TU DORTMUND Sommersemester 2019

Fakultät Statistik 01.07.2019

Prof. Dr. Christine Müller
M.Sc. Dennis Malcherczyk

Robuste Statistik

Blatt 14 - Bonusblatt

Aufgabe 14.1: (10 Bonuspunkte)
Gegeben sei das allgemeine Regressionsmodell aus Kapitel 7

$$y_n = g(x_n, \beta^*) + e_n, n \in \{1, \dots, N\},$$

wobei $\beta^* \in \mathbb{R}^R$ der wahre Parameter des Modells sei. Mit $\mathrm{res}(z_n, \beta) := y_n - g(z_n, \beta)$, $n \in \{1, \dots, N\}$ bezeichnen wir für einen beliebigen Parameter $\beta \in \mathbb{R}^R$ die Residuen des Modells.

a) Implementieren Sie in `R` jeweils für $K \in \{2, 3, 4\}$ eine Funktion, die die Vorzeichen-Tiefe

$$\begin{aligned} &d_K(\mathrm{res}(z_1, \beta), \dots, \mathrm{res}(z_N, \beta)) \\ :=& \frac{1}{\binom{N}{K}} \sum_{1 \le n_1 < \dots < n_K \le N} \left(\prod_{k=1}^{K} \mathbf{1}\{\mathrm{res}(z_{n_k}, \beta)(-1)^k > 0\} + \prod_{k=1}^{K} \mathbf{1}\{\mathrm{res}(z_{n_k}, \beta)(-1)^k < 0\} \right) \end{aligned}$$

unter gegebenen Residuen berechnet. (Es wird dabei angenommen, dass alle Residuen auf den gleichen Parameter beruhen.)

Wir betrachten das spezifische Modell

$$y_n = \beta_0^* + x_n \beta_1^* + x_n^2 \beta_2^* + e_n$$

mit $\beta^* = (\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*)^\top$. Der Datensatz `data14` enthält 12 Realisationen dieses Regressionsmodells, wobei in der ersten Spalte `x` die Regressoren und in der Spalte `y` die Regressanden vorliegen.

b) Berechnen Sie für $K \in \{2, 3, 4\}$ jeweils die Vorzeichen-Tiefe basierend auf den Residuen unter den Beobachtungen des Datensatzes `data14` und jeweils folgenden Parametern:

i) $\beta^{(1)} = \left(\frac{29}{2}, -7, \frac{1}{10}\right)^\top$, ii)$\beta^{(2)} = \left(-\frac{1}{10}, 2, -\frac{1}{2}\right)^\top$, iii)$\beta^{(3)} = \left(3, -2, \frac{1}{2}\right)^\top$, iv)$\beta^{(4)} = \left(5, -2, \frac{9}{20}\right)^\top$.

c) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse in b) für verschiedene K. Es ist dabei hilfreich, die Vorzeichen der Residuen für $K \in \{2, 3, 4\}$ zu visualisieren.

Abgabe bis spätestens 09.07.2019 im Briefkasten 134 oder in der Übung.