $B \in \mathscr{B}_1$

$$\int_{T^{-1}(B)} f \circ T d\mu = \int_B f d\mu^T.$$

2.4.3 Übungsaufgabe
Geben Sie eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die Lebesgue-integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes λ ist und die nicht Riemann-integrierbar ist.

2.4.4 Übungsaufgabe
Sei $f : [\pi, \infty] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes λ ist. Hinweis: Man schätze $\int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$ ab.

2.5 Lebesgue'sche Räume

2.5.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in (0, \infty)$. Dann heißt

$$\mathscr{L}_p := \mathscr{L}_p(\mu) := \mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar; } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Lebsgue'scher Raum aller p-fach endlich integrierbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

2.5.2 Satz (Hölder-und Minkowski-Ungleichung)

Seien $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktionen.

(i) Ist $1 < p < \infty$ und q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt
$\int |f \cdot g|\, d\mu \leq (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p} \cdot (\int |g|^q\, d\mu)^{1/q}$ *(Hölder-Ungleichung).*

(ii) Ist $1 \leq p < \infty$ und ist $f + g$ definiert, dann gilt
$(\int |f + g|\, d\mu)^{1/p} \leq (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p\, d\mu)^{1/p}$ *(Minkowski-Ungleichung).*

2.5.3 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.
a) Ist f mesbar, so heißt $\textsf{ess} - \sup f := \inf \left\{ x \in \overline{\Re};\ \mu(\{f > x\}) = 0 \right\}$ das wesentliche (essentielle) Supremum von f bzgl. μ.
b) $\mathscr{L}_\infty := \mathscr{L}_\infty(\mu) := \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar; } \textsf{ess} - \sup |f| < \infty \right\}$ heißt der Raum der im wesentlichen beschränkten Funktionen.

2.5.4 Definition

Das System der Äquivalenzklassen in $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, dass durch die Relation $f \sim g \iff f = g$ μ-f.ü. gegeben ist, wird mit $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ (bzw. $\mathcal{L}_p(\mu)$, $\mathcal{L}_p$) bezeichnet. Eine Äquivalenzklasse wird mit f bezeichnet, falls f in der Klasse liegt.

2.5.5 Folgerung

a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Durch

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}_p \ni f \longrightarrow \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

bzw.

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}_p \ni f \longrightarrow \|f\|_\infty := \textsf{ess} - \sup |f|$$

wird eine Norm auf $\mathcal{L}_p$ bzw. $\mathcal{L}_\infty$ definiert.
b) Sind $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktionen, so gilt

$$\int |f \cdot g|\, d\mu \leq \|f\|_2\, \|g\|_2 \quad \textit{(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).}$$

c) Ist $\mu(\Omega) < \infty$ und $0 < p < q \leq \infty$, dann gilt $\mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_p$.

2.5.1 Übungsaufgabe

Beweisen Sie:

a) $f = g$ μ-f.ü. $\Rightarrow$ $\|f\|_p = \|g\|_p$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

b) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

c) $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

d) Folgerung 2.5.5 a) und c).

3 Zerlegung und Darstellung signierter Maße

3.1 Maß mit Dichte

3.1.1 Satz

Für jede $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$ und für jedes Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ wird durch

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu = \int f \, 1_A \, d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ definiert.

Beweis

Es ist $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu \geq 0$. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathscr{A}$ mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt

$$f \, 1_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \, 1_{A_n} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} f \, 1_{A_n} =: \sup_{N\in\mathbb{N}} f_N.$$

Dabei ist $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von messbaren, nichtnegativen Funktionen. Nach dem Satz 2.3.1 der monotonen Konvergenz und Satz 2.2.10 folgt

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int \sum_{n=1}^{\infty} f \, 1_{A_n} \, d\mu = \int \sup_{N\in\mathbb{N}} f_N \, d\mu = \sup_{N\in\mathbb{N}} \int f_N \, d\mu = \sup_{N\in\mathbb{N}} \int \sum_{n=1}^{N} f \, 1_{A_n} \, d\mu \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \int f \, 1_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist ν ein Maß. □

3.1.2 Definition (Maß mit Dichte)

Ist $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, so wird das durch $\nu(A) := \int_A f \, d\mu = \int f \, 1_A \, d\mu$ gegebene Maß mit $\nu = f \, \mu$ (oder $d\nu = f \, d\mu$) bezeichnet und f die ***Dichte von ν bezüglich μ*** *(kurz **μ-Dichte**) genannt.*

3.1.3 Satz (Integral bezüglich eines Maßes mit Dichte)

Sei f die Dichte von ν bezüglich μ.

(i) Ist $\varphi : \Omega \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion. Dann gilt

$$\int \varphi \, d\nu = \int \varphi \cdot f \, d\mu.$$

(ii) φ ist genau dann ν-integrierbar, wenn $\varphi \cdot f$ μ-integrierbar ist.

Beweis

(i) Sei $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\, 1_{A_i}$ eine Elementarfunktion. Dann gilt mit Satz 2.2.10

$$\int \varphi\, d\nu = \sum_{i=1}^n a_i\, \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int f\, 1_{A_i}\, d\mu = \int \varphi\, f\, d\mu.$$

Sei nun φ eine beliebige nichtnegative $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbare Funktion. Dann gibt es eine isotone Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen mit $\varphi = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Dann ist aber auch $(\varphi_n \cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge von messbaren, nichtnegativen Funktionen mit $\varphi \cdot f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cdot f$. Mit dem Satz 2.3.1 von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int \varphi\, d\nu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\, d\nu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n\, d\nu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \cdot f\, d\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cdot f\, d\mu = \int \varphi \cdot f\, d\mu.$$

(ii) φ ist ν-integrierbar

$\Longleftrightarrow$

$\int \varphi^+\, d\nu = \int \varphi^+ \cdot f\, d\mu < \infty$ und $\int \varphi^-\, d\nu = \int \varphi^- \cdot f\, d\mu < \infty$

$\Longleftrightarrow$

$\varphi \cdot f$ ist μ-integrierbar. $\square$

3.1.1 Übungsaufgabe

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_1, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist. Für welche der folgenden $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und unter welchen Bedingungen an $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\nu = f\,\lambda$ ein ein Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$f(x) = 1_{[a,b]}(x),\quad f(x) = a\,x\,1_{[0,b]}(x),\quad f(x) = \frac{a}{x} 1_{[b,\infty]},\quad f(x) = ae^{-bx},\quad f(x) = a\,e^{-b|x|}.$$

3.1.2 Übungsaufgabe

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, d.h. $\mu(A) = \sharp(A)$. Für welche der folgenden $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und unter welchen Bedingungen an $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\nu = f\,\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$f(x) = a\,1_{[0,b]}(x),\quad f(x) = a\,x\,1_{[0,b]}(x),\quad f(x) = \frac{a}{x} 1_{[b,\infty]},\quad f(x) = \frac{a}{2^x} 1_{[b,\infty]}.$$

3.2 Signierte Maße

Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so werden durch $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ Maße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ definiert, aber $\int f d\mu$ ist in der Regel kein Maß. Es ist aber ein sogenanntes signiertes Maß.

3.2.1 Definition
Ist $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, dann heißt η signiertes Maß auf $\mathscr{A}$ $:\longleftrightarrow$
(i) $\eta : \mathscr{A} \to (-\infty, \infty]$ *oder* $\eta : \mathscr{A} \to [-\infty, \infty)$,
(ii) $\eta(\emptyset) = 0$,
(iii) η *ist σ-additiv auf $\mathscr{A}$, d.h. für alle paarweise disjunkten* $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ *gilt* $\eta\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \eta(A_i)$.

3.2.2 Definition
Ist η signiertes Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, dann nennt man:
a) $A \in \mathscr{A}$ *η-negative* $:\Longleftrightarrow \eta(A') \le 0$ *für alle* $A' \subset A$, $A' \in \mathscr{A}$,
$A \in \mathscr{A}$ *η-positive* $:\Longleftrightarrow \eta(A') \ge 0$ *für alle* $A' \subset A$, $A' \in \mathscr{A}$,
b) $\{\Omega^+, \Omega^-\}$ *eine* **Hahn-Zerlegung** *von Ω bzgl. η* $:\Longleftrightarrow$
(i) Ω^+ *is η-positive und Ω^- is η-negativ,*
(ii) $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ *und* $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$.

3.2.3 Satz (Existenz un Eindeutigkeit der Hahn-Zerlegung*)
a) Für jedes signierte Maß η existiert eine Hahn-Zerlegung von Ω bzgl. η.
b) Hahn-Zerlegungen von Ω bzgl. η unterscheiden sich höchstens durch η-Nullmengen,d.h. sind $\{\Omega_i^+, \Omega_i^-\}$, $i = 1, 2$, zwei Hahn-Zerlegungen von Ω bzgl. η, dann ist
$$\eta((\Omega_1^+ \setminus \Omega_2^+) \cup (\Omega_2^+ \setminus \Omega_1^+)) = 0 = \eta((\Omega_1^- \setminus \Omega_2^-) \cup (\Omega_2^- \setminus \Omega_1^-)).$$

3.2.4 Folgerung
a) Jedes signierte Maß η besitzt eine **Jordan-Zerlegung**, *d.h. es lässt sich eindeutig als $\eta = \eta^+ - \eta^-$ darstellen mit*
$$\eta^+ : \mathscr{A} \ni A \to \eta^+(A) := \eta(A \cap \Omega^+) \in \overline{\mathbb{R}^+},$$
$$\eta^- : \mathscr{A} \ni A \to \eta^-(A) := -\eta(A \cap \Omega^-) \in \overline{\mathbb{R}^+},$$
wobei η^+ und η^- Maße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ sind, wovon mindestens eins endlich ist.
b) Die **absolute Variation** $|\eta| := \eta^+ + \eta^-$ *ist auch ein Maß $(\Omega, \mathscr{A})$.*
c) $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, |\eta|) = \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, \eta^+) \cap \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, \eta^-)$.

3.2.5 Definition (Integral bzgl eines signierten Maßes)
Sei η ein signiertes Maß und $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, |\eta|)$. Das η-Integral von f bzgl. η wird dann als $\int f d\eta = \int f d\eta^+ - \int f d\eta^-$ *definiert.*

3.2.6 Definition (Signiertes Maß mit Dichte)
*Ist μ ein Maß und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, so wird das durch $\eta(A) := \int_A f \; d\mu = \int f \, 1_A \; d\mu$ gegebene signierte Maß wieder mit $\eta = f \, \mu$ (bzw. $d\eta = f \, d\mu$) bezeichnet und f die **Dichte von η bezüglich μ** (kurz **μ-Dichte**) genannt.*

3.2.7 Lemma
Ist μ ein Maß und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, so gilt für $\eta = f \, \mu$:
a) $\eta^+ = f^+ \, \mu$ und $\eta^- = f^- \, \mu$,
b) für alle $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt $\eta(A) = 0$.

3.2.8 Definition
*Ein signiertes Maß η heißt total-stetig (eigentlich nichtsingulär) bzgl. eines Maßes μ, oder kurz **μ-stetig**, in Zeichen $\boldsymbol{\eta << \mu}$ $:\Longleftrightarrow$ für alle $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt $\eta(A) = 0$.*

3.2.9 Bemerkung
Ist η total-stetig bzgl. μ, so sagt man auch: **μ dominiert η** bzw. η ist ein von μ dominiertes signiertes Maß.

3.2.10 Satz (Satz von Radon-Nikodym*)
Ist η ein signiertes Maß, das total-stetig bzgl. eines σ-endlichen Maßes μ ist, dann existiert eine μ-Dichte f von η, d.h.
$\eta << \mu \Longrightarrow \exists \, f$ μ-integrierbar mit $\eta = f \, \mu$.

3.2.1 Übungsaufgabe
Beweisen Sie Folgerung 3.2.4.

3.2.2 Übungsaufgabe
Beweisen Sie Lemma 3.2.7.

3.2.3 Übungsaufgabe
Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, d.h. $\mu(A) = \sharp(A)$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (-2)^{-x}$ gegeben und $\eta = f \, \mu$. Bestimmen Sie die die Hahn-Zerlegung von $\mathbb{N}$ bzgl. η, die Jordan-Zerlegung von η und die totale Variation $\|\eta\| := |\eta|(\mathbb{N}) = \eta^+(\mathbb{N}) + \eta^-(\mathbb{N})$ von η.

4 Maße auf Produkträumen

4.1 Maße auf endlichen Produkträumen

4.1.1 Bemerkung (Motivation für Produktmaße)
Das Lebesgue-Maß λ_p auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ kann auch über die eindimensionalen Lebesgue-Maße λ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ gewonnen werden. Dazu muss man ausnutzen, dass $\mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ ein Produktraum ist. Mit den σ-Algebren $\mathscr{B}$ über $\mathbb{R}$ kann eine "Produkt-σ-Algebra" $\bigotimes_{i=1}^p \mathscr{B} = \mathscr{B} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}$ über $\mathbb{R}^p$ erzeugt werden, wenn man folgenden Erzeuger benutzt

$$\mathscr{E}_p^p = \{B_1 \times \ldots \times B_p;\ B_i \in \mathscr{B},\ i = 1, \ldots, p\}$$

Da $(a, b] = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_p, b_p] \in \mathscr{E}_p^p$ für jedes $(a, b] \in \mathscr{E}_p^2 = \{(a, b];\ a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$ gilt, folgt sofort $\mathscr{B}_p \subset \bigotimes_{i=1}^p \mathscr{B}$. Da aber in $\sigma(\mathscr{E}_p^2) = \mathscr{B}_p$ auch alle Mengen der Form $B_1 \times \ldots \times B_p$ mit $B_i \in \mathscr{B}$ für $i = 1, \ldots, p$ liegen, folgt auch $\bigotimes_{i=1}^p \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_p$. Damit ist die Produkt-$\sigma$-Algebra $\bigotimes_{i=1}^p \mathscr{B}$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_p$ identisch.
Sei $\eta : \mathscr{E}_p^p \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\eta(B) = \eta(B_1 \times \ldots \times B_p) = \lambda(B_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(B_p) = \prod_{i=1}^p \lambda(B_i).$$

Die Frage ist nun, ob η sich zu einem Maß auf $\bigotimes_{i=1}^p \mathscr{B} = \mathscr{B}_p$ fortsetzen lässt. Ist das der Fall, so muss η das Lebesgue-Maß λ_p sein, denn es stimmt mit diesem auf $\mathscr{E}_p^2$ überein. Insbesondere würde man dann für das Lebesgue-Maß λ_p die Eigenschaft $\lambda_p(B_1 \times \ldots \times B_p) = \prod_{i=1}^p \lambda(B_i)$ für alle $B_1, \ldots, B_p \in \mathscr{B}$ erhalten.
Leider ist aber $\mathscr{E}_p^p$ kein Ring und damit η kein Prämaß auf einem Ring. Damit kann der Fortsetzungssatz 1.4.8 nicht darauf angewendet werden. Es gibt aber einen anderen Fortsetzungsatz, der für allgemeine Produkträume gilt.

4.1.2 Definition (Endlicher Produktraum)
Seien $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ messbare Räume und $\Omega = \prod_{i=1}^p \Omega_i = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_p$ die Produktmenge. Die von

$$\mathscr{E}^p = \{A_1 \times \ldots \times A_p;\ A_i \in \mathscr{A}_i,\ i = 1, \ldots, p\}$$

erzeugte σ-Algebra $\bigotimes_{i=1}^p \mathscr{A}_i = \mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_p$ heißt ***Produkt-σ-Algebra*** *über $\prod_{i=1}^p \Omega_i$ und $(\prod_{i=1}^p \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^p \mathscr{A}_i)$* ***endlicher Produktraum****.*

4.1.3 Definition
Ist $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ ein Produktraum, $\omega_1 \in \Omega_1$, $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$, dann heißt

$$A(\omega_1) := \{\omega_2 \in \Omega_2;\ (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

der **Schnitt der Menge A in ω_1**.

4.1.4 Lemma
Sei $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ *ein Produktraum. Dann gilt:*
a) $\{A(\omega_1);\ A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2,\ \omega_1 \in \Omega_1\} = \mathscr{A}_1$, *d.h. insbesondere* $A(\omega_1) \in \mathscr{A}_2$ *für alle* $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2,\ \omega_1 \in \Omega_1$.
b) Ist $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar und* $\omega_1 \in \Omega_1$, *dann ist*

$$f(\omega_1, \cdot) : \Omega_2 \ni \omega_2 \longrightarrow f(\omega_1, \omega_2) \in \overline{\mathbb{R}}$$

messbar.
c) Die Koordinatenabbildung

$$proj_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \ni (\omega_1, \omega_2) \longrightarrow proj_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \in \Omega_i$$

ist $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_i$ *messbar für* $i = 1, 2$.

4.1.5 Definition
a) $\kappa : \mathscr{A}_2 \times \Omega_1 \ni (A_2, \omega_1) \to \kappa(A_2, \omega_1) \in [0, \infty]$ *heißt* **Maß-Kern** *von* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ *nach* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ $:\Longleftrightarrow$
(i) $\kappa(\cdot, \omega_1) : \mathscr{A}_1 \to [0, \infty]$ *ist ein Maß auf* $\mathscr{A}_2$ *für alle* $\omega_1 \in \Omega_1$,
(ii) $\kappa(A_2, \cdot) : \Omega_1 \to [0, \infty]$ *ist messbar für alle* $A_2 \in \mathscr{A}_2$.
b) Ein Maß-Kern κ *heißt* **Wahrscheinlichkeits-Kern oder Markoff'scher Kern** $:\Longleftrightarrow$ *für alle* $\omega_1 \in \Omega_1$ *ist* $\kappa(\cdot, \omega_1)$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathscr{A}_2$.
c) Ein Maß-Kern κ *heißt* $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich** $:\Longleftrightarrow$ *es gibt paarweise disjunkte* $A_{21}, A_{22}, \ldots \in \mathscr{A}_2$ *mit* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} = \Omega_2$ *und* $k_1, k_2, \ldots \in [0, \infty)$, *so dass* $\kappa(\omega_1, A_{2n}) \leq k_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $\omega_1 \in \Omega_1$ *gilt.*

4.1.6 Lemma
Ist κ *ein* σ*-endlicher Maß-Kern von* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ *nach* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$, *dann ist* $\kappa(A(\cdot), \cdot) : \Omega_1 \to [0, \infty]$ *für alle* $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ *messbar.*

4.1.7 Satz
Ist κ *ein* σ*-endlicher Maß-Kern von* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ *nach* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ *und* μ *ein* σ*-endliches Maß auf* $\mathscr{A}_1$, *dann existiert genau ein Maß* $\kappa \otimes \mu$ *auf* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ *mit der Eigenschaft:*
(i) $\kappa \otimes \mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \kappa(A_2, \omega_1)\, \mu(d\omega_1)$ *für alle* $A_1 \in \mathscr{A}_1,\ A_2 \in \mathscr{A}_2$.
Dieses Maß ist σ*-endlich und es gilt:*
(ii) $\kappa \otimes \mu(A) = \int_{\Omega_1} \kappa(A(\omega_1), \omega_1)\, \mu(d\omega_1)$ *für alle* $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.

4.1.8 Folgerung
a) Ist κ *ein* σ*-endliches Maß auf* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ *und* μ *ein* σ*-endliches Maß auf* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$, *dann gilt*

$$\kappa \otimes \mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \kappa(A_2) \text{ für alle } A_1 \in \mathscr{A}_1,\ A_2 \in \mathscr{A}_2.$$

b) Seien μ_i σ*-endliche Maße auf* $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ *für* $i = 1, \ldots, p$ *Dann gibt es genau ein Maß* μ

auf $(\prod_{i=1}^p \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^p \mathscr{A}_i)$ *mit*

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_p) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_p(A_p)$$

für alle $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, \ldots, p$.

4.1.9 Definition

Sind μ_i σ*-endliche Maße auf* $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 1, \ldots, p$, *und gilt* $\mu(A_1 \times \ldots \times A_p) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_p(A_p)$ *für alle* $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, \ldots, p$, *dann heißt* μ *das* **Produktmaß** *von* $\mu_1 \ldots \mu_p$ *und man schreibt* $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p$. *Für* $\mu_1 = \ldots = \mu_p =: \mu$ *schreibt man auch* μ^p *anstelle von* $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$.

4.1.10 Satz (Einfache Version des Satzes von Fubini)

Seien μ_1 *und* μ_2 *Maße auf* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$.

(i) Sei $f_1 : \Omega_1 \to [0, \infty)$ *eine* $\mathscr{A}_1$-$\mathscr{B}$*-messbare Funktion und* $f_2 : \Omega_2 \to [0, \infty)$ *eine* $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{B}$*-messbare Funktion. Ist* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \ni (\omega_1, \omega_2) \to f((\omega_1, \omega_2)) = f_1(\omega_1) \cdot f_2(\omega_2) \in [0, \infty)$, *so gilt*

$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int f_1 \, d\mu_1 \cdot \int f_2 \, d\mu_2.$$

(ii) $f : \Omega \times \Omega \ni (\omega_1, \omega_2) \to f((\omega_1, \omega_2)) = f_1(\omega_1) \cdot f_2(\omega_2) \in \mathbb{R}$ *ist* $\mu_1 \otimes \mu_2$*-integrierbar genau dann, wenn* f_1 μ_1*-integrierbar und* f_2 μ_2*-integrierbar ist.*

Beweis

(i) Seien $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i \, 1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathscr{A}_1$ und $f_2 = \sum_{j=1}^m b_j \, 1_{B_j}$ mit $B_j \in \mathscr{A}_2$ Elementarfunktionen. Dann ist

$$f = f_1 \cdot f_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \, b_j \, 1_{A_i \times B_j}$$

auch eine Elementarfunktion. Da $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß ist, gilt $\mu_1 \otimes \mu_2(A_i \times B_j) = \mu_1(A_i) \cdot \mu_2(B_j)$ und somit

$$\begin{aligned}\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \, b_j \, \mu_1 \otimes \mu_2(A_i \times B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \, b_j \, \mu_1(A_i) \cdot \mu_2(B_j)\\ &= \sum_{i=1}^n a_i \, \mu_1(A_i) \cdot \sum_{j=1}^m b_j \, \mu_2(B_j) = \int f_1 \, d\mu_1 \cdot \int f_2 \, d\mu_2.\end{aligned}$$

Sind f_1 und f_2 beliebige messbare, nichtnegative Funktionen, dann gibt es isotone Folgen $(f_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen auf Ω_1 bzw. Ω_2 mit $f_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{1n}$ und $f_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{2n}$. Nach der obigen Betrachtung sind $f_{1n} \cdot f_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, Elementarfunktionen auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $(f_{1n} \cdot f_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine isotone Folge von Funktionen auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ mit

$f_1 \cdot f_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{1n} \cdot f_{2n}$. Wegen der Isotonie folgt

$$\begin{aligned}\int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_{1n} \cdot f_{2n}\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int f_{1n}\, d\mu_1 \cdot \int f_{2n}\, d\mu_2 \right) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_{1n}\, d\mu_1 \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_{2n}\, d\mu_2 = \int f_1\, d\mu_1 \cdot \int f_2\, d\mu_2.\end{aligned}$$

(ii) Es muss nur beachtet werden, dass $f^+ = (f_1 \cdot f_2)^+ = f_1^+ \cdot f_2^+ + f_1^- \cdot f_2^-$ und $f^- = (f_1 \cdot f_2)^- = f_1^+ \cdot f_2^- + f_1^- \cdot f_2^+$ ist. □

4.1.11 Satz (Iterierte Integration)
Sei κ ein σ-endlicher Maß-Kern von $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ und μ ein σ-endliches Maß auf $\mathscr{A}_1$, dann gilt:
a) Ist $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, \infty]$ messbar, so ist $\int_{\Omega_2} f(\cdot, \omega_2)\, \kappa(d\omega_2, \cdot) : \Omega_1 \to [0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int f d(\kappa \otimes \mu) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(d\omega_2, \omega_1) \right] \mu(d\omega_1).$$

b) Ist $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ $\kappa \otimes \mu$-integrierbar, so existiert $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(d\omega_2, \omega_1)$ für μ-fast alle ω_1 und ist μ-integrierbar und es gilt

$$\int f d(\kappa \otimes \mu) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(d\omega_2, \omega_1) \right] \mu(d\omega_1).$$

4.1.12 Satz
Seien μ_i σ-endliche Maße auf $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 1, 2$. Ist $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar, so gilt:
a) $\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \cdot)\mu_1(d\omega_1)$ existiert μ_2-f-ü. und ist μ_2-fast messbar,
b) $\int_{\Omega_2} f(\cdot, \omega_2)\mu_2(d\omega_2)$ existiert μ_1-f-ü. und ist μ_1-fast messbar,
c) $\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \right] \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) \right] \mu_2(d\omega_2)$.

4.1.13 Satz
Seien κ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und κ_j σ-endliche Maß-Kerne von $\left(\prod_{i=1}^{j-1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{j-1} \mathscr{A}_i \right)$ nach $(\Omega_j, \mathscr{A}_j)$ für $j = 2, \ldots, p$.
a) Dann existiert genau ein σ-endliches Maß $\kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_p$ auf $\bigotimes_{i=1}^{p} \mathscr{A}_i$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}&\kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_p(A_1 \times \ldots \times A_p) \\ &= \int_{A_1} \left[\int_{A_2} \ldots \left[\int_{A_{p-1}} \left[\int_{A_p} \kappa_p(d\omega_p, (\omega_1, \ldots, \omega_{p-1})) \right] \kappa_{p-1}(d\omega_{p-1}, (\omega_1, \ldots, \omega_{p-2})) \right] \ldots \right. \\ &\qquad \left. \kappa_2(d\omega_2, \omega_1) \right] \kappa(d\omega_1).\end{aligned}$$

b) Ist $\kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_p$-integrierbar, dann gilt

$$\begin{aligned}&\int f d\, (\kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_p) \\ &= \int \int \ldots \int f(\omega_1, \ldots, \omega_p) \kappa_p(d\omega_p, (\omega_1, \ldots, \omega_{p-1})) \ldots \kappa_2(d\omega_2, \omega_1) \kappa(d\omega_1).\end{aligned}$$

4.1.1 Übungsaufgabe

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2;\ A(\omega_1) \in \mathcal{A}_2 \text{ für alle } \omega_1 \in \Omega_1\}$ eine σ-Algebra ist.

4.1.2 Übungsaufgabe

Let $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N},\ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu_1 = \mu_2$ be the counting measure, and

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m,n) \to f(m,n) := \begin{cases} 1 - 2^{-n}, & \text{if } m = n, \\ 2^{-n} - 1, & \text{if } m = n+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Show that the iterated integrals $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 \, d\mu_1$ and $\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \, d\mu_1 \, d\mu_2$ exists but are unequal. Why does this not contradict Fubini's theorem?

4.1.3 Übungsaufgabe

Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R},\ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B},\ \lambda$ das Lebesgue-Maß, μ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ gegeben durch $f(x,y) = 1_{\{x=y\}}(x,y)$. Zeigen Sie, dass f messbar ist, aber $\int \int f \, d\mu \, d\lambda \neq \int \int f \, d\lambda \, d\mu$ gilt. Warum ist der Satz von Fubini nicht anwendbar?

4.2 Faltung von Maßen

4.2.1 Definition

Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n$ endliche Maße auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ und $T_n : \mathbb{R}^p \times \ldots \times \mathbb{R}^p \ni (x_1, \ldots, x_p) \to T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n \in \mathbb{R}^p$. Dann wird

$$\mu_1 * \ldots * \mu_n = (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n)^{T_n}$$

die **Faltung (convolution)** *von $\mu_1, \ldots, \mu_n$ genannt.*

4.2.2 Satz (Eigenschaften der Faltung von Maßen)
Seien $\nu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ endliche Maße auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

a) $\mu_1 * \ldots * \mu_n * \mu_{n+1} = (\mu_1 * \ldots * \mu_n) * \mu_{n+1}$.

b) $f : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu_1 * \mu_2$-integrierbar $\Longrightarrow \int f d(\mu_1 * \mu_2) = \int\int f(x+y)\,\mu_1(dx)\,\mu_2(dx)$.

c) Für $B \in \mathscr{B}_p$ gilt $\mu_1 * \mu_2(B) = \int \mu_1(B-y)\mu_2(dy) = \int \mu_2(B-x)\mu_1(dx)$, insbesondere gilt $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ (dabei ist $B - y := \{x \in \mathbb{R}^p;\ x + y \in B\}$).

d) $\nu * (\mu_1 + \mu_2) = \nu * \mu_1 + \nu * \mu_2$.

e) $\mu_1 * (\alpha\mu_2) = (\alpha\mu_1) * \mu_2 = \alpha(\mu_1 * \mu_2)$.

f) Besitzt μ_1 eine λ_p-Dichte f_1 (λ^p ist das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$), so ist $f(x) = \int f_1(x-y)\mu_2(dy)$ eine λ_p-Dichte von $\mu_1 * \mu_2$.

g) Besitzt zusätzlich auch μ_2 eine λ_p-Dichte f_2 so ist $f(x) = \int f_1(x-y)\, f_2(y)\, \lambda_p(dy) = \int f_2(x-y)\, f_1(y)\, \lambda_p(dy)$ eine λ_p-Dichte von $\mu_1 * \mu_2$.

Beweis
a) Es gilt $T_{n+1} = T_2 \circ V_{n+1}$ mit

$$V_{n+1} : (\mathbb{R}^p)^{n+1} \ni (x_1, \ldots, x_{n+1}) \to V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 + \ldots + x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

Aus $(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{n+1})^{V_{n+1}} = (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n)^{T_n} \otimes \mu_{n+1}$ folgt

$$\mu_1 * \ldots * \mu_n * \mu_{n+1} = (\mu_1 * \ldots * \mu_n * \mu_{n+1})^{T_{n+1}} = ((\mu_1 * \ldots * \mu_n * \mu_{n+1})^{V_{n+1}})^{T_2} = (\mu_1 * \ldots * \mu_n) * \mu_{n+1}.$$

b)-e) sind Übungsaufgabe.
f) Sei $W : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ni (x_1, x_2) \to W(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $\lambda_p^W = \lambda_p$ und somit mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mu_1 * \mu_2(B) &= \int 1_B d(\mu_1 * \mu_2) = \int\int 1_B(x+y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) \\
&= \int\int 1_B(x+y) f_1(x)\lambda_p(dx)\mu_2(dy) = \int\int 1_B(x+y) f_1(x)\lambda_p^W(dx)\mu_2(dy) \\
&= \int\int 1_B(x) f_1(x-y)\lambda_p(dx)\mu_2(dy) = \int 1_B(x)\left(\int f_1(x-y)\mu_2(dy)\right)\lambda_p(dx).
\end{aligned}$$

g) folgt sofort aus f). □

4.2.3 Definition
Seien μ_1, μ_2 endliche Maße auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ mit λ_p-Dichten f_1, f_2. Dann wird die λ_p-Dichte von $\mu_1 * \mu_2$ mit $f_1 * f_2$ bezeichnet, d.h.

$$f_1 * f_2(x) = \int f_1(x-y)\, f_2(y)\, \lambda_p(dy) = \int f_2(x-y)\, f_1(y)\, \lambda_p(dy).$$

$f_1 * f_2$ wird auch Faltung (convolution) von f_1 und f_2 genannt.

4.2.1 Übungsaufgabe
Beweisen Sie Satz 4.2.2 b)-e).

4.2.2 Übungsaufgabe
Beweisen Sie folgende Aussage: Sind ν_1, ν_2 endliche Maße mit Dichten f_1, f_2 bezüglich des Zählmaßes ν auf $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$, so hat $\mu_1 * \mu_2$ die ν-Dichte $f(x) = \int f_1(x-y)\, f_2(y)\, \nu(dy) = \int f_2(x-y)\, f_1(y)\, \nu(dy)$.

4.2.3 Übungsaufgabe
Seien δ_a und δ_b Einpunktmaße (Dirac-Maße) auf a und b. Was ist $\delta_a * \delta_b$?

4.2.4 Übungsaufgabe
Sei π^λ die Poisson-Verteilung auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0))$, d.h. $\mu^\lambda(\{n\}) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\pi^{\lambda_1} * \pi^{\lambda_2} = \pi^{\lambda_1 + \lambda_2}$ gilt.

4.3 Maße auf unendlichen Produkträumen

4.3.1 Definition

Seien $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, messbare Räume und $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \omega_n \in \Omega_n$ für $n \in \mathbb{N}\}$.
a) Ist $B^N \subset \prod_{n=1}^{N} \Omega_n$, dann heißt $\mathcal{B}_N := \{\omega \in \Omega;\ (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in B^N\}$ der **Zylinder zur Basis B^N**.
b) Ein Zylinder zur Basis B^N wird messbar genannt, falls $B^N \in \bigotimes_{n=1}^{N} \mathscr{A}_n$ gilt.
c) Ein Zylinder zur Basis B^N wird (messbares) Rechteck genannt, falls $B^N = A_1 \times \ldots \times A_N$ mit $A_n \subset \Omega_n$ $(A_n \in \mathscr{A}_n)$ für $n = 1, \ldots N$ gilt.
d) Die kleinste σ-Algebra über Ω, die alle messbaren Zylinder enthält, wird **Produkt-σ-Algebra** *von $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ genannt und mit $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ bezeichnet.*

4.3.2 Satz (Satz von Ionescu-Tulcea für Wahrscheinlichkeitsmaße)
Seien P_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n)$ mit

$$P(A_1 \times \ldots \times A_N \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \Omega_i) = P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_N(A_N)$$

für alle $A_n \in \mathscr{A}_n$, $n = 1, \ldots, N$ und $N \in \mathbb{N}$.

Beweis

Nach Satz 4.1.8 lässt sich P für jedes $N \in \mathbb{N}$ eindeutig auf den messbaren Raum $(\mathscr{A}^N, \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n)$ mit

$$\mathscr{A}^N = \{A^N \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \Omega_n;\ A^N \in \bigotimes_{n=1}^{N} \mathscr{A}_n\}$$

fortsetzen. Insbesondere gilt $P(\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = P(\prod_{n=1}^{N} \Omega_n \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \Omega_n) = 1$. Offensichtlich ist

$$\mathscr{R}^\infty = \{A^N \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \Omega_n;\ A^N \in \bigotimes_{n=1}^{N} \mathscr{A}_n,\ N \in \mathbb{N}\}$$

eine Algebra über $\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. P ist dann ein Prämaß auf dieser Algebra, denn für disjunkte $(B_i \in \mathscr{R}^\infty)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{R}^\infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{A}^N$ und somit $B_i \in \mathscr{A}^N$ für alle $i \in \mathbb{N}$, woraus $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ folgt. Nach Satz 1.4.8 lässt sich P auf die von $\mathscr{R}^\infty$ erzeugte σ-Algebra eindeutig fortsetzen. Die von $\mathscr{R}^\infty$ erzeugte σ-Algebra ist aber $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

4.3.3 Satz (Satz von Ionescu-Tulcea für Wahrscheinlichkeits-Kerne)
Seien $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, messbare Räume, P_1 Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und P_n, $n = 2, 3, \ldots$, Wahrscheinlichkeitskerne von $\left(\prod_{n=1}^{N-1} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{N-1} \mathscr{A}_n\right)$ nach $(\Omega_N, \mathscr{A}_N)$. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n)$ mit

$$P(\mathcal{B}_N) = P_1 \otimes \ldots \otimes P_N(B^N)$$

für alle messbaren Zylinder $\mathcal{B}_N$ zur Basis B^N mit $N \in \mathbb{N}$.

4.3.1 Übungsaufgabe
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_N, \mathcal{A}_N)$ messbare Räume. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_N = (\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{N-1}) \otimes \mathcal{A}_N$ gilt. Was bedeutet das für unendliche Produkträume?

4.3.2 Übungsaufgabe
Sei $\mathbb{R}^\infty$ der Raum der reellen Zahlenfolgen und $\mathcal{B}^\infty := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}$ das Produkt der Borel-σ-Algebren $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^\infty \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} =: x \to f(x) := \begin{cases} \infty, \text{ falls } \sum_{n=1}^{N} x_n < 1 \text{ für alle } N, \\ \min\{N; \sum_{n=1}^{N} x_n \geq 1\}, \text{ sonst,} \end{cases}$$

$\mathcal{B}^\infty - \overline{\mathcal{B}}$-messbar ist.

Teil II

Wahrscheinlichkeitstheorie

5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen

5.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

5.1.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar und $C \in \mathscr{C}$. $P_*^{X|T}(C, \cdot) : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben T $:\Longleftrightarrow$

(i) $P_*^{X|T}(C, \cdot)$ ist $\mathscr{D}$-$\mathscr{B}$-messbar,

(ii) $P(X \in C, T \in D) = \int_D P_*^{X|T}(C, t)\, P^T(dt)$ für alle $D \in \mathscr{D}$.

$P_*(X \in C|T = t) := P_*^{X|T=t}(C) := P_*^{X|T}(C, t)$ heißt Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben $T = t$.

5.1.2 Lemma

Seien $P_{*1}^{X|T}(C, \cdot)$ und $P_{*2}^{X|T}(C, \cdot)$ zwei Versionen der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben T, dann gilt $P_{*1}^{X|T}(C, \cdot) = P_{*2}^{X|T}(C, \cdot)$ P^T-f.ü.

5.1.3 Lemma

Sei $T_1 : \Omega \to \mathcal{T}_1$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}_1$-messbar und sei $T_2 : \Omega \to \mathcal{T}_2$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}_2$-messbar. Sind $P_*^{X|T_i}(C, \cdot)$ Versionen der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben T_i, $i = 1, 2$, und gilt $T_1^{-1}(\mathscr{D}_1) = T_2^{-1}(\mathscr{D}_2)$, dann gilt $P_*^{X|T_1}(C, T_1(\cdot)) = P_*^{X|T_2}(C, T_2(\cdot))$ P-f.ü.

5.1.4 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $C \in \mathscr{C}$ und $\mathscr{A}_0$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{A}$. $P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben $\mathscr{A}_0$ $:\Longleftrightarrow$

(i) $P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot)$ ist $\mathscr{A}_0$-$\mathscr{B}$-messbar,

(ii) $P(\{X \in C\} \cap A) = \int_A P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \omega)\, P(d\omega)$ für alle $A \in \mathscr{A}_0$.

5.1.5 Lemma (Faktorisierungslemma)

Sei $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar und $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

Z ist $T^{-1}(\mathscr{D})$-$\mathscr{B}$-messbar $\Longleftrightarrow$ es existiert eine $\mathscr{D}$-$\mathscr{B}$-messbare Abbildung $f : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$.

5.1.6 Satz (Existenz der Version der bedingten Wahrscheinlichkeit)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, und $\mathscr{A}_0$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{A}$.
a) Dann existiert für alle $C \in \mathscr{C}$ eine Version $P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot)$ der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben $\mathscr{A}_0$ und sie ist P-f.ü. eindeutig.
b) Ist $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar und $\mathscr{A}_0 = T^{-1}(\mathscr{D})$, dann existiert für alle $C \in \mathscr{C}$ eine Version $P_*^{X|T}(C, \cdot)$ der bedingten Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben T mit der Eigenschaft

$$P_*^{X|T}(C, T(\cdot)) = P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot).$$

5.1.7 Satz
a) Für jedes $C \in \mathscr{C}$ gilt $0 \leq P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot) \leq 1$ P-f.ü.
b) Sind $C_1, C_2, \ldots \in \mathscr{C}$ paarweise verschieden, dann gilt

$$P_*^{X|\mathscr{A}_0}\left(\bigcup_{n=1}^N C_n, \cdot\right) = \sum_{n=1}^N P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_n, \cdot) \ P\text{-f.ü.}$$

c) Sind $C_1, C_2, \ldots \in \mathscr{C}$ mit $C_n \uparrow C$ oder $C_n \downarrow C$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_n, \cdot) = P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot) \ P\text{-f.ü.}$$

d) Sind $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ mit $C_1 \subset C_2$, dann gilt

$$P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_1, \cdot) \leq P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_2, \cdot) \text{ und } P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_2 \setminus C_1, \cdot) = P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_2, \cdot) - P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C_1, \cdot) \ P\text{-f.ü.}$$

5.1.8 Definition
$P^{X|\mathscr{A}_0} : \mathscr{C} \times \Omega \to [0, 1]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben $\mathscr{A}_0$ $:\Longleftrightarrow$
(i) $P^{X|\mathscr{A}_0}(\cdot, \omega)$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $\omega \in \Omega$,
(ii) $P^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot) = P_*^{X|\mathscr{A}_0}(C, \cdot)$ P-f.ü. für alle $C \in \mathscr{C}$.

5.1.9 Definition
$P^{X|T} : \mathscr{C} \times \mathcal{T} \to [0, 1]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben T $:\Longleftrightarrow$
(i) $P^{X|T}(\cdot, t)$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $t \in \mathcal{T}$,
(ii) $P^{X|T}(C, \cdot) = P_*^{X|T}(C, \cdot)$ P^T-f.ü. für alle $C \in \mathscr{C}$.

5.1.10 Definition
Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, dann heißt $F^{X|\mathscr{A}_0} : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$ bedingte Verteilungsfunktion von X gegeben $\mathscr{A}_0$ $:\Longleftrightarrow$
(i) $F^{X|\mathscr{A}_0}(\cdot, \omega)$ ist Verteilungsfunktion für alle $\omega \in \Omega$,
(ii) $F^{X|\mathscr{A}_0}(x, \cdot) = P_*^{X|\mathscr{A}_0}((-\infty, x], \cdot)$ P-f.ü. für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.1.11 Lemma
Die bedingte Verteilungsfunktion $F^{X|\mathscr{A}_0}$ *existiert immer.*

5.1.12 Satz
Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$*-messbar, dann existiert die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von* X *gegeben* $\mathscr{A}_0$.

5.1.13 Satz
Ist $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$*-messbar und gibt es* $\mathscr{C}$-$\mathscr{B}$*-messbares* $\Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*, so dass* Ψ *injektiv ist,* $\Psi(\mathcal{X}) \in \mathscr{B}$ *und* $\Psi^{-1} : \Psi(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ $\mathscr{B} \setminus \Psi(\mathcal{X})$-$\mathscr{C}$*-messbar ist, dann existiert die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von* X *gegeben* $\mathscr{A}_0$*. Dabei ist* $\mathscr{B} \setminus \Psi(\mathcal{X})$ *die Spur-*σ*-Algebra von* $\mathscr{B}$ *bzgl.* $\Psi(\mathcal{X})$.

5.1.14 Satz (Existenz für separable metrische Räume*)
Sei $\mathcal{X}$ *ein vollständiger, separabler metrischer Raum und* $\mathscr{C}$ *die Borel-*σ*-Algebra über* $\mathcal{X}$*, d.h. die kleinste* σ*-Algebra, die alle offenen Teilmengen von* $\mathcal{X}$ *enthält. Dann existiert ein* $\Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften, wie sie in Satz 5.1.13 gefordert sind.*

5.1.15 Bemerkung
R^p ist ein vollständiger, separabler metrischer Raum, aber auch viele Funktionenräume sind vollständige, separable metrische Räume.

5.1.16 Folgerung
Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$*-messbar und* $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$*-messbar. Erfüllt* $\mathcal{X}$ *die Voraussetzungen von Satz 5.1.14, dann existiert die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung* $P^{X|T}$ *von* X *gegeben* T *und es gilt*

$$P^{(X,T)} = P^{X|T} \otimes P^T.$$

5.1.1 Übungsaufgabe (Mischungsverteilung)
Man nehme an, dass in einem Computer ein elektronisches Bauteil in 60% der Fälle von der Firma A, in 30% der Fälle von der Firma B und in 10% von der Firma C stammt. Die Lebensdauer des Bauteils der Firma A besitze eine Exponentialverteilung mit Parameter λ_A, die der Firma B eine Exponentialverteilung mit Parameter λ_B und die der Firma C eine Exponentialverteilung mit Parameter λ_C. Sei H die Zufallsvariable, die die Herkunft des Bauteils angibt und L die Lebensdauer des Bauteils. Modellierung Sie die Verteilung (L, H) mittels der bedingten Wahrscheinlichkeit.

5.1.2 Übungsaufgabe

Zeigen Sie:

a) $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C,\cdot) = 1_{X^{-1}(C)}(\cdot)$.

b) $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C,\cdot) = P^X(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

c) X, T unabhängig $\Rightarrow P_*^{X|T}(C,\cdot) = P^X(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

d) Satz von Bayes:

$$P(X \in C) > 0 \Rightarrow P(T \in D|X \in C) = \frac{\int_D P_*^{X|T}(C,t)\, P^T(dt)}{\int_\Omega P_*^{X|T}(C,t)\, P^T(dt)}.$$

5.1.3 Übungsaufgabe

Sei C, C_1, $C_2, \ldots \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie:

a) $P_*^{X|\mathcal{A}_0}(\emptyset,\cdot) = 0$ P-f.ü.

b) $P_*^{X|\mathcal{A}_0}(\Omega,\cdot) = 1$ P-f.ü.

c) $C_n \uparrow C$ oder $C_n \downarrow C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C_n,\cdot) = P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C,\cdot)$ P-f.ü.

d) $C_1 \subset C_2 \Rightarrow P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C_2/C_1,\cdot) = P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C_2,\cdot) - P_*^{X|\mathcal{A}_0}(C_1,\cdot)$ P-f.ü.

5.1.4 Übungsaufgabe

Geben Sie eine Version $P_*^{X|\mathcal{A}_0}(\cdot,\cdot)$ der bedingten Wahrscheinlichkeit von X gegeben $\mathcal{A}_0$ an, die keine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben $\mathcal{A}_0$ ist.

5.1.5 Übungsaufgabe

Sei $X(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$, $P^{X|T=t} = P^{X|T}(\cdot, t)$ die bedingte Verteilung von X gegeben $T = t$ und $B := \{(T(\omega), \omega);\ \omega \in \Omega\} \in \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $P^{X|T=t}(\{T = t\}) = 1$ gilt. Hinweis: Betrachten Sie den Schnitt $B(t)$.

5.1.6 Übungsaufgabe

Suppose that X and Y are independent random variables, each with a distribution function F that is positive and continuous. Show that

$$1_{(-\infty,x]}(m) + \frac{1}{2}\, 1_{(x,\infty)}(m)\, \frac{F(x)}{F(m)}$$

is the conditional probability of $X \leq x$ given $\max\{X, Y\} = m$.

5.2 Bedingte Dichten

5.2.1 Definition

Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar, $P^{X|T}$ bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben T und μ ein Maß auf $(\mathcal{X}, \mathscr{C})$. Eine Funktion $f_{X|T} : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ heißt bedingte μ-Dichte von X gegeben T, falls gilt:
(i) $f_{X|T}$ ist $\mathscr{C} \otimes \mathscr{D}$-$\mathscr{B}$-messbar,
(ii) es existiert $D \in \mathscr{D}$ mit $P^T(D) = 0$, so dass $f_{X|T=t} := f_{X|T}(\cdot, t)$ eine μ-Dichte von $P^{X|T=t} = P^{X|T}(\cdot, t)$ für alle $t \notin D$ ist.

5.2.2 Lemma

Eine Funktion $f : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ ist genau dann eine bedingte μ-Dichte von X gegeben T, falls gilt:
(i) f ist $\mathscr{C} \otimes \mathscr{D}$-$\mathscr{B}$-messbar,
(ii) $\int_{\mathcal{X}} f(x, \cdot)\mu(dx) = 1$ P^T-f.ü.,
(iii) $P^{X,T}(C \times D) = \int_D \int_C f(x,t)\,\mu(dx)\,P^T(dt)$ für alle $C \in \mathscr{C}$, $D \in \mathscr{D}$.

5.2.3 Satz

Seien $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar sowie μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf $\mathscr{C}$ bzw. $\mathscr{D}$. Ist f eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-Dichte von $P^{(X,T)}$, dann ist

$$f_{X|T} : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \ni (x,t) \to f_{X|T=t}(x) := \begin{cases} \frac{f(x,t)}{\int_{\mathcal{X}} f(x,t)\,\mu_1(dx)}, & \text{falls } \int_{\mathcal{X}} f(x,t)\,\mu_1(dx) > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine bedingte μ_1-Dichte von X gegeben T.

5.2.1 Übungsaufgabe

Seien $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar sowie μ_1 und μ_2 σ-endliche Maße auf $\mathscr{C}$ bzw. $\mathscr{D}$. Zeigen Sie: Ist $f_{X|T}$ eine bedingte μ_1-Dichte von X gegeben T und f_T eine μ_2-Dichte von P^T, dann gilt
a) f gegeben durch $f(x,t) = f_{X|T=t}(x)\,f_T(t)$ ist eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-Dichte von $P^{(X,T)}$,
b) Formel von Bayes:

$$f_{T|X} : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \ni (t,x) \to f_{T|X=x}(t)$$
$$:= \begin{cases} \frac{f_{X|T=t}(x)\,f_T(t)}{\int_{\mathcal{T}} f_{X|T=t}(x)\,f_T(t)\,\mu_2(dt)}, & \text{falls } \int_{\mathcal{T}} f_{X|T=t}(x)\,f_T(t)\,\mu_2(dt) > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine bedingte μ_2-Dichte von T gegeben X.

5.2.2 Übungsaufgabe (Fortsetzung von Übungsaufgabe 5.1.1)

Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil von der Firma A bzw. B bzw. C stammt, wenn die Lebensdauer $L = l$ beobachtet wurde. Betrachten Sie dazu eine $\lambda \otimes \mu$-Dichte von $P^{L,H}$, wobei λ das Lebesgue-Maß und μ das Zähl-Maß ist.

5.2.3 Übungsaufgabe

Sei (X_1, X_2) 2-dimensional normal-verteilt mit Erwartungswert $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top$ und Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

d.h. $f_{X_1,X_2}(x) = \left(2\pi\sqrt{\det\Sigma}\right)^{-1} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu)\}$ mit $x = (x_1, x_2)^\top$. Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X_1 gegeben X_2.

Hinweis: Zeigen Sie:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)}(x_2)\; f_{\mathcal{N}\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2),\,(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)}(x_1),$$

wobei $f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}$ die Dichte der 1-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist.

5.3 Bedingte Erwartungen

5.3.1 Lemma
Sei $P^{X|\mathscr{A}_0}$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X : \Omega \to \mathcal{X}$ gegeben $\mathscr{A}_0$, $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{C}$-$\mathscr{B}$-messbar und es existiere $E(f(X)) = \int f(x)P^X(dx)$. Dann gilt:

(i) $E(f(X)|\mathscr{A}_0)(\cdot) := \int f(x)P^{X|\mathscr{A}_0}(dx, \cdot)$ existiert P-f.ü. und ist $\mathscr{A}_0$-$\mathscr{B}$-messbar.

(ii) $\int_A E(f(X)|\mathscr{A}_0)(\omega)\, P(d\omega) = \int_A f(X(\omega))\, P(d\omega)$ für alle $A \in \mathscr{A}_0$ und insbesondere gilt

$$E(E(f(X)|\mathscr{A}_0)) = E(f(X)).$$

5.3.2 Definition
Sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, $E(X) \in \overline{\mathbb{R}}$ existiere und $\mathscr{A}_0$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{A}$. $E(X|\mathscr{A}_0)(\cdot) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Version der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathscr{A}_0$ $:\Longleftrightarrow$
(i) $E(X|\mathscr{A}_0)$ ist $\mathscr{A}_0$-$\mathscr{B}$-messbar,
(ii) $\int_A E(X|\mathscr{A}_0)(\omega)\, P(d\omega) = \int_A X(\omega)\, P(d\omega)$ für alle $A \in \mathscr{A}_0$.

5.3.3 Bemerkung
Ist $\mathscr{A}_0 = T^{-1}(\mathscr{D})$, so heißt $E(X|T)$ mit $E(X|T) \circ T = E(X|\mathscr{A}_0)$ Version der bedingten Erwartung von X gegeben T.

5.3.4 Satz (Existenz der bedingten Erwartung*)
Unter den Voraussetzungen von Definition 5.3.2 existiert immer eine Version $E(X|\mathscr{A}_0)$ der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathscr{A}_0$ und sie ist P-f.ü. eindeutig.

5.3.5 Satz (Eigenschaften der bedingten Erwartung)
Seien $X, Y, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit Erwartungswerten $E(X), E(Y), E(X_1), E(X_2), \ldots \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathscr{A}_0$ und $\mathscr{A}_1$ seien Unter-σ-Algebren von $\mathscr{A}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $X = c \in \overline{\mathbb{R}}$ P-f.ü. $\Longrightarrow E(X|\mathscr{A}_0) = c$ P-f.ü.

b) $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|\mathscr{A}_0) = \alpha_1 E(X_1|\mathscr{A}_0) + \alpha_2 E(X_2|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü., falls $\alpha_1 E(X_1|\mathscr{A}_0) + \alpha_2 E(X_2|\mathscr{A}_0)$ existiert.

c) $X_1 \le X_2$ P-f.ü. $\Longrightarrow E(X_1|\mathscr{A}_0) \le E(X_2|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü.

d) $|E(X|\mathscr{A}_0)| \le E(|X|\,|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü.

e) $\mathscr{A}_1 \supset \mathscr{A}_0 \Longrightarrow E(X|\mathscr{A}_0) = E\left(E(X|\mathscr{A}_1)|\mathscr{A}_0\right)$ P-f.ü.

f) Ist X_1 $\mathscr{A}_0$-messbar und existiert $E(X_1 \cdot X_2)$, dann gilt $E(X_1 \cdot X_2|\mathscr{A}_0) = X_1 \cdot E(X_2|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü. (($E(X_1)$ muss dabei nicht existieren).

g) $Y \le X_n$ P-f.ü., $X_n \uparrow X$ P-f.ü., $E(Y) > -\infty$ oder $Y \ge X_n$ P-f.ü., $X_n \downarrow X$ P-f.ü., $E(Y) < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{A}_0) = E(X|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü.
(Satz von der monotonen Konvergenz).

h) $|X_n| \leq Y$ P-f.ü., $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-f.ü., $E(Y) < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{A}_0) = E(X|\mathscr{A}_0)$ P-f.ü. (Satz von der majorisierten Konvergenz).*

5.3.6 Satz
Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar und $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
a) X, T sind stochastisch unabhängig.
b) Für alle messbaren Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gilt $E(f(X)) = E(f(X)|T)$ P^T-f.ü.
c) Für alle $C \in \mathscr{C}$ gilt $P^X(C) = P_*^{X|T}(C, \cdot)$ P^T-f.ü.
Existiert eine bedingte Verteilung $P^{X|T}$ von X gegeben T, dann ist a), b), c) äquivalent mit:
d) $P^X = P^{X|T}$ P^T-f.ü.
Existiert eine Dichte f_X von X, dann ist a), b), c), d) äquivalent mit
e) $f_X = f_{X|T}$ P^T-f.ü.

5.3.7 Satz
Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar, $T : \Omega \to \mathcal{T}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{D}$-messbar, $f : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{C} \otimes \mathscr{D}$-messbar und es existiere $E(f(X,T))$. Dann gilt

$$E(f(X,T)|T = t) = E(f(X,t)) \text{ für } P^T\text{-fast alle } t \in \mathcal{T}.$$

5.3.1 Übungsaufgabe
Beweisen Sie die Aussagen von Satz 5.3.5 a) - e).

5.3.2 Übungsaufgabe (Fortsetzung von Übungsaufgabe 5.2.2)
Das elektronische Bauteil der Firma A kostet 1 EUR, das von Firma B 2 EUR und das von Firma C 4 EUR. Was ist der erwartete Preis, den der Computerhersteller für das Bauteil bezahlt hat, wenn die Bauteillebensdauer $L = l$ beobachtet wurde.

5.3.3 Übungsaufgabe
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{S}$ eine Gruppe endlicher Ordnung n von wahrscheinlichkeitstreuen Abbildungen (d.h. $\mathcal{S}$ hat n Elemente und für jedes $g \in \mathcal{S}$ gilt $P^g = P$, insbesondere ist g $\mathscr{A} - \mathscr{A}-$messbar). Zeigen Sie:

a) $\mathscr{A}_\mathcal{S} := \{A \in \mathscr{A};\ g(A) = A$ für alle $g \in \mathcal{S}\}$ ist eine σ-Algebra, die sogenannte σ-Algebra der $\mathcal{S}$-invarianten Mengen aus $\mathscr{A}$.

b) Existiert $E(X)$, dann gilt $E(X|\mathscr{A}_\mathcal{S}) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathcal{S}} X \circ g$ P-f.ü.

6 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

6.1 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

6.1.1 Definition

a) $\mathcal{O} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ *heißt Topologie auf* $\Omega :\Longleftrightarrow$

(i) $O_i \in \mathcal{O},\ i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$,

(ii) $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}$.

Dabei ist I *eine beliebige Indexmenge, die endlich, abzählbar oder überabzählbar sein kann.*

b) $O \in \mathcal{O}$ *heißt offene Menge.*

c) O^c *mit* $O \in \mathcal{O}$ *heißt abgeschlossene Menge.*

d) Für $A \subset \Omega$ *ist* $\mathsf{int}A$ *die größte in* A *enthaltene offene Menge (*int *von „interior").*

e) Für $A \subset \Omega$ *ist* $\mathsf{cl}A$ *die kleinste abgeschlossene Menge, die* A *enthält (*cl *von „closure").*

f) $\partial A := \mathsf{cl}A \setminus \mathsf{int}A$ *heißt der Rand von* A.

g) Ist $\mathcal{O}$ *Topolohgie auf* Ω*, dann heißt* $\mathscr{A}$ *Borel-*σ*-Algebra auf* $\Omega :\Longleftrightarrow \mathscr{A} = \sigma(\mathcal{O})$.

6.1.2 Lemma

Ist Ω *topologischer Raum mit Borel-*σ*-Algebra* $\mathscr{A}$*, dann gilt* $\partial A \in \mathscr{A}$ *für alle* $A \subset \Omega$.

6.1.3 Definition

Sei Ω *topologischer Raum mit Borel-*σ*-Algebra* $\mathscr{A}$*. Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen* P_n *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ *heißt schwach konvergent gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß* P *auf* $(\Omega, \mathscr{A})$ $(P_n \longrightarrow P$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} P_n = P) :\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \text{ für alle } A \in \mathscr{A} \text{ mit } P(\partial A) = 0.$$

Die Mengen A *mit* $P(\partial A) = 0$ *heißen* P*-randlose Mengen.*

6.1.4 Definition

Sei (Ω, d) *ein metrischer Raum mit Metrik* d*. Dann heißt* $\mathscr{A}$ *Borel-*σ*-Algebra über* $\Omega :\Longleftrightarrow \mathscr{A} = \sigma(\mathcal{O})$*, wobei* $\mathcal{O}$ *die durch* d *erzeugte Topologie ist, d.h.* $O \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow$ *für alle* $\omega \in O$ *gibt es ein* $\epsilon > 0$ *mit* $\{\omega' \in \Omega;\ d(\omega, \omega') < \epsilon\} \subset O$.

6.1.5 Satz (Satz von Portmanteau)
Sei (Ω, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$. Für Wahrscheinlichkeitsmaße P_n, $n \in \mathbb{N}$, und P sind folgende Aussagen äquivalent:
a) $P_n \longrightarrow P$.
b) $\int f dP_n \longrightarrow \int f dP$ *für alle stetigen und beschränkten* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *d.h.* $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$.
c) $\int f dP_n \longrightarrow \int f dP$ *für alle beschränkten, gleichmäßig stetigen* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *d.h.* $f \in \mathcal{UC}_b(\Omega)$.
d) $\limsup_{n\to\infty} P_n(A) \leq P(A)$ *für alle abgeschlossenen* $A \subset \Omega$.
e) $\liminf_{n\to\infty} P_n(O) \geq P(O)$ *für alle offenen* $O \subset \Omega$.

6.1.6 Lemma
Sei A abgeschlossen, $\rho(\omega, A) := \inf_{\omega' \in A} d(\omega, \omega')$, $\epsilon > 0$, $G := \{\omega \in \Omega;\ \rho(\omega, A) < \epsilon\}$, $F := \{\omega \in \Omega;\ \rho(\omega, A) \leq \epsilon\}$. Dann gilt:
a) G ist offen.
b) F ist abgeschlossen.
c) Durch

$$f(\omega) := \frac{\rho(\omega, G^c)}{\rho(\omega, G^c) + \rho(\omega, A)}$$

wird eine gleichmäßig stetige Abbildung von Ω nach $[0, 1]$ definiert.

6.1.7 Lemma
Ist (Ω, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$ und sind P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{A}$ mit $\int f dP = \int f dQ$ für alle $f \in \mathcal{UC}_b(\Omega)$, dann gilt $P = Q$.

6.1.8 Folgerung
Ist (Ω, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$ und konvergiert P_n schwach sowohl gegen P als auch Q, so gilt $P = Q$.

6.1.9 Satz (Kolmogorov, Prohorov)
Sei (Ω, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$, P_n, P, $n \in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ mit $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}_0$ für alle $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_0$, d.h. $\mathscr{A}_0$ ist durchschnittsstabil. Gilt
(i) für alle O offen gibt es $(A_n \in \mathscr{A}_0)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
oder
(ii) (Ω, d) ist separabel und für alle $\omega \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ gibt es $A \in \mathscr{A}_0$ mit $\omega \in \mathrm{int} A$ und $A \subset \{\omega' \in \Omega;\ d(\omega, \omega') < \epsilon\}$,
dann gilt:

$$(P_n(A) \longrightarrow P(A) \text{ für alle } A \in \mathscr{A}_0) \implies P_n \longrightarrow P.$$

6.1.10 Bemerkung

Dabei heißt ein topologischer Raum separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die in diesem Raum dicht liegt. Insbesondere sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^p$ separabel.

6.1.11 Satz

Sei $(\Omega, \mathscr{A}) = (\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und P Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und F. Dann gilt

$$P_n \longrightarrow P \iff F_n(x) \longrightarrow F(x) \text{ für alle } x, \text{ bei denen } F \text{ stetig ist .}$$

6.1.12 Satz

Seien (Ω_i, d_i) metrische Räume mit Borel-σ-Algebren $\mathscr{A}_i$ für $i = 1, 2$, P, P_n, $n \in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{A}_1$, $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ $\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_2$-messbar und $D_h := \{\omega_1 \in \Omega_1;\ h \text{ ist unstetig in } \omega\}$. Dann gilt

$$P_n \longrightarrow P \quad \text{und} \quad P(D_h) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_n^h \longrightarrow P^h.$$

6.1.13 Satz (Helly's Auswahlsatz)

Seien $F_1, F_2, \ldots$ Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}^p$. Dann existiert eine Teilfolge $(F_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und eine monoton wachsende, rechtseitig stetige Funktion G, die nur Werte in $[0,1]$ annimmt, so dass $\lim_{l\to\infty} F_{n_l}(x) = G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$ gilt, in denen G stetig ist.

6.1.14 Definition

Sei Ω topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$ und $\mathbb{P}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathscr{A}$.
a) $\mathbb{P}$ heißt straff (tight) $:\iff$ für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $P(K) > 1 - \epsilon$ für alle $P \in \mathbb{P}$.
b) $\mathbb{P}$ heißt relativ kompakt $:\iff$ für alle Folgen $(P_n \in \mathbb{P})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es eine Teilfolge $(P_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P_{n_l} \longrightarrow P$ für $l \to \infty$.

6.1.15 Satz (Satz von Prokhorov)

Sei $\mathbb{P}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$. Dann gilt:

$$\mathbb{P} \text{ ist straff} \iff \mathbb{P} \text{ ist relativ kompakt.}$$

6.1.16 Lemma

Für jede Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$ gilt: Ist $\{P_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ straff und jede konvergente Teilfolge $(P_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen P, dann gilt $P_n \longrightarrow P$.

6.1.1 Übungsaufgabe

Sei $\Omega = [0,1] \cup \{2\}$, $\mathcal{E}_0 := \{O \cap [0,1];\ O$ offen bezgl. gewöhnlicher Topologie$\}$, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \cup \{(a,1) \cup \{2\};\ a \in (0,1)\}$ und $\mathcal{O}$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie. Finden Sie eine Folge von Einpunktmaßen e_{x_n} die gegen zwei verschiedene Einpunktmaße schwach konvergiert. Hinweis: Zeigen Sie die folgende Äquivalenz: $x_n \to x \iff e_{x_n} \to e_x$.

6.1.2 Übungsaufgabe

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p_n,\ p$ Wahrscheinlichkeitsdichten bzgl. μ von $P_n,\ P$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p\ \mu\text{-f.ü.} \implies \lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}} |P(A) - P_n(A)| = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\sup_{A\in\mathcal{A}} |\int_A p\, d\mu - \int_A p_n\, d\mu| = \int_{\{p-p_n\geq 0\}} |p-p_n|\, d\mu$ und benutzen Sie den Satz von Lebesgue.

6.1.3 Übungsaufgabe

Sei d die Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die durch

$$d(x,y) = d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

gegeben ist, $\mathcal{O}$ die durch d gegebene Topologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\mathscr{A}_1 := \{B_N;\ B_N \text{ ist Zylinder zur Basis } B^N \in \bigotimes_{n=1}^{N} \mathscr{B},\ N \in \mathbb{N}\} \text{ und}$$
$$\mathscr{A}_2 := \{R_{N,\epsilon}(x);\ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ N \in \mathbb{N},\ \epsilon \in (0,\infty)^N\} \text{ mit}$$
$$R_{N,(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ |y_n - x_n| < \epsilon_n \text{ für alle } n = 1,\ldots,N\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\sigma(\mathcal{O}) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}$, wobei $\mathscr{B}$ die Borel-σ-Algebra af $\mathbb{R}$ ist.

b) $P_n(A) \to P(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}_1$ mit $P(\partial A) = 0 \implies P_n \to P$.

c) $P_n(A) \to P(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}_2$ mit $P(\partial A) = 0 \implies P_n \to P$.

6.2 Konvergenz von Zufallsvariablen

6.2.1 Definition

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P), (\Omega, \mathscr{A}, P_n)$, $n \in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsräume, $(\mathcal{X}, d)$ metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{C}$ und $X, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathcal{X}$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar.

a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert P-f.ü. gegen X $:\Longleftrightarrow$
es gibt $A \in \mathscr{A}$ mit $P(A) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) = 0$ für alle $\omega \notin A$.
(Abkürzungen: $X_n \longrightarrow X$ P-f.ü./P-f.s., $X_n \longrightarrow X[P]$.)

b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch (bzgl. P) gegen X $:\Longleftrightarrow$
für alle $\epsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(d(X_n), X) > \epsilon) = 0$.
(Abkürzungen: $X_n \xrightarrow{P} X$, $X_n \xrightarrow{st} X$, $X = P - \lim X_n$.)

c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X $:\Longleftrightarrow$
$P_n^{X_n} \to P^X$ (schwache Konvergenz).
(Abkürzungen: $X_n \xrightarrow{D} X$.)

d) Ist $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathscr{C} = \mathscr{B}$, $X, X_1, X_2, \ldots \in \mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, P)$, dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen X $:\Longleftrightarrow$
$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$.
(Abkürzungen: $X_n \xrightarrow{p} X$, $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_p} X$.)

6.2.2 Satz

Seien X, X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dann gilt:
a) $X_n \longrightarrow X$ P-f.ü. $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
b) $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} X$.
c) $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine P-f.ü. konvergente Teilfolge.
d) $X_n \xrightarrow{D} a \in \mathcal{X} \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} a$.

6.2.3 Satz (Lemma von Slutzky)

Seien X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dann gilt:
$Y_n \xrightarrow{D} X$ und $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} X$.

6.2.4 Lemma (Ungleichung von Tschebyschev und Markov)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt für alle $p > 0$, $\epsilon > 0$:

$$\mu(|f| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int |f|^p d\mu.$$

6.2.5 Satz

a) $p > p'$, $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_{p'}} X$.
b) $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} X$.

6.2.6 Lemma

Seien X_n, X r-dimensionale und Y_n, Y p-dimensionale reellwertige Zufallsvariable mit $P_n^{X_n} \longrightarrow P^X$, $P_n^{Y_n} \longrightarrow P^Y$. Dann gilt

$$P_n^{(X_n,Y_n)} \longrightarrow P^{(X,Y)} = P^X \otimes P^Y,$$

falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
a) $P^Y = \delta_c$ mit $c \in \mathbb{R}^p$ $(\delta_c(A) = 1 \Longleftrightarrow c \in A)$,
b) X_n und Y_n sind stochastisch unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$.

6.2.7 Satz

Seien X_n, X p-dimensionale reellwertige Zufallsvariable mit $P_n^{X_n} \longrightarrow P^X$.
a) Seien Y_n p-dimensionale reellwertige Zufallsvariable mit $P_n^{Y_n} \longrightarrow \delta_c$, so gilt
$P_n^{X_n \pm Y_n} \longrightarrow P^{X \pm c}$.
b) Seien Y_n eindimensionale reellwertige Zufallsvariable mit $P_n^{Y_n} \longrightarrow \delta_c$, so gilt
(i) $P_n^{X_n \cdot Y_n} \longrightarrow P^{X \cdot c}$,
(ii) $P_n^{X_n/Y_n} \longrightarrow P^{X/c}$ für $c \neq 0$.

6.2.1 Übungsaufgabe

Beweisen Sie: $X_n \xrightarrow{D} a \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{P} a \in \mathcal{X}$.

6.2.2 Übungsaufgabe

Beweisen Sie: Konvergiert $(\sqrt{n}X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X, so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0.

6.2.3 Übungsaufgabe

Sei X_0 eine gleichförmig auf $[-1, 1]$ verteilte Zufallsvariable, $X_n := X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Y_n := X_0$ für $n = 2m,\ m \in \mathbb{N}$, und $Y_n := -X_0$ für $n = 2m + 1,\ m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass Y_n gegen X_0 in Verteilung konvergiert, aber dass (X_n, Y_n) nicht in Verteilung konvergiert.

6.2.4 Übungsaufgabe

Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap [0, 1]$, $P = \lambda$ das Lebesgue-Maß und $X(\omega) = 0$, $X_n(\omega) = n1_{[0,1/n]}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass X_n P-f.ü. gegen X konvergiert, aber dass für kein $p \in [1, \infty)$ X_n im p-ten Mittel gegen X konvergiert.

6.3 Charakteristische Funktionen

Komplexe Zahlen:
$\mathbb{C} = \{z = u + i\,v;\ u, v \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}^2 = \left\{\binom{u}{v};\ u, v \in \mathbb{R}\right\}$.
$|z| := \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$, wobei $z^* = u - i\,v$ die konjugiert komplexe Zahl ist.
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Integration komplexer Funktionen $f : \Omega \ni \omega \to f(\omega) = u(\omega) + i\,v(\omega) \in \mathbb{C}$:

$$\int f\,d\mu := \int u\,d\mu + i \int v\,d\mu.$$

6.3.1 Definition
a) Sei $\mathbb{P}(\mathbb{R}^p)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}_p)$.

$$\Phi : \mathbb{P}(\mathbb{R}^p) \ni P \longrightarrow \Phi P \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^p} \ \ \textit{mit}\ \ \Phi P(t) = \int e^{it^\top x} P(dx)$$

heißt Fouriertransformation auf $\mathbb{P}(\mathbb{R}^p)$ und $\Phi P : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Fouriertransformierte von P.

b) Ist $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ Wahtscheinlichkeitsraum und X $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariable auf Ω, dann heißt die Fouriertransformierte von P^X charakteristische Funktion von X und wird mit φ_X bezeichnet, d.h.

$$\varphi_X(t) := \int e^{it^\top x} P^X(dx) = E\left(e^{it^\top X}\right).$$

6.3.2 Lemma (Elementare Eigenschaften der charakteristischen Funktion)
Sei X eine $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariable und φ_X ihre charakteristische Funktion. Dann gilt:
a) $|\varphi_X(t)| \leq 1 = \varphi_X(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}^p$.
b) φ_X ist gleichmäßig stetig.

6.3.3 Beispiele

(i) Einpunktverteilung: Gilt $X \sim \varepsilon_a$, so gilt

$$\varphi_X(t) = e^{ita}.$$

(ii) Standard-Normalverteilung: Gilt $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so gilt wegen der Symmetrie von f_X und der Antisymmetrie von sin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, f_X(x)\, dx = 0$$

und somit

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Dieses Integral kann nicht ad hoc bestimmt werden, jedoch können wir φ_X differenzieren:

$$\begin{aligned}\varphi_X'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \cos(tx)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx)\, dx\,.\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Differentation (nach t) und Integration (über x) ist nach Satz 2.3.4 (Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue) möglich, da die partiellen Ableitungen (nach t) des Integranden gleichmäßig (in t) durch eine (nur von x abhängige) integrierbare Funktion beschränkt sind. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\varphi_X'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx)\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, t\cos(tx)\, dx \\ &= 0 - t\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -t\,\varphi_X(t)\,.\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung besitzt die (bis auf die Konstante c) eindeutige Lösung

$$\varphi_X(t) = c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Da φ_X eine charakteristische Funktion ist, gilt $\varphi_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$. Somit muss $c = 1$ gelten und wir erhalten

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

für X mit Standard-Normalverteilung.

6.3.4 Lemma
Seien X, X_1, X_2 $\mathbb{R}^p$-wertige und Y $\mathbb{R}^q$-wertige Zufallsvariablen, $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
a) $\varphi_{AX+b}(t) = e^{it^\top b}\varphi_X(A^\top t)$.
b) X_1, X_2 *stochastisch unabhängig* $\Longrightarrow \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)$.
c) X, Y *stochastisch unabhängig* $\Longrightarrow \varphi_{(X,Y)}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$.
d) $(\varphi_X(t))^* = \varphi_X(-t)$.
e) $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}^p \Longleftrightarrow P^X = P^{-X}$, *d.h.* P^X *ist symmetrisch um 0.*

Beweis
Hier wird nur exemplarisch ein Beweis aufgeführt:
b) Mit X_1 und X_2 sind auch e^{itX_1} und e^{itX_2} stochastisch unabhängig (Statistik II), so dass gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &= E\big(e^{it(X_1+X_2)}\big) = E\left(e^{itX_1}\cdot e^{itX_2}\right) = E\left(e^{itX_1}\right)\cdot E\left(e^{itX_2}\right)\\ &= \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

6.3.5 Satz (Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen)
Seien X und Y zwei $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ bzw. $(\Omega', \mathscr{A}', Q)$. Dann gilt

$$\varphi_X = \varphi_Y \Longleftrightarrow P^X = Q^Y.$$

6.3.6 Lemma
Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariablen und $\{P^{X_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ sei straff. Dann gilt:

P^{X_n} *konvergiert schwach* $\Longleftrightarrow \varphi_{X_n}(t)$ *konvergiert gegen einen endlichen Wert für alle* $t \in \mathbb{R}^p$.

6.3.7 Lemma (Abschneide-Ungleichung, Truncation Inequality)
Sei X $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable. Dann existiert für alle $u > 0$ ein $k > 0$ mit

$$\int_{|x|>1/u} P^X(dx) \le \frac{k}{u}\int_0^u \left[\varphi_X(0) - Re\,\varphi_X(t)\right] dt$$

($Re\,\varphi_X \hat{=}$ Realteil von φ_X).

6.3.8 Satz (Stetigkeitssatz in $\mathbb{R}$)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen und X $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \ \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{D} X.$$

Beweis

"$\Leftarrow$": Nach dem Satz von Portmanteau (Satz 6.1.5) folgt aus $X_n \xrightarrow{D} X$

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$$

für alle stetigen und beschränkten $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies für $f(x) = \cos(tx)$ und $f(x) = \sin(tx)$. Also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} [E(\cos(tX_n)) + i\, E(\sin(tX_n))] \\ &= E(\cos(tX)) + i\, E(\sin(tX)) = \varphi_X(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
"$\Rightarrow$": Aus $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} E(\sin(tX_n)) = E(\sin(tX))\,, \quad \lim_{n\to\infty} E(\cos(tX_n)) = E(\cos(tX))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich gilt für jedes trigonometrisches Polynom f

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))\,.$$

Sei f nun eine beliebige stetige Funktion mit $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$. Dann gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ ein trigonometrisches Polynom f_m mit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$.
Damit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) &= \lim_{n\to\infty} [E(f_m(X_n)) + E(f(X_n) - f_m(X_n))] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left[E(f_m(X_n)) + E\left(\frac{1}{m}\right)\right] = E(f_m(X)) + \frac{1}{m} \\ &= E(f(X)) + E(f_m(X) - f(X)) + \frac{1}{m} \leq E(f(X)) + \frac{2}{m}\,,\end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) \geq E(f(X)) - \frac{2}{m}\,.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$ und mit dem Satz von Portmanteau (Satz 6.1.5) $X_n \xrightarrow{D} X$. □

6.3.9 Satz (Stetigkeitssatz in $\mathbb{R}^p$, Satz von Lévy)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}^p$-wertigen Zufallsvariablen. Dann gilt:
a) $X_n \xrightarrow{D} X \Longrightarrow \varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi_X$.
b) $\varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi$ und $\varphi : \mathbb{R}^K \to \mathbb{C}$ ist stetig in 0 $\Longrightarrow$ es gibt Zufallsvariable X mit $\varphi_X = \varphi$ und $X_n \xrightarrow{D} X$.

6.3.10 Satz (Cramér-Wold Device)
Seien $X, X_n, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt:

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff t^\top X_n \xrightarrow{D} t^\top X \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^p.$$

6.3.1 Übungsaufgabe

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum und $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) u, v sind endlich μ-integrierbar $\Longleftrightarrow$ $|f|$ ist endlich μ-integrierbar.

b) $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.

c) $\int f^* \, d\mu = (\int f \, d\mu)^*$.

6.3.2 Übungsaufgabe

Beweisen Sie:

a) $\int e^{-x^2/2} \cos(xt) \, \lambda(dx) = e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \, dx$.

b) $\int e^{-x^2/2} \sin(xt) \, \lambda(dx) = 0$.

6.3.3 Übungsaufgabe

Beweisen Sie Lemma 6.3.4 a), c)-e).

6.3.4 Übungsaufgabe

Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der

a) Binomialverteilung,

b) Poissonverteilung,

c) multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^k$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ positiv definit, d.h. die Dichte ist $f(x) = (2\pi)^{-k/2} (\det \Sigma)^{-1/2} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\}$.

6.4 Zentrale Grenzwertsätze

6.4.1 Satz (Zentraler Grenzwertsatz für i.i.d. Zufallsvariable)
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit $\mathsf{Var}(X_n)<\infty$, dann konvergiert

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{X_n-E(X_n)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X_n)}}\right) \quad \textit{für } N\to\infty$$

in Verteilung gegen X, das eine Standard-Normalverteilung besitzt.

Beweis

Setze $Y_n=\frac{X_n-E(X_n)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X_n)}}$. Dann gilt

$$E(Y_n)=0,\quad \mathsf{Var}(Y_n)=1$$

und

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{X_n-E(X_n)}{\mathsf{Var}(X_n)}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}Y_n \;=:\; S_N^*\,.$$

Für die charakteristische Funktion von S_N^* gilt dann für alle $t\in\mathbb{R}$

$$\varphi_{S_N^*}(t)=E\left(e^{itS_N^*}\right)=E\left(e^{it\frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{i=1}^{N}Y_n}\right)=\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{N}Y_n}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\,t\right)$$

$$\overset{\text{(Lemma 6.3.4 b))}}{=}\prod_{i=1}^{N}\varphi_{Y_n}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\,t\right)=\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\,t\right)^N=\left(E\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{N}}Y_1}\right)\right)^N$$

(Taylor-Entwicklung)

$$=\left(\varphi_{Y_1}(0)+i\,E(Y_1)\,\frac{t}{\sqrt{N}}+\frac{1}{2}\,i^2E(Y_1^2)\,\frac{t^2}{N}+r_N\right)^N$$

$$=\left(1+0-\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{N}+r_N\right)^N$$

Die Taylorentwicklung wird dabei im Erwartungswert für die Funktion $f(x)=e^{ix}$ an der Stelle $x=0$ vorgenommen:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{t}{\sqrt{N}}y_1\right) &= f(0)+f'(0)\frac{t}{\sqrt{N}}y_1+\frac{1}{2}f''(c_N)\left(\frac{t}{\sqrt{N}}y_1\right)^2\\
&= 1+i\,\frac{t}{\sqrt{N}}y_1+\frac{i^2}{2}e^{ic_N}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}y_1\right)^2\\
&= 1+i\,\frac{t}{\sqrt{N}}y_1+\frac{i^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}y_1\right)^2+\frac{i^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}y_1\right)^2\left(e^{ic_N}-e^{i0}\right).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$R_N = \frac{i^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}Y_1\right)^2 \left(e^{ic_N} - e^{i0}\right)$$

und $r_N = E(R_N)$. Wegen

$$|R_N| \leq \frac{i^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}Y_1\right)^2 2$$

und

$$E\left(\frac{i^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{N}}Y_1\right)^2 2\right) < \infty$$

existiert eine integrierbare Majorante. Nach dem Satz von Lebesgue Satz 2.3.4 gilt wegen $|c_N| \leq \frac{t}{\sqrt{N}}y_1 \longrightarrow 0$

$$\lim_{N\to\infty} N\, r_N = \lim_{N\to\infty} N\, E(R_N) = \int \lim_{N\to\infty} \frac{i^2}{2}t^2 y_1^2 \left(e^{ic_N} - e^{i0}\right) d\, y_1 = 0$$

Damit folgt

$$\varphi_{S_N^*}(t) = \left(1 + 0 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{N} + r_N\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

denn wegen $r_N = o\left(\frac{1}{N}\right)$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_0 mit

$$\left(1 - \left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon\right)\frac{1}{N}\right)^N < \left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{N} + r_N\right)^N < \left(1 - \left(\frac{t^2}{2} - \varepsilon\right)\frac{1}{N}\right)^N$$

für $N \geq N_0$. Da $e^{-\frac{t^2}{2}}$ nach Beispiel 6.3.3(ii) die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung ist, folgt mit Satz 6.3.8 und Satz 6.3.5 die Behauptung. □

6.4.2 Satz (Zentraler Grenzwertsatz unter Lindeberg- und Lyapounov-Bedingung)
Seien für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$X_{1N}, \dots, X_{r_N N}$$

undabhängige Zufallsgrößen mit

$$E(X_{nN}) = 0, \quad \sigma_{nN}^2 = E(X_{nN}^2), \quad s_N^2 = \sum_{n=1}^{r_N} \sigma_{nN}^2 \,.$$

Gilt entweder

(i) ***Lindeberg-Bedingung:***

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{r_N} \frac{1}{s_N^2} \int_{|x|>\varepsilon s_N} x^2 \, P^{X_{nN}}(dx) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

oder

(ii) ***Lyapounov-Bedingung:***

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{r_N} \frac{1}{s_N^{2+\delta}} \, E(|X_{nN}|^{2+\delta}) = 0 \quad \text{für ein } \delta > 0,$$

dann konvergiert für $N \to \infty$

$$\frac{1}{s_N} \sum_{n=1}^{r_N} X_{nN}$$

in Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung, d.h. $\frac{1}{s_N} \sum_{n=1}^{r_N} X_{nN} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

6.4.3 Satz (Delta-Methode, Satz von Cramér)
Seien X_N, $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^p$-wertige Zufallsvariable, $c \in \mathbb{R}^p$ und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^l$ messbar.

a) Ist f im Punkt c stetig und gilt $X_n \xrightarrow{D} c$, so gilt $f(X_N) \xrightarrow{P} f(c)$.

b) Ist f im Punkt c differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$f'(c) = \left(\left. \frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j} \right|_{z=c} \right)_{i=1,\dots,l,j=1,\dots,p} \in \mathbb{R}^{l\times p}$$

und gilt $\sqrt{N}(X_N - c) \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$ mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$, so gilt

$$\sqrt{N}(f(X_N) - f(c)) \xrightarrow{D} Y \sim \mathcal{N}(0, f'(c)\Sigma f'(c)^\top).$$

6.4.1 Übungsaufgabe

Seien $Z_n = \binom{X_n}{Y_n}$, $n \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren mit $E(Z_n) = \mu \in \mathbb{R}^2$ und $\mathsf{Var}(Z_n) = \Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Leiten Sie die asymptotische Verteilung von $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (Z_n - \mu)$ her.

6.4.2 Übungsaufgabe

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen mit $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 0)\cdot P(X_n = 1) = \infty \Longrightarrow \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X_n)}}\right) \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1),$$

d.h. der Zentrale Grenzwertsatz gilt.

b) Bei einer Untersuchung von Fischbeständen werden aus jedem von fünf verschiedenen Seen aus jeweils einer großen Anzahl von Fischen 20 Fische gefangen. Der Anteil p_i unverseuchter Fische im i-ten See wurde auf Grund früherer Beobachtungen wie folgt angenommen:

i	1	2	3	4	5
p_i	0.90	0.96	0.92	0.95	0.98

Berechnen Sie unter dieser Annahme approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 100 untersuchten Fischen mindestens 10 vergiftet sind.

6.4.3 Übungsaufgabe

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit $E(X_n) = \mu$ und $\mathsf{Var}(X_n) < \infty$. Gegen welche Verteilung konvergiert $\sqrt{N}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right)^2 - \mu^2\right)$, wenn $\mu \neq 0$ gilt. Was gilt für $\mu = 0$?