Prof. Dr. Chr. Müller

1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt:
15	8	16	16	7	8	15	15	100

Probeklausur "Statistik II"

NAME: __________ VORNAME: __________

FACHRICHTUNG: __________

MATRIKEL-NUMMER:

Bitte beachten Sie folgendes:

1) Die Klausur besteht aus **8 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach. Bei der Korrektur werden **nur** Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt. Das Entfernen der Heftklammer ist **nicht** erlaubt.

2) Die Klausur ist bestanden, wenn insgesamt 50 Punkte erreicht worden sind.

3) Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden. Die Lösungen sollen so erfolgen, dass der Lösungsweg deutlich erkennbar ist (kurze Kommentare! Angabe aller Voraussetzungen! Behauptungen begründen! benutzte Sätze zitieren!). Teillösungen werden gewertet.

4) Vereinfachen Sie Formeln und Brüche durch Kürzen etc. so weit wie möglich.

5) Als Hilfsmittel sind nur drei auf beiden Seiten handgeschriebene DIN-A4-Blätter zugelassen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Insbesondere darf kein elektronisches Gerät auf dem Arbeitsplatz liegen oder während der Klausur benutzt werden. **Wird ein elektronisches Gerät entdeckt, ist die Klausur nicht bestanden.**

6) Klausuren, die nicht unmittelbar nach der entsprechenden Aufforderung der Aufsichtspersonen abgegeben werden, können später **nicht** mehr berücksichtigt werden.

7) **Klausureinsicht:** Die Möglichkeit der Einsichtnahme entnehmen Sie bitte der Homepage zu dieser Veranstaltung.

Kenntnis genommen: __________

(Unterschrift)

Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ und $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{b, c, d, e\}\}$. Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra vollständig an. (5 Punkte)

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{a,b\}, \{b,c,d,e\}, \{b\}, \{a\}, \{c,d,e\}, \{a,c,d,e\}\}$

(b) Sei $\mathcal{A}$ die aus $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra von (a), $\tilde{\mathcal{A}} = \{\emptyset, \{A, B, C\}, \{D, E\}, \{A, B, C, D, E\}\}$ die σ-Algebra auf $\tilde{\Omega} = \{A, B, C, D, E\}$ und $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ durch

$$X(a) = A,\ X(b) = B,\ X(c) = C,\ X(d) = D,\ X(e) = E$$

gegeben. Kann X dann eine Zufallsvariable sein, d.h. ist X messbar? Begründen Sie die Antwort. (5 Punkte)

X ist nicht messbar, da z.B.
$X^{-1}(\{D,E\}) = \{d,e\} \notin \mathcal{A}$ (oder
$X^{-1}(\{A,B,C\}) = \{a,b,c\} \notin \mathcal{A}$)

(c) Sei $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ die σ-Algebra auf $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ vollständig an, für das $P(\{c\}) = \frac{1}{2}$ und $P(\{d\}) = \frac{1}{4}$ gilt. (5 Punkte)

$P(\{c,d\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P(\{a,b\}) = 1 - P(\{c,d\}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(\{a,b,c\}) = P(\{a,b\}) + P(\{c\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,

$P(\{a,b,d\}) = P(\{a,b\}) + P(\{d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

$P(\{a,b,c,d\}) = P(\{a,b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

(a) Sei X eine Zufallsgröße, die eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 3$ besitzt. Berechnen Sie $P(1 \leq X \leq 3)$. (4 Punkte)

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_1^3 3e^{-3x} dx$$

$$= -e^{-3x} \Big|_1^3 = -e^{-9} - (-e^{-3}) = e^{-3} - e^{-9}$$

(b) Sei X eine Zufallsgröße, die eine Normalverteilung mit Parameter $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 9$ besitzt, d.h. $X \sim N(2, 9)$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(0 \leq X \leq 3)$ so an, dass sie mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormal-Verteilung berechnet werden kann. (4 Punkte)

$$X \sim N(2,9) \Rightarrow E(X) = 2, \; var(X) = 9$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{X-2}{3}\right) = 0, \; var\left(\frac{X-2}{3}\right) = \frac{1}{9} var(X) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{X-2}{3} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(0 \leq X \leq 3) = P(-2 \leq X-2 \leq 3-2)$$

$$= P\left(\frac{-2}{3} \leq \frac{X-2}{3} \leq \frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{3}\right)$$

Aufgabe 3: (16 Punkte)

fairen

Man betrachte den zweimaligen Münzwurf und folgendes Spiel: Zeigen beide Münzen Zahl, so er erhält man 3 Euro, zeigt nur eine Münze Zahl, so bezahlt man 1 Euro, und zeigt keine Münze Zahl, so bezahlt man 2 Euro.

(a) Bestimmen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und eine geeignete Zufallsgröße X und geben Sie diesen Wahrscheinlichkeitsraum und die Zufallsgröße X vollständig an. (6 Punkte)

$\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}, \ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

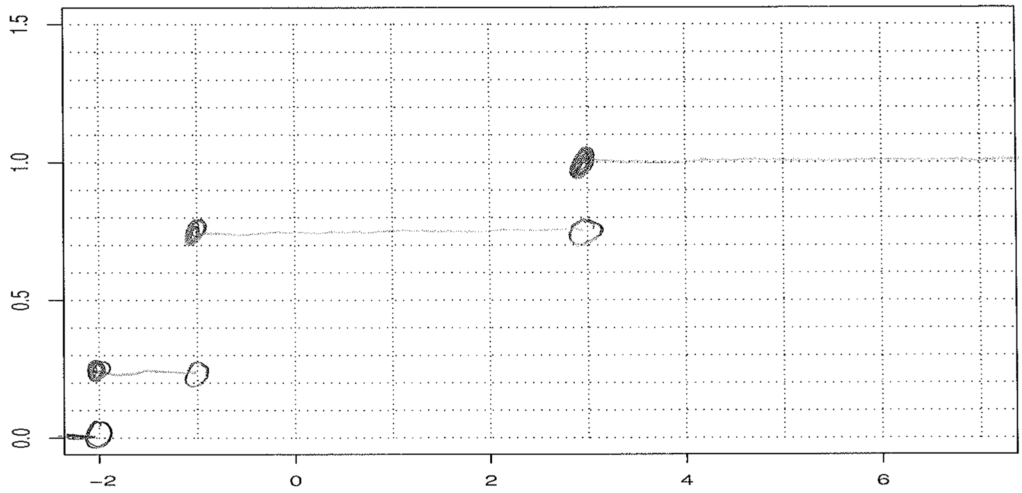
$P(\{(K,K)\}) = P(\{(K,Z)\}) = P(\{(Z,K)\}) = P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X((K,K)) = -2, \ X((K,Z)) = -1,$

$X((Z,K)) = -1, \ X((Z,Z)) = 3$

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X vollständig an und zeichnen Sie diese in das nachstehende Koordinatensystem. (4 Punkte)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/4, & -2 \le x < -1 \\ 3/4, & -1 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



(c) Beurteilen Sie das Spiel: Wird man langfristig, wenn man das Spiel ganz oft wiederholt, Gewinn oder Verlust machen? Begründen Sie die Antwort. (6 Punkte)

$$E(X) = -2\,P(X=-2) + (-1)\,P(X=-1) + 3\,P(X=3)$$
$$= -2\,P(\{(K,K)\}) + (-1)\,P(\{(K,Z),(Z,K)\}) + 3\,P(\{(Z,Z)\})$$
$$= -2\,\tfrac{1}{4} + (-1)\,\tfrac{1}{2} + 3\,\tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

X_n n'te Wiederholung des Spiels. Dann ist $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ der mittlere Gewinn von N Spielen. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ fast sicher gegen $E(X_1) = E(X) = -\frac{1}{4}$ für $N \to \infty$. Also ist langfristig der mittlere Gewinn negativ, so dass man langfristig einen Verlust macht.

Aufgabe 4: (16 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und Y ist durch folgende Tabelle gegeben:

	$P(X=i, Y=j)$	Y 0	1	2	P(X=i)
X	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$
	$P(Y=j)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

(a) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle. (1 Punkte)

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie die Antwort. (2 Punkte)

Nein, denn z.B.

$P(X=0, Y=0) = 0 \neq \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} = P(X=0) \cdot P(Y=0)$

(c) Berechnen Sie die $\mathtt{E}(X)$, $\mathtt{E}(Y)$, $\mathtt{Var}(X)$, $\mathtt{Var}(Y)$ und die Korrelation $\rho(X,Y)$. (6 Punkte)

$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1\, P(X=1) = 6/9$

$E(X^2) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = 6/9$

$var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6/9 - (6/9)^2 = \frac{6 \cdot 9 - 6 \cdot 6}{9 \cdot 9} = \frac{54-36}{81} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$

$E(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1\, P(Y=1) + 2 P(Y=2) = 3/9 + 2 \cdot 5/9 = \frac{13}{9}$

$E(Y^2) = 0^2 P(Y=0) + 1^2 P(Y=1) + 2^2 P(Y=2) = 3/9 + 4 \cdot 5/9 = \frac{23}{9}$

$var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{9 \cdot 23 - 13^2}{81} = \frac{207-169}{81} = \frac{38}{81}$

$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 0\, P(X=0, Y=0) + 0 \cdot 1\, P(X=0, Y=1) + 0 \cdot 2\, P(X=0, Y=2)$

$+ 1 \cdot 0\, P(X=1, Y=0) + 1 \cdot 1\, P(X=1, Y=1) + 1 \cdot 2\, P(X=1, Y=2) = \frac{1}{9} + 2\frac{4}{9} = 1$

$cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) E(Y) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{13}{9} = \frac{81-78}{81} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$

$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} = \frac{3/81}{\sqrt{\frac{2}{9} \frac{38}{81}}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 19}} = \frac{1}{2\sqrt{19}}$

(d) Geben Sie die Verteilung von $Z = 2X + Y$ vollständig an. (3 Punkte)

$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = 0$

$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) = 2/9$

$P(Z=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=0) = 1/9 + 1/9 = 2/9$

$P(Z=3) = P(X=1, Y=1) = 1/9$

$P(Z=4) = P(X=1, Y=2) = 4/9$

$P(Z=z) = 0$ für alle $z \notin \{0,1,2,3,4\}$

(e) Geben Sie die bedingte Verteilung von X bei gegebenem Z vollständig an. (4 Punkte)

$$P(X=0 \mid Z=1) = \frac{P(X=0, Z=1)}{P(Z=1)} = \frac{P(X=0, Y=1)}{P(Z=1)} = \frac{2/9}{2/9} = 1$$

$$P(X=1 \mid Z=1) = \frac{P(X=1, Z=1)}{P(Z=1)} = \frac{P(\emptyset)}{P(Z=1)} = 0$$

$$P(X=0 \mid Z=2) = \frac{P(X=0, Z=2)}{P(Z=2)} = \frac{P(X=0, Y=2)}{P(Z=2)} = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 \mid Z=2) = \frac{P(X=1, Z=2)}{P(Z=2)} = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Z=2)} = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=0 \mid Z=3) = \frac{P(X=0, Z=3)}{P(Z=3)} = \frac{P(\emptyset)}{P(Z=3)} = 0$$

$$P(X=1 \mid Z=3) = \frac{P(X=1, Z=3)}{P(Z=3)} = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Z=3)} = \frac{1/9}{1/9} = 1$$

$$P(X=0 \mid Z=4) = \frac{P(X=0, Z=4)}{P(Z=4)} = \frac{P(\emptyset)}{P(Z=3)} = 0$$

$$P(X=1 \mid Z=4) = \frac{P(X=1, Z=4)}{P(Z=4)} = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Z=4)} = \frac{4/9}{4/9} = 1$$

$P(X=x \mid Z=z)$ kann für $z \notin \{1,2,3,4\}$, $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden

$P(X=x \mid Z=z) = 0$ für $x \notin \{0,1\}$ und $z \in \{1,2,3,4\}$

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Geben Sie die Poincaré-Sylvester-Formel für $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$ in der allgemeinen Form an und beweisen Sie diese.

Siehe Skript.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Tragen Sie entweder F (für Falsch) oder T (für True=Richtig) ein. Schreiben Sie F bzw. T deutlich. Wenn T und F nicht unterscheidbar sind, wird die Antwort als nicht gegeben bewertet. **Hinweis:** Bei Multiple Choice Fragen führen falsche Antworten zu Punktabzügen. In jeder Teilaufgabe wird jedoch keine negative Punktzahl angerechnet. Es können mehrere Antworten korrekt sein! Für jede Teilaufgabe sind maximal 2 Punkte erreichbar.

(a) Seien X, Y, Z stochastisch unabhängige Zufallsgrößen. Was gilt dann immer?

[T] X und $Y \cdot Z$ sind stochastisch unabhängig.

[F] $X \cdot Z$ und $Y \cdot Z$ sind stochastisch unabhängig.

(b) Welche Eigenschaften des Erwartungswertes, der Varianz und der Kovarianz sind richtig?

[F] $\mathtt{E}(X/Y) = \mathtt{E}(X)/\mathtt{E}(Y)$ für beliebige Zufallsgrößen X und Y.

[F] $\mathtt{E}(X^2 - \mathtt{E}(X)^2) = 0$.

(c) Für die Verteilungsfunktion F einer Zufallsgröße X gilt **immer**:

[F] $F_X(x) = P(X < x)$.

[F] F_X ist eine Treppenfunktion.

(d) Seien X und Y normal verteilte Zufallsgrößen mit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Was gilt dann immer?

[T] $X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, falls X und Y stochastisch unabhängig sind.

[T] $X + a \sim \mathcal{N}(\mu_1 + a, \sigma_1^2)$, wobei $a \in I\!R$ gilt.

Aufgabe 7: (15 Punkte)

a) Für die Zufallsgröße Y gelte $P(Y = -2) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$, und sei die Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $X_n = (-1)^n Y$. Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und, wenn ja, in welchem Sinne? Begründen Sie die Antwort. (8 Punkte)

X_n konvergiert in Verteilung gegen Y, denn

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/4, & -2 \le x < 0 \\ 3/4, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases} = F_Y(x),$$

also $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x)$ für alle x

X_n konvergiert aber nicht stochastisch gegen Y, denn für $\varepsilon = 1$ gilt für n ungerade

$$P(|X_n - Y| > \varepsilon) = P(\{\omega\in\Omega;\ |(-1)Y(\omega) - Y(\omega)| > 1\})$$

$$= P(\{\omega\in\Omega;\ |2Y(\omega)| > 1\})$$

$$\ge P(\{\omega\in\Omega;\ |Y(\omega)| = 2\}) = P(Y=-2) + P(Y=2)$$

$$= 1/2$$

Also kann $P(|X_n - Y| > \varepsilon)$ in diesem Fall nicht gegen 0 konvergieren.

Da X_n nicht stochastisch konvergiert, kann es auch nicht fast sicher konvergieren.

b) Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_{100}$ seien unabhängig und besitzen jeweils eine Binomialverteilung mit den Parametern $N = 10$ und $p = 0.4$. Geben Sie eine Approximation für die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n \in (1,5)\right)$$

mittels der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung an und beschreiben Sie, wie Sie auf die Approximation gekommen sind. (7 Punkte)

$X_n \sim Bin(10, 0{,}4) \Rightarrow E(X_n) = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$var(X_n) = 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 10 \cdot 0{,}24 = 2{,}4 \Rightarrow$

$E\left(\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{100}\frac{X_n - 4}{\sqrt{2{,}4}}\right) = 0$

$var\left(\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{100}\frac{X_n-4}{\sqrt{2{,}4}}\right) = \frac{1}{100}\, 100\, \frac{1}{2{,}4}\, var(X_n) = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{100}\frac{X_n-4}{\sqrt{2.4}} \to \mathcal{N}(0,1)$ in Verteilung

$\Rightarrow P\left(\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n \in (1,5)\right)$

$= P\left(1 < \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100} X_n < 5\right)$

$= P\left(1-4 < \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100}(X_n - 4) < 5-4\right)$

$= P\left(\frac{-3 \cdot 10}{\sqrt{2.4}} < \frac{10}{100}\sum_{n=1}^{100}\frac{X_n-4}{\sqrt{2.4}} < \frac{1 \cdot 10}{\sqrt{2.4}}\right)$

$= P\left(\frac{-30}{\sqrt{2.4}} < \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{100}\frac{X_n-4}{\sqrt{2.4}} < \frac{10}{\sqrt{2.4}}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{2{,}4}}\right) - \Phi\left(\frac{-30}{\sqrt{2{,}4}}\right)$

Aufgabe 8: (15 Punkte)

a) Seien X, Y und Z beliebige Zufallsgrößen. Gilt immer $\mathtt{cov}(X - Y, Z) = \mathtt{cov}(X, Z) - \mathtt{cov}(Y, Z)$? Begründen Sie die Antwort entweder durch einen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.(7 Punkte)

Ja, denn $cov(X-Y, Z) = E[(X-Y-E(X-Y))\cdot(Z-E(Z))]$

$= E[(X-E(X)-(Y-E(Y)))\cdot(Z-E(Z))]$

$= E[(X-E(X))(Z-E(Z))-(Y-E(Y))(Z-E(Z))]$

(Linearität des Erwartungswerts)

$= E[(X-E(X))(Z-E(Z))] - E[(Y-E(Y))(Z-E(Z))]$

$= cov(X, Z) - cov(Y, Z).$

b) Sei $(X_n)_{n\in I\!N}$ eine Folge von Zufallsgrößen, die stochastisch gegen X konvergiert. Konvergiert $(X_n)_{n\in I\!N}$ dann auch fast sicher gegen X? Begründen Sie die Antwort entweder mit einem Beweis oder mit einem Gegenbeispiel. (8 Punkte)

Nein, siehe Beweis von Satz 9.5 (ii),

d.h. betrachte

$X_n = 1_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})}$

falls $n = 2^m + k - 1$ mit $k \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$.