1. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 18. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (8 Punkte): A, B und C seien Teilmengen eines Ergebnisraumes Ω. Man gebe möglichst kurze mengenalgebraische Ausdrücke für das Ereignis an, dass von den Ereignissen A, B, C
a) wenigstens eins eintritt,
b) A und B eintreten, aber C nicht eintritt,
c) genau zwei eintreten,
d) nur A eintritt,
e) genau eins eintritt,
f) keins eintritt,
g) höchstens zwei eintreten,
h) mindestens zwei eintreten.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Für das zufällige Experiment "N-maliges Werfen eines Würfels" bestimme man in einem geeigneten Ereignisraum die Mengen, die folgende Ereignisse repräsentieren :
a) $A_n \mathrel{\widehat{=}}$ "der n-te Wurf ergibt eine 3",
b) $B_n \mathrel{\widehat{=}}$ "der n-te Wurf ergibt die erste 3",
c) $D \mathrel{\widehat{=}}$ "es kommt genau eine 3 vor".
Lassen sich B_n und D über Schnitte und Vereinigungen der A_n's und $\overline{A}_n$'s, $n = 1, \ldots, N$, ausdrücken?

Aufgabe 3* (4 Punkte): In Kapitel 3 wird folgendes definiert werden:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega;\ \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k, \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega;\ \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.
\end{aligned}$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $A_n = (-\infty, x_n)$. Was ist die Beziehung zwischen $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$?
Man betrachte
$(-\infty, \limsup_{n\to\infty} x_n]$, $(-\infty, \limsup_{n\to\infty} x_n)$, $(-\infty, \liminf_{n\to\infty} x_n]$, $(-\infty, \liminf_{n\to\infty} x_n)$
und z.B. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ 2 - \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

2. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 19. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (3 Punkte):

(a) Es gibt 6 Versuchstiere und 6 Käfige. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 6 Versuchstiere auf die 6 Käfige zu verteilen?

(b) Von 10 Versuchstieren sollen 3 für ein Experiment ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es?

(c) Fünf verschiedene Düngemittel und vier verschiedene Unkrautvernichtungsmittel sollen in einem Versuchsgelände bei drei verschiedenen Weizensorten ausprobiert werden. In wie viele Einzelparzellen muss das Versuchsgelände eingeteilt werden, damit jede Kombination von Düngemittel, Unkrautvernichtungsmittel und Weizensorte ausprobiert werden kann?

Aufgabe 2 (Birthday Paradox / Geburtstagsparadoxon) (4 Punkte): What is the probability that at least one student (pupil) of a class of 25 students has birthday at the same day as the teacher?

Aufgabe 3 (4 Punkte): Auf einer Party seien 6 verheiratete Paare versammelt. Wenn von den Anwesenden zwei Personen zufällig ausgesucht werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass
a) die zwei verheiratet sind (2 Punkte),
b) eine weiblich und eine männlich ist? (2 Punkte)

Aufgabe 4* (4 Punkte): Auf einer Party seien 6 verheiratete Paare versammelt. Wenn die 12 Leute in 6 Paare eingeteilt werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass
a) jedes Paar ein “gemischtes Paar“ (männlich/weiblich) ist (2 Punkte),
b) jedes Paar verheiratet ist? (2 Punkte)

3. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 20. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (9 Punkte): Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Ereignisse A, B, $C \in \mathscr{A}$ seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\begin{array}{llll} P(A) = 0.05, & P(B) = 0.1, & P(A \cap B) = 0.03, & P(A \cup C) = 0.42, \\ P(A \cap C) = 0.03, & P(C \setminus (A \cup B)) = 0.34, & P(A \cap B \cap C) = 0.02. & \end{array}$$

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$C, \quad (A \cap C) \setminus B, \quad \overline{A \cap C}, \quad A \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): A train consists of N cars; K $(K > N)$ passengers get on it and select their cars at random (each car has the same probability that it is chosen by a passenger). Find the probability for the event (=Ereignis) A that there will be at least one passenger in each car. Provide the general formula of this probability and calculate this probability for the special case of $N = 4$ and $K = 5$.
Hint: Regard the complement event $\overline{A}$ and use the Poincaré-Sylvester formula.

Aufgabe 3* (6 Punkte): Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie:

a) $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$. (2 Punkte)

b) Aus $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ folgt: $\lim_{n\to\infty} A_n$ existiert und es gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$. (2 Punkte)

c) σ-Stetigkeit: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (3 Punkte) (Achtung diese Aufgabe hat eine Fortsetzung auf dem 4. Übungsblatt): Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Man gebe

a) die kleinste σ-Algebra über Ω an (1 Punkt),

b) die größte σ-Algebra über Ω an (1 Punkt),

c) die von $\{\{1\}, \{1, 3, 4\}\}$ erzeugte σ-Algebra über Ω an (1 Punkt).

4. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 21. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (5 Punkte): Suppose A and B are two events in the sample space $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ for which $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Define a random variable (Zufallsvariable) X on Ω as follows:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega \in \overline{A \cup B}, \\ 2, & \text{if } \omega \in A \cap B, \\ 3, & \text{if } \omega \in A \setminus B, \\ 5, & \text{if } \omega \in B \setminus A. \end{cases}$$

Find the probabilities for

$$P^X((1.5, 3.5)),\ P^X([3.5, \infty)),\ P^X(\{4\}),\ P^X((-\infty, 1)),\ P^X([3, 5]).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung gegeben durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{für } \omega = 1, \\ 5, & \text{für } \omega = 2, \\ -1, & \text{für } \omega = 3, \\ -1, & \text{füt } \omega = 4. \end{cases}$$

Für welche der σ-Algebren in Aufgabe 4 des 3. Übungsblattes ist X messbar? Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.1, & -1 \leq x < 2, \\ 0.32, & 2 \leq x < 2.5, \\ 0.4, & 2.5 \leq x < 4, \\ 0.66 & 4 \leq x < 6, \\ 0.8 & 6 \leq x < 7.5, \\ 0.95 & 7.5 \leq x < 8, \\ 1, & 8 \leq x. \end{cases}$$

Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \in [2, 6]), \quad P(X \in (2, 4)), \quad P(X > 4), \quad P(X \geq 6).$$

5. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 22. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, d.h. X besitzt eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$.
a) Zeigen Sie (2 P.)

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i) = 1.$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X-2| < 2)$ für $\lambda = 1$. (2 P.)

Aufgabe 2 (3 Punkte): Finden Sie Transformationen $T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß des Satzes über Lokations- und Skalenverschiebungen, so dass gilt:
a) $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $T_1(X_1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. (Normalverteilung) (1 P.)
b) $X_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $T_2(X_2) \sim \mathcal{U}(a,b)$ für $-\infty < a < b < \infty$. (Gleichverteilung) (1 P.)
c) $X_3 \sim \mathcal{E}(1)$ und $T_3(X_3) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ für $\lambda > 0$. (Exponentialverteilung) (1 P.)
Dabei bedeutet $X \sim \mathcal{V}$, dass die Zufallsvariable X die Verteilung $\mathcal{V}$ besitzt. Insbesondere bedeutet $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dass X_1 eine Normalverteilung mit Dichte $f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$ besitzt, $X_2 \sim \mathcal{U}(a,b)$ bedeutet, dass X_2 eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung) auf (a,b) mit Dichte $f_{X_2}(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in (a,b)$ und $f_{X_2}(x) = 0$ für $x \notin (a,b)$ besitzt, und $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ bedeutet, dass X_3 eine Exponentialverteilung mit Dichte $f_{X_3}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte) : Suppose the temperature during June is normally distributed with mean $\mu = 18^o$ and standard deviation $\sigma = 3^o$. Find the probability that the temperature is between 17^o and 24^o. Find the temperature t_0 so that the probability of a temperature below t_0 is 0.6.
(mean = Mittelwert, hier Lokationsparameter, standard deviation = Standardabweichung, hier Skalenparameter)

Aufgabe 4 (3 Punkte) : Aus einem Intervall $[a,b]$ werde zufällig ein Punkt gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt näher am Mittelpunkt des Intervalls als am Rand liegt?

6. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 23. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (7 Punkte): Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben die Noten von Schülern in zwei Tests. Die Verteilung von (X, Y) ist durch folgende unvollständige Tabelle gegeben:

	$P(X=i, Y=j)$	Y 1	2	3	$P(X=i)$
X	1	$\frac{1}{20}$	0		0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		

a) Vervollständigen Sie die Tabelle. (1 P.)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Notenabweichung $Z = X - Y$. (2 P.)

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ von Z. (2 P.)

d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(x, y)$ von (X, Y). (2 P.)

Aufgabe 2 (2 Punkte): Beweisen Sie für eine beliebige Verteilungsfunktion $F_{(X,Y)}$

$$\lim_{x,y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 1.$$

Aufgabe 3* (4 Punkte): Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine zweidimensionale Verallgemeinerung der Fragestellung aus Aufgabe 4 des 5. Übungsblattes.

Aufgabe 4* (Herleitung der Multinomialverteilung) (5 Punkte): In einer Urne befinden sich N Kugeln, davon N_j Stück mit der Markierung "j", $1 \leq j \leq k$. Zeigen Sie:
Werden aus der Urne n Kugeln mit Zurücklegen gezogen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, n_1 Kugeln mit der Markierung "1", n_2 Kugeln mit der Markierung "2", …, n_k Kugeln mit der Markierung "k" zu ziehen

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k},$$

falls $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Aufgabe 5 (Satz von Bayes) (4 Punkte): Im Funkverkehr werden Nachrichten kodiert in den Signalen "Punkt" und "Strich" (z.B. Morse-Alphabet, bzw. "0" und "1" bei digitaler Übertragung) gesendet. Das Signal "Punkt" werde in 60% der Fälle benutzt. Aus Erfahrung sei bekannt, dass während der Übermittlung das Signal "Punkt" mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2 verfälscht wird, d.h. dass "Strich" empfangen wird, obwohl "Punkt" gesendet wurde. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit der Verfälschung von "Strich" in "Punkt" betrage 0.1.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Signal als "Punkt" empfangen wird? (2 P.)

b) Wenn ein Signal als "Punkt" empfangen wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch "Punkt" gesendet wurde? (2 P.)

7. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 24. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (Das Türenparadoxon) (4 Punkte): Die amerikanische Journalistin Marilyn vos Savant (mit angeblich dem höchsten IQ der Welt) bekam 1990 für ihre Denksport-Kolumne im "Parade Magazine" von einem Leser folgende Aufgabe:

> Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats (Ziegenböcke). You pick a door, say $\sharp$ 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say $\sharp$ 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door $\sharp$ 2?". Is it to your advantage to switch your choice of doors?

Welche Antwort würden Sie an Stelle von Mrs. vos Savant geben? Erstellen Sie dazu ein geeignetes stochastisches Modell, und geben sie explizit an, welche Annahmen Sie treffen.

Aufgabe 2* (4 Punkte): Überlegen Sie sich Verallgemeinerungen des Türenparadoxons.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Von einem regulären Tetraeder (*echter vierseitiger Würfel*) seien drei der vier Flächen jeweils mit einer der Farben "1", "2" und "3" gefärbt; auf der vierten Seite sei jede dieser drei Farben sichtbar. Es sei A_j das Ereignis, dass nach einem Wurf des Tetraeders die unten liegende Seite die Farbe "j" enthält ($j = 1, 2, 3$). Zeigen Sie:

(a) Je zwei der Ereignisse $A_1,\ A_2,\ A_3$ sind stochastisch unabhängig.

(b) $A_1,\ A_2,\ A_3$ sind nicht gemeinsam stochastisch unabhängig.

Aufgabe 4* (4 P.): In Analogie zu Lemma 5.2.2 zeige man:

$$A_1, \ldots, A_N \text{ unabhängig } \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{A_n^* \in \{\emptyset, A_n, \overline{A}_n, \Omega\} \\ n=1,\ldots,N}} P(A_1^* \cap \ldots \cap A_N^*) = P(A_1^*) \cdot \ldots \cdot P(A_N^*).$$

8. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 25. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (6 Punkte) : Eine Münze werde zweimal geworfen. Man betrachte folgende Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned}
&X \text{ gibt an, wie oft "Wappen" auftritt,}\\
&Y \text{ gibt an, wie oft "Zahl" auftritt,}\\
&V = \begin{cases} 0, & \text{falls beim ersten Wurf "Wappen" auftritt,}\\ 1, & \text{falls beim ersten Wurf "Zahl" auftritt,}\end{cases}\\
&W = |X - Y|.
\end{aligned}$$

Sind X, V bzw. X, W bzw. V, W unabhängig?

Aufgabe 2 (6 Punkte): Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2\,e^{-x-y}, & \text{falls } 0 < x < y < \infty,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass es sich bei $f_{(X,Y)}$ tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt (1 P.). Sind X und Y unabhängig (2 P.)? Bestimmen Sie die Dichten für X und Y (2 P.). Von welchen Typ ist die Verteilung von X (1 P.)?

Aufgabe 3 (4 Punkte): (Achtung: Diese Aufgabe hat eine Fortsetzung im 9. Übungsblatt.) Die jährliche Anzahl der an Tollwut erkrankten Menschen im Land n sei Poisson verteilt mit λ_n. Welche Verteilung hat die jährliche Gesamtanzahl der an Tollwut erkrankten Menschen in den Ländern $n = 1, \ldots, N$?
Hinweis: Bestimme zuerst die Verteilung von $X_1 + X_2$ für $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.

Aufgabe 4* (Binomial Distribution) (4 Punkte): A drug manufacturing company is debating whether a vaccine is effective enough to be marketed. The company claims that the vaccine is 90% effective - that is, when the vaccine is administered to a person, the chance that the person will develop immunity is 0.9. The federal drug agency, however, believes that the claim is exaggerated and that the drug is 40 percent effective. To test the company claim, the following procedure is devised: The vaccine will be tried on ten people. If eight or more people develop immunity, the company claim will be granted. Find the probability that

a) the company claim will be granted incorrectly (i.e. when the federal drug agency is correct in its assertion),

b) the company claim will be denied incorrectly (i.e. when the vaccine is indeed 90 percent effective).

(federal drug agency = Bundesgesundheitsamt)

9. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 26. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (5 Punkte) : Über die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y sei bekannt:

		X			
		1	2	4	8
	1	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{4}{64}$	0
Y	2	$\frac{12}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$
	3	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{4}{64}$	0

Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y sowie die bedingte Dichte $p_{X|Y=y}$ für alle $y \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 2 (Fortsetzung von Aufgabe 3 des 8. Übungsblattes) (3 Punkte): X_1 und X_2 seien unabhängige poissonverteilte Zufallsvariable mit Parametern λ_1 und λ_2. Bestimmen Sie die bedingte Dichte $p_{X_1|X_1+X_2=n}$ von X_1 gegeben $X_1 + X_2 = n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte): Let X and Y be independent, exponentially distributed random variables with the same parameter $\lambda > 0$. Show that the conditional distribution of X given that $Z = X + Y = z$ is uniform on the interval $(0, z)$ for $z > 0$.
Hint: Determine the density of (X, Z) with the Transformation Theorem 6.11. (independent = unabhängig, conditional distribution = bedingte Verteilung, uniform distribution = gleichförmige Verteilung)

Aufgabe 4* (Ein einfaches Warteschlangenmodell) (8 Punkte): Es seien 0,1,2,... die Zeitpunkte, an denen ein Skilift abfährt, der pro Zeiteinheit eine Person befördern kann. Zwischen den Zeitpunkten n und $n+1$ kommen Y_n neue Skifahrer an. Die Zufallsvariablen Y_n seien unabhängig. Die Länge X_n der Warteschlange unmittelbar vor der Abfahrt zur Zeit n bestimmt sich rekursiv durch

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} - 1\} + Y_{n-1}.$$

Es sei $X_0 = 0$ gegeben. Zeigen Sie:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n,\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots) = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n).$$

Diese Eigenschaft der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt auch *Markoff-Eigenschaft*.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $i_n = 0$ und $i_n \geq 1$.

10. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 27. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Achtung: Diese Aufgabe hat eine Fortsetzung im 11. Übungsblatt): Bestimmen Sie $E(X)$ für folgende Situationen:
a) Die diskrete Zufallsvariable X habe die folgende Verteilung (2 P.):

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = n)$	0.05	0.1	0.3	0.05	0.1	0.15	0	0.25

b) Die stetige Zufallsvariable X sei $\mathcal{U}(a, b)$-gleichförmig verteilt für $-\infty < a < b < \infty$. (2 P.)

Aufgabe 2 (4 Punkte): Ein Händler möchte eine Ware über das Internet verkaufen. Mit Wahrscheinlichkeit 0.3 bekommt er die Ware vom Hersteller A für 100 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 0.5 vom Hersteller B für 80 Euro und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 vom Hersteller C für 40 Euro. Das Versenden der Ware kostet den Händler pro Stück 5 Euro. Mit Wahrscheinlichkeit 0.1 ist die Ware der Hersteller A und B defekt, mit Wahrscheinlichkeit 0.3 ist die Ware des Herstellers C defekt. Ist die Ware defekt, fallen ein zweites Mal Portogebühren an. Nehmen Sie an, dass der Händler höchstens einmal eine defekte Ware ersetzt. Welchen Preis sollte der Händler mindestens verlangen, damit dass Geschäft für ihn rentabel ist?
Hinweis: Das ist eine Frage nach den erwarteten Kosten, d.h. es muss der Erwartungswert einer geeignet gewählten Zufallsgröße bestimmt werden.

Aufgabe 3 (6 Punkte): The random variable X has values in $\mathbb{N}$ and its expected value $E(X) < \infty$ exists. Show (3 P.)

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

Do you find a similar relation between expected value and distribution function for a nonnegative random variable which is absolutely continuous? (3 P.) (expected value = Erwartungswert, absolutely continuous = absolut stetig)

11. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 28. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (Fortsetzung von Aufgabe 1 des 10. Übungsblattes) (6 Punkte) : Bestimmen Sie $\mathsf{Var}(X)$ für folgende Situationen:
a) Die diskrete Zufallsvariable X habe die folgende Verteilung (3 P.):

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = n)$	0.05	0.1	0.3	0.05	0.1	0.15	0	0.25

b) Die stetige Zufallsvariable X sei $\mathcal{U}(a, b)$-gleichförmig verteilt für $-\infty < a < b < \infty$. (3 P.)

Aufgabe 2* (4 Punkte): Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen gerne Stein-Schere-Papier. Wer ein Spiel gewinnt, erhält vom Verlierer eine Marzipankartoffel. Allerdings kann der Osterhase mit seinen Pfoten nur Stein und Papier, aber nicht Schere machen. Beide wissen das, reden aber nicht darüber. Der Weihnachtsmann ist also im Vorteil, weil er die Wahl zwischen Stein, Schere und Papier hat. Die Frage ist: Wie groß ist dieser Vorteil? Genauer: Wie viele Marzipankartoffeln macht der Weihnachtsmann im Durchschnitt pro Spiel plus, wenn beide (für sich) optimal spielen?
Hier noch zur Erinnerung die Spielregeln von Stein-Schere-Papier: Die beiden Spieler entscheiden sich für ein Element *Stein*, *Schere* oder *Papier* und bilden dies zur gleichen Zeit mit ihren Händen nach. Der Gewinn richtet sich nach folgenden Regeln: *Stein* schlägt *Schere* (macht die Schere stumpf), *Schere* schlägt *Papier* (zerschneidet das Papier), *Papier* schlägt *Stein* (wickelt den Stein ein). Wenn beide Spieler die gleiche Figur bilden, geht diese Runde unentschieden aus.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Zeigen Sie:
a) Existiert das $k+1$-te Moment $E(X^{k+1})$, so existiert auch das k-te Moment $E(X^k)$. (3 P.)
Hinweis: Benutzen Sie: $E(|X|^k) < \infty \Leftrightarrow E(X^k)$ existiert und zeigen Sie $E(|X|^{k+1}) < \infty \Rightarrow E(|X|^k) < \infty$.
b) $\mathsf{Var}(X)$ existiert genau dann, wenn $E(X^2)$ existiert. (3 P.)

12. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe 29. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (6 Punkte) : Über die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y sei bekannt (siehe Aufgabe 1 des 9. Übungsblattes):

		X			
		1	2	4	8
	1	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{4}{64}$	0
Y	2	$\frac{12}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$
	3	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{4}{64}$	0

Bestimmen Sie die die Kovarianz $\mathsf{cov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Wird N-mal aus einer Urne mit R roten und S schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so sei

$$X_n = 1 \widehat{=} \text{ in der } n\text{-ten Ziehung wurde eine rote Kugel gezogen,}$$

$$X_n = 0 \widehat{=} \text{ in der } n\text{-ten Ziehung wurde eine schwarze Kugel gezogen,}$$

$n = 1, \ldots, N$.
Zeigen Sie, dass die Ziehungen X_n nicht unabhängig sind aber identisch verteilt sind. Zeigen Sie auch, dass das gleiche für die Zufallsvektoren (X_n, X_{n+1}), $n = 1, \ldots, N-1$, gilt.

Aufgabe 3* (Fortsetzung von Aufgabe 2) (6 Punkte): Zeigen Sie für die Zufallsgrößen aus Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(X_n, X_{n-1}) &= -\frac{R \cdot S}{(R+S)^2(R+S-1)} < 0, \text{ (3 P.)} \\
\rho(X_n, X_{n-1}) &= -\frac{1}{R+S-1}, \text{ (3 P.)} \\
\mathsf{Var}\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) &= \frac{R+S-N}{R+S-1}\, N\, \frac{R}{R+S}\, \frac{S}{R+S} \ \text{. (3 P.)}
\end{aligned}$$

13. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe freiwillig

Aufgabe 1* (4 Punkte): Beweisen Sie: Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen X und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen Y, so konvergiert $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen $X + Y$.
Hinweis: Der Beweis geht analog zur Aussage für das Produkt aber viel einfacher.

Aufgabe 2* (6 Punkte): Beweisen Sie: Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen X und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Y, so gilt:

a) $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen $X + Y$, (3 P.)

b) $(X_n \cdot Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen $X \cdot Y$. (3 P.)

Aufgabe 3 (7 Punkte): Beim Sommerfest möchte die Fachschaft Statistik ihr Budget aufbessern. Man entschließt sich zu folgender Lotterie: Der Spieler würfelt mit zwei Würfeln. Bei einem Pasch erhält er als Auszahlung die Gesamtaugenzahl (also Zahlen zwischen 2 und 12) in Euro, ansonsten nichts.

a) Wie hoch muss der Spieleinsatz gewählt werden, damit das Spiel fair ist, d.h. dass die Fachschaft Statistik auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht? (2 P.)

b) Die Klasse will aber natürlich Gewinn machen. Es wird von 200 Spielen ausgegangen. Die Fachschaft Statistik will einen erwarteten Gewinn G von 100 Euro erzielen. Wie hoch muss dazu der Spieleinsatz sein? (2 P.)

c) Gehen Sie von diesem Spieleinsatz aus und finden Sie mit der Tschebyscheff-Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass die Fachschaft Statistik dabei keinen Verlust macht. (3 P.)

Aufgabe 4 (6 Punkte): Aus früheren Experimenten sei bekannt, dass bei einer Waage ein Messfehler mit einer Standardabweichung von 2 mg auftritt, die Waage aber im Mittel das Gewicht richtig angibt.

a) Wie viele Wiegevorgänge muss man durchführen, um das unbekannte Gewicht eines Objektes mit mindestens 95% Sicherheit auf 0.5 mg genau durch das arithmetische Mittel der Wiegeergebnisse zu schätzen? (3 P.)

b) Wie viele Wiegevorgänge muss man durchführen, wenn der Messfehler der Waage normalverteilt ist? (3 P.)

Hinweis: Standardabweichung: $\sqrt{\mathsf{Var}(X_n)}$, im Mittel richtiges Gewicht: $E(X_n) = \mu$ mg ist das Gewicht.

14. Übungsblatt zur

Statistik II - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Müller SS 2020

Abgabe freiwillig

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei $Y \sim \mathcal{R}[-1,1]$, d.h. Y besitzt eine Rechteckverteilung auf $[-1,1]$, $X_n = \frac{1}{n}Y$ und $X = \varepsilon_0$, d.h. X besitzt die Einpunktverteilung auf 0. Zeigen Sie, dass X_n fast sicher gegen X konvergiert.

Aufgabe 2* (6 Punkte): Beweisen Sie: Konvergiert $(\sqrt{n}X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X, so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0.

Aufgabe 3* (6 Punkte): Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsgrößen mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} a$ und $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$. Beweisen Sie:

a) $X_n + Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, (2 P.)

b) $X_n \cdot Z_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, (2 P.)

c) $Z_n/Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z/a$. (2 P.) (Hinweis: Zeige $\frac{1}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{P}} \frac{1}{a}$ und benutze das, was im Skript schon bewiesen wurde.)

Aufgabe 4 (7 Punkte): Bei einer Fluggesellschaft weiß man aus Erfahrung, dass im Mittel 18% der Personen, die einen Platz reservieren lassen, nicht erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 220-sitzigen Jet mehr als 220 Reservierungen vorgenommen.

a) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Zentralen Grenzwertsatz die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Personen, für die ein Platz reserviert wurde, auch einen Platz erhalten, wenn 240 Reservierungen vorgenommen wurden. Nehmen Sie dabei an, dass die Entscheidungen, ob die einzelnen Reservierungen wahrgenommen werden, individuell, d.h. unabhängig zustande kommen. (3 P.)

b) Wie viele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestens 99% beträgt? Geben Sie eine Näherungslösung an. (4 P.)

Hinweis: Setze $X = \sum_{n=1}^{N} X_n$ die Anzahl der zum Abflug erscheinenden Personen und berechne $P(X \leq 220)$.