Universität Kassel

Fachbereich Mathematik

Diplomarbeit

Lebenszeit-Modelle zur Analyse der Ermüdung von gradierten Materialien

Eingereicht von: Alexander Stepper

Betreuende Gutachterin: Prof. Dr. Christine Müller
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer

Kassel, 20. August 2008

Für Bärbel, die mich zur Mathematik gebracht hat.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}_+$	nichtnegative rationalen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	nichtnegative reellen Zahlen
$\overline{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\overline{\mathbb{N}}_0$	$\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$
$\sigma(\mathcal{E})$	Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra
$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$	Borel σ-Algebra
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$	filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum
$C \bullet X$	Martingaltransformation
$[M]$	Quadratische Variation von M
$[M, N]$	Quadratische Variation von M und N
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$E(\cdot)$	Erwartungswert

1 Einleitung

Das Teilprojekt D6 des SFB/Transregio TRR 30 an der Universität Kassel befasst sich mit der statistische Analyse des Ermüdungsverhaltens von gradierten Materialien. Ein Ziel des TP D6 ist es Vorhersagen über die Ermüdung von gradierten Materialen zu machen. Diese Diplomarbeit entstand im Rahmen dieses Teilprojektes mit dem Ziel zum einen den nicht parametrischen Nelson-Aalen Schätzer für die Hazardrate darzustellen und zum anderen das Cox Hazard Modell für zeitabhängige Kovariaten zu erweitern.

In Kapitel 2 bis 4 werden Grundbegriffe, wie stochastische Prozesse, Filtration, Stoppzeit und bedingte Erwartungen eingeführt. Weiter wird auf die gleichgradige Integrierbarkeit eingegangen, die eine wichtige Rolle in der Martingaltheorie spielt. Eine gute Darstellung des Themas bieten Bauer [5], Klenke [18] oder Yeh [25].

Kapitel 5 behandelt Martingale, Submartingale und Supermartingale. Es beinhaltet das Optional Stopping Theorem und das Optional Sampling Theorem und die für diese Arbeit zentrale Doob-Meyer Zerlegung. Siehe hierzu Doob [10] oder eine m.E. verständlichere Darstellung in Yeh [25].

Grundbegriffe der Lebenszeitanalyse, wie die Survival-Funktion, die Hazard-Funktion und die kumulierte Hazard-Funktion werden in Kapitel 6 eingeführt. Weiter wird auf Zählprozesse eingegangen, die bei der späteren Modellbildung eine wichtige Rolle spielen. Klein und Moeschberger [16] bietet hierzu eine gute Einführung. Eine praxisnahe Einführung findet man in Kleinbaum und Klein [17].

Das Martingal $M = N - A$ ist von zentraler Bedeutung für den hier gewählten Ansatz des Zählprozesses, des Nelson-Aalen Schätzers und des Multiplikativen Dichte Modells und wird in Kapitel 7 betrachtet. Die Ausführungen dieses Kapitels orientieren sich an Fleming und Harrington [12]

In Kapitel 8 wird der von Nelson 1969 und davon unabhängig von Aalen 1970 eingeführte Nelson-Aalen-Schätzer vorgestellt. Aalen [1] wählte 1978 einen eleganten Martingal Ansatz um die Konsistenz des Nelson-Aalen Schätzers zu zeigen. Dieser Ansatz liegt den Ausführungen in Fleming und Harringon [12] zugrunde, auf welchen die Ausführungen dieses Kapitels basieren. Außerdem wurde für den Datensatz einer Versuchsreihe zur Ermüdungsuntersuchung der Nelson-Aalen Schätzer und der Schätzer $\hat{\lambda}$ für die Hazard-Funktion geschätzt. Geht man von einer Exponentialverteilung aus, so kann $\hat{\lambda}$ aus der Steigung einer Geraden, die durch die geschätzte kumulierte Hazard-Funktion gelegt wird, geschätzt. Um die Auswirkungen einer Zensur zu untersuchen wurden die Daten zu unterschiedlichen Zeiten künstlich zensiert und der Nelson-Aalen Schätzer und $\hat{\lambda}$ der zensierten Daten geschätzt.

Das Cox Hazard Modell und das Multiplikative Dichte Modell werden in Kapitel 9 vorgestellt. Das Cox Hazard Modell oder auch Proportionale Hazard Modell wurde 1972 von Cox [9] eingeführt und bietet eine Methode, den Einfluss von Kovariaten auf die Ausfallszeiten zu untersuchen. Das Cox Hazard Modell ist definiert durch $\lambda(t|Z) = \lambda_0(t)e^{\beta^T Z}$, mit einer beliebigen Basis-Hazard-Funktion λ_0. Betrachtet man für zwei zeitunabhängige Kovariaten Z_1 und Z_2 das Verhältnis der Hazardraten, so ist dieses konstant: $\frac{\lambda(t|Z_1)}{\lambda(t|Z_2)} = e^{\beta^T(Z_1-Z_2)}$. Eine Erweiterung des Cox Hazard Modells ist das auf Zählprozessen beruhende Multiplikative Dichte Modell. Für einen wachsenden Prozess N existiert nach der Doob-Meyer-Zerlegung ein vorhersagbarer Prozess A, so dass $N - A$ ein Martingal ist. Dieser Prozess lässt sich, wie von Aalen [1] vorgeschlagen, folgendermaßen modelieren: $A(t) = \int_0^t e^{\beta^T Z(s)} Y(s)\lambda_0(s)ds$, wobei λ_0 eine beliebige Funktion ist und $Y(s) = 1$ zum Zeitpunkt s, wenn ein Ereignis eingetreten ist, und $Y(s) = 0$ sonst. Dieser Ansatz ist in Andersen, Borgan, Gill, und Keiding [2] sowie in Fleming und Harrington [12] dargestellt.

Kapitel 10 beschäftigt sich mit dem Erkennen von Rissen im Bildmaterial. Bei einem Ermüdungsversuch können aus den Bildern, die während des Versuchs von der Mikroprobe aufgenommen werden, verschiedene Größen, die sich über die Zeit des Versuchs ändern, ermittelt werden. Diese Größen können als zeitabhängige Kovariaten in das Multiplikative Dichte Modell einfließen. Als Kovariaten kommen z.B. die Anzahl der Risse, die mittlere Risslänge, die kumulierte Risslänge oder der durchschnittliche Grauwert in Frage. Um diese Größen ermitteln zu können müssen die Bilder vorverarbeitet werden, so dass die daraus gewonnenen Daten mit gängigen Statistikpaketen weiterverarbeitet werden können. Die Vorverarbeitung umfasst zum einen die Aufbereitung des Bildmateriales, so dass in einem zweiten Schritt Risse im Bildmaterial automatisch erkannt werden können. Dazu wurden Hilfsmittel aus der Graphentheorie entlehnt, wie sie z.B. in Ebert [11] Harary [13] und Noltemeier [21] vorgestellt werden.

2 Prozesse, Filtrationen, Stoppzeiten

Sei im Folgenden $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \mathcal{E})$ ein mit einer σ-Algebra versehener Raum.

2.1 Stochastischer Prozess

Dieser Abschnitt basiert auf den Ausführungen in Klenke [18] und Yeh [25].

Definition 2.1 (Stochastischer Prozess) *Eine Familie von Zufallsvariablen $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbf{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ heißt stochastischer Prozess mit Zeitbereich $\mathcal{T}$ und Zustandsraum E.*
Sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ und $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für jedes $\omega \in \Omega$ nennt man die Abbildung $\mathcal{T} \ni t \to X_t(\omega) = X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ einen Pfad von X.
Einen stochastischer Prozess $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nennt man stetig, linksstetig oder rechtsstetig, wenn $X(\cdot, \omega)$ eine stetige, linksstetige oder rechtsstetige Funktion auf $\mathbb{R}_+$, für alle $\omega \in \Omega$, ist. X nennt man ein f.ü. stetig, f.ü. linksstetig oder f.ü. rechtsstetig, wenn $X(\cdot, \omega)$ eine stetige, linksstetige oder rechtsstetige Funktion auf $\mathbb{R}_+$, für fast alle $\omega \in \Omega$, ist.

Definition 2.2 (Filtration) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T})$ von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für jedes $t \in \mathcal{T}$, heißt Filtration, falls $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s \leq t$. Das Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ oder kurz $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ nennt man einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum.*

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}_+$. Eine wachsende Folge $(\mathcal{F}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ von σ- Unteralgebren von $\mathcal{F}$ nennt man eine Filtration in diskreter Zeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$.

Definition 2.3 (adaptiert) *Ein stochastischer Prozess $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ heißt adaptiert an die Filtration $\mathbb{F}$, falls X_t bezüglich $\mathcal{F}_t$ messbar ist für jedes $t \in \mathcal{T}$.*

Eine Familie von Zufallsvariablen $X = (X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum in diskreter Zeit nennt man $\mathcal{F}_{t_n}$-adaptiert, wenn X_{t_n} $\mathcal{F}_{t_n}$-messbar ist, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.4 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ ein filtrierter Raum. Die σ-Algebra auf $[0, \infty) \times \Omega$ erzeugt durch alle Mengen der Form:*

$$\{0\} \times A, \qquad A \in \mathcal{F}_0$$

und

$$(a,b] \times A, \quad 0 \le a < b < \infty,\ A \in \mathcal{F}_a,$$

nennt man die $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersagbare σ-Algebra.

Definition 2.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ ein filtrierter Raum. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, der Form*

$$(a,b] \times A, \quad a, b \in \mathbb{R}_+,\ a < b \text{ und } A \in \mathcal{F}_a$$

oder

$$\{0\} \times A, \quad A \in \mathcal{F}_0$$

oder

$$\emptyset,$$

nennt man ein $\{\mathcal{F}_t\}$- vorhersagbares Rechteck.

Definition 2.6 (vorhersagbar) *Sei $\mathfrak{S}$ die $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersagbare σ-Algebra auf einem filtriertem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$. Einen stochastischen Prozess $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ nennt man $\mathcal{F}_t$-vorhersagbar, wenn X eine $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$-messbare Abbildung auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ nach $\mathbb{R}$ ist.*

Einen stochastischen Prozess X der Form

$$X = k_0 \mathbb{1}_{\{0\} \times A_0} + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(a_i, b_i] \times A_i},$$

mit $A_0 \in \mathcal{F}_0$, $A_i \in \mathcal{F}_{a_i}$, für $i = 1, \dots, n$ und den Konstanten $k_0, k_1, \dots, k_n$, nennt man einen einfachen vorhersagbaren Prozess.

Eine Familie von Zufallsvariablen $X = (X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum in diskreter Zeit nennt man $\mathcal{F}_{t_n}$-vorhersagbar, wenn X_{t_n} $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-messbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.7 *Man sagt eine Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ erfüllt die gewöhnlichen Eigenschaften, falls folgendes gilt:*

i. $\mathcal{F}_s = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t$ *, für alle* $s \in \mathbb{R}_+$ *(rechtsstetig)*

ii. $A \subset B \in \mathcal{F},\ P(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0$ *(vollständig)*

Eine Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nennt man augmentiert, wenn sie vollständig ist. Einen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ nennt man augmentiert, wenn die Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ augmentiert ist.

Definition 2.8 (Standard filtrierter Raum) *Einen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ nennt man einen standard filtrierten Raum, wenn folgendes gilt:*

i. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein vollständiger Maßraum.

ii. Die Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ erfüllt die gewöhnlichen Eigenschaften.

Definition 2.9 (càdlàg) *Einen stochastischen Prozess X nennt man càdlàg (continue à droite, limité à gauche) oder RCLL (right continuous with left limits), wenn seine Pfade $(X_t(\omega) : t \in \mathcal{T})$, für fast alle ω rechtsstetig sind und die linksseitigen Grenzwerte existieren und endlich sind.*

Definition 2.10 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

i. X ist ein L_p-Prozess mit $p \in (0, \infty)$, wenn $X_t \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, für alle $t \in \mathcal{T}$.

ii. X ist beschränkt in L_p, wenn $\sup_{t \in \mathcal{T}} E(|X_t|^p) < \infty$.

Definition 2.11 *Einen stochastischen Prozess $A = \{A_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ nennt man einen wachsenden Prozess, wenn gilt:*

i. A ist $\{\mathcal{F}_t\}$ adaptiert.

ii. A ist ein L_1-Prozess.

iii. $A(\cdot, \omega)$ ist eine reellwertige, rechsstetige monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_+$, mit $A(0, \omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

A nennt man einen fast sicher wachsenden Prozess, wenn i. und ii. und folgendes gilt:

iv. Es existiert eine Nullmenge Λ_A auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, so dass iii. gilt, für alle $\omega \in \Lambda_A^c$.

2.2 Lokal endliche Variation

Die Ausführungen in diesem Abschnitt folgen Yeh [25, S. 207ff.]

Definition 2.12 *Einen stochastischen Prozess $V = \{V_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ nennt man einen Prozess von lokal endlicher Variation, wenn folgendes gilt:*

i. V ist $\{\mathcal{F}_t\}$ adaptiert.

ii. *$V(\cdot,\omega)$ ist eine rechtsstetige Funktion auf $\mathbb{R}_+$, mit beschränkter Variation auf $[0,t]$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$, mit $V(0,\omega)=0$, für alle $\omega \in \Omega$.*

iii. *Der Prozess $|V| = \{|V|_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, definiert durch*

$$|V|(t,\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2^n} |V(t_{n,k},\omega) - V(t_{n,k-1},\omega)|\,, \tag{1}$$

für $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, mit $t_{n,k} = k2^{-n}t$, für $k = 0,\ldots,2^n$, mit $n \in \mathbb{N}$, ist ein L_1-Prozess.

Ein stochstischer Prozess V auf einem augmentierten filtriertem Raum $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P)$ nennt man einen Prozess von f.ü. lokal endlicher Variation, wenn i. und folgendes gilt:

iv. *Es existiert eine Nullmenge Λ_V in $(\Omega,\mathcal{F},P)$, so dass $V(\cdot,\omega)$ ii. erfüllt, für alle $\omega \in \Lambda_V^c$.*

v. *Der Prozess $|V|$, wie in (1) definiert, für $\omega \in \Lambda_V^c$ und $|V|(\cdot,\omega) := 0$, für $\omega \in \Lambda_V$, ist ein L_1-Prozess.*

Lemma 2.13 *Ist $V = \{V_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Prozess von f.ü. lokal endlicher Variation auf einem augmentierten filtrierten Raum $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P)$, dann ist $|V| = \{|V_t| : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein wachsender Prozess.*

Beweis Da V einen Prozess von f.ü. lokal endlicher Variation auf einem augmentierten filtrierten Raum ist, so ist $\Lambda_V \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Nach Definition ist V $\mathcal{F}_t$ adaptiert, d.h. V_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar. Also ist die Summe in Definition 2.12 (1) $\mathcal{F}_t$-messbar und damit ist auch das Supremum über $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_t$-messbar. Somit ist $|V|(t,\cdot)$ $\mathcal{F}_t$-messbar auf $\Lambda_V^c \in \mathcal{F}_t$. Da $|V|(t,\cdot) = 0$ auf Λ_V, ist $|V|(t,\cdot)$ $\mathcal{F}_t$-messbar auf Ω. D.h. $|V|$ ist $\mathcal{F}_t$ adaptiert. Nach Voraussetzung ist $|V|$ ein L_1-Prozess und besitzt rechtsstetige monoton wachsende Pfade auf $\mathbb{R}_+$ und verschwindet im Punkt $t = 0$, für alle $\omega \in \Lambda_V$. Also ist $|V|$ ein wachsender Prozess.

Satz 2.14 *Seien A' und A'' wachsende Prozesse auf einem filtrierten Raum. Ein stochastischer Prozess $V = \{V_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf einem augmentierten filtrierten Raum $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},P)$ ist genau dann von lokal endlicher Variation, wenn $V = A' - A''$.*
Seien A' und A'' f.ü. wachsende Prozesse auf einem filtrierten Raum. Ein stochastischer Prozess V auf einem augmentierten filtrierten Raum ist genau dann f.ü. von lokal endlicher Variation, wenn $V = A' - A''$.

Beweis *i.* Seien A' und A'' zwei wachsende Prozesse auf einem filtrierten Raum und $V = A' - A''$. Da A' und A'' wachsende Prozesse sind, sind A' und A'' $\mathcal{F}_t$-messbar. Damit ist auch V $\mathcal{F}_t$-messbar. Die Pfade von A' und A'' sind reellwertig und rechsttetig und verschwinden für $t = 0$, für alle $\omega \in \Omega$, so sind auch die Pfade von V rechtsstetig und verschwinden bei $t = 0$, für alle $\omega \in \Omega$. Da A' und A'' monoton wachsend und $A'(0, \omega) = 0$, $A''(0, \omega) = 0$, für alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^n} |V(t_{n,k}, \omega) - V(t_{n,k-1}, \omega)|$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} |A'(t_{n,k}, \omega) - A''(t_{n,k}, \omega) - A'(t_{n,k-1}, \omega) + A''(t_{n,k-1}, \omega)|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2^n} |A'(t_{n,k}, \omega) - A'(t_{n,k-1}, \omega)| + \sum_{k=1}^{2^n} |A''(t_{n,k-1}, \omega) - A''(t_{n,k}, \omega)|$$

$$= A'(t, \omega) - A'(0, \omega) + A''(t, \omega) - A''(0, \omega) = A'(t, \omega) + A''(t, \omega),$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $|V|(t, \omega) \leq A'(t, \omega) + A''(t, \omega)$, mit $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Da A' und A'' L_1-Prozesse sind, so ist auch $|V|$ ein L_1-Prozess.

ii. Sei V von lokal endlicher Variation. Nach Lemma 2.13 ist $|V|$ ein wachsender Prozess. Sei $A := |V| - V$. Dann ist A ein rechtsstetiger adaptierter L_1-Prozess, der bei $t = 0$ verschwindet. Also gilt, für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s < t$:

$$A(t, \omega) - A(s, \omega) = (|V|(t, \omega) - |V|(s, \omega)) - (V(t, \omega) - V(s, \omega)) \geq 0$$

Also ist A ein wachsender Prozess. Setzt man $A' = |V|$ und $A'' = A$, so erhält man $V = A' - A''$, wobei A' und A'' zwei wachsende Prozesse sind.

Die Behauptung bezüglich lokal endlicher Variation beweist man analog.

2.3 Stoppzeit

Der folgende Abschnitt basiert auf den Ausfürungen in Yeh [25, S. 25ff.].

Definition 2.15 (Stoppzeit) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable T mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$ heißt Stoppzeit (bezüglich $\mathbb{F}$), falls für jedes t $\in \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt, dass $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum in diskreter Zeit. Eine Zufallsvariable T mit Werten in $(t_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}_0}$ nennt man eine $\mathcal{F}_{t_n}$-Stoppzeit, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{T \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n}$.

Bemerkung 2.16 Äquivalent zu Definition 2.15 ist folgendes. T ist eine $\mathcal{F}_{t_n}$-Stoppzeit, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{T = t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n}$.

Beweis Denn es gilt $\{T = t_0\} = \{T \leq t_0\}$ und $\{T = t_n\} = \{T \leq t_n\} - \{T \leq t_{n-1}\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und andererseits $\{T \leq t_n\} = \cup_{k=0}^{n}\{T = t_k\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.17 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Die Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{F}$ zur Stoppzeit T ist eine Teilmenge von $\mathcal{F}_\infty$ vermöge*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R}_+\},$$

mit $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t)$.

Satz 2.18 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, dann gilt:*

i. *$\mathcal{F}_T$ ist eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω.*

ii. *T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.*

iii. *$\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$.*

Beweis *i.* Da $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$, ist $\Omega \in \mathcal{F}_T$.
Sei $A \in \mathcal{F}_T$. Da $A^c = \Omega \setminus A$, gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \underbrace{(\Omega \cap \{T \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \setminus \underbrace{(A \cap \{T \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

Da $\Omega, A \in \mathcal{F}_T$ sind, so sind auch die beiden Mengen rechts des Gleichheitszeichen in $\mathcal{F}_t$ und somit ist auch die Differenz der beiden Mengen in $\mathcal{F}_t$. D.h. $\mathcal{F}_t$ ist bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
Sei $A_n \in \mathcal{F}_T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap \{T \leq t\} = \cup_{n \in \mathbb{N}}(A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

also ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_t$.

ii. Da T eine Stoppzeit mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\{T \leq t_0\} \in \mathcal{F}_T$, für alle $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Da T $\mathcal{F}_\infty$ messbar ist, gilt $\{T \leq t_0\} \in \mathcal{F}_\infty$. Weiter gilt:

$$\{T \leq t_0\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \{T \leq t_0\} \in \mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{F}_t, & \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,\ t \geq t_0 \\ \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, & \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,\ t < t_0. \end{cases}$$

Also $\{T \leq t_0\} \in \mathcal{F}_T$, d.h. T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

iii. Da T $\mathcal{F}_T$-messbar ist, ist $\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T$. Nach Definition 2.17 gilt $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$.

Satz 2.19 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ein rechtssteiger filtrierter Raum. Eine $\overline{\mathbb{R}}_+$ wertige Funktion T auf Ω ist genau dann eine Stoppzeit, wenn gilt:*

$$\{\omega \in \Omega : T(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ , für alle } t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Ist T eine Stoppzeit auf dem rechtsstetigen filtrierten Raum, dann gilt:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ , für alle } t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{3}$$

Beweis Beweis der ersten Aussage: Ist T eine Stoppzeit, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ist T eine $\overline{\mathbb{R}}_+$ wertige Funktion, die (2) erfüllt, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{T < t + \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k \geq n} \left\{T < t + \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} \text{ , für alle } n \in \mathbb{N},$$

da $\{T < t + \frac{1}{k}\} \downarrow$ für $k \to \infty$, mit (2) und da $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein wachsendes System ist. Also folgt aus der Rechtsstetigkeit der Filtration:

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Beweis der zweiten Aussage: Sei $A \in \mathcal{F}_T$, dann gilt:

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A \cap \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}\right) \in \mathcal{F}_t \text{ , für alle } t \in \mathbb{R}_+$$

Sei nun $A \in \mathcal{F}_\infty$, mit $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(A \cap \left\{T < t + \frac{1}{k}\right\}\right) = \bigcap_{k \geq n} \left(A \cap \left\{T < t + \frac{1}{k}\right\}\right) \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, mit der Argumentation wie oben. Also folgt aus der Rechtsstetigkeit:

$$A \cap \{T \leq t\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Satz 2.20 *Sei T eine Stoppzeit auf dem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Dann ist jede $\mathcal{F}_T$-messbare Funktion $S : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mit $S \geq T$ auf Ω, ebenfalls eine Stoppzeit.*

Beweis S ist nach Voraussetzung $\mathcal{F}_T$-messbar, d.h. $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$. Nach Definition 2.17 ist $\{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da $S \geq T$ gilt $\{S \leq t\} \subset \{T \leq t\}$. Also $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, d.h. S ist eine Stoppzeit.

Satz 2.21 *Sind S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, so sind $S \vee T := \max\{S, T\}$, $S \wedge T := \min\{S, T\}$ und $S + c$, für alle $c \in \mathbb{R}_+$, ebenfalls Stoppzeiten.*

Beweis Da S und T Stoppzeiten sind gilt: $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Daraus folgt

$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

und

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Für alle $c \in \mathbb{R}_+$ ist $S + c \geq S$. Also ist nach Satz 2.20 ist $S + c$ eine Stoppzeit.

Lemma 2.22 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, dann ist $T \wedge t$ $\mathcal{F}_t$-messbar, für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis Nach Satz 2.21 ist $T \wedge t$ eine Stoppzeit. D.h. $\{T \wedge t \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Angenommen $\alpha \leq t$, dann ist $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_t$ und damit $\{T \wedge t \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_t$. Ist $\alpha > t$, dann ist $\{T \wedge t \leq \alpha\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$. Folglich ist $\{T \wedge t \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_t$.

Lemma 2.23 *Sind $S \wedge t$ und $T \wedge t$ Stoppzeiten, so ist $\{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Beweis Da $S \wedge t$ und $T \wedge t$ Stoppzeiten sind gilt: $\{S \wedge t \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und $\{T \wedge t \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\{S \wedge t \leq T \wedge t\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \{S \wedge t \leq r\} \cap \{T \wedge t \geq r\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \{S \wedge t \leq r\} \cap \{T \wedge t < r\}^c \in \mathcal{F}_t,\end{aligned}$$

da nach den Berechnungen im Beweis von Lemma 2.22 $\{T \wedge t \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_t$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $T \wedge t$ eine Stoppzeit ist und $\{T \wedge t < r\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \wedge t \leq r - \frac{1}{n}\}$.

Satz 2.24 *Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Ist $A \in \mathcal{F}_S$, dann gilt $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$ für alle T.*

Beweis Wenn $S(\omega) \leq T(\omega)$ und $T(\omega) \leq t$, dann ist $S(\omega) \leq t$ und $S(\omega) \wedge t \leq T(\omega) \wedge t$. Ist andererseits $S(\omega) \leq t$, $T(\omega) \leq t$ und $S(\omega) \wedge t \leq T(\omega) \wedge t$, dann ist $S(\omega) \wedge t = S(\omega)$ und $T(\omega) \wedge t = T(\omega)$, sowie $S(\omega) \leq T(\omega)$. Also gilt:

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}.$$

Da $A \in \mathcal{F}_S$, gilt $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. T ist eine Stoppzeit, d.h. $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Nach Lemma 2.22 sind $S \wedge t$ und $T \wedge t$ Stoppzeiten und mit Lemma 2.23 folgt $\{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$. Also $A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, d.h. $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

Satz 2.25 *Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Ist $S \leq T$ auf Ω, dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Beweis Ist $A \in \mathcal{F}_S$, dann ist, nach Satz 2.24, $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Wenn $S \leq T$ auf Ω ist, dann ist $\{S \leq T\} = \Omega$ und somit $A \in \mathcal{F}_T$. Also $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Satz 2.26 *Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Dann sind $\{S \leq T\}$, $\{S \geq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*

Beweis Sei $A \in \mathcal{F}_S$. Nach Satz 2.24 ist $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Für $A = \Omega$ folgt daraus

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T.$$

Betrachte:

$$\{S \geq T\} = \{S \wedge T = T\}.$$

Da, nach Satz 2.21, $S \wedge T$ eine Stoppzeit ist, ist nach Satz 2.18*ii.* $S \wedge T$ $\mathcal{F}_{S \wedge T}$-messbar. Da $S \wedge T \leq T$ gilt, nach Satz 2.25, $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_T$. Also ist $S \wedge T$ $\mathcal{F}_T$-messbar. Da $S \wedge T$ und T $\mathcal{F}_T$-messbar sind, gilt $\{S \wedge T = T\} \in \mathcal{F}_T$. Und somit

$$\{S \geq T\} \in \mathcal{F}_T.$$

Vertauscht man die Rollen von S und T, so erhält man $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S$ und $\{S \geq T\} \in \mathcal{F}_S$. Also $\{S \leq T\}, \{S \geq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Satz 2.27 *Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Dann gilt für die Stoppzeit $S \wedge T$: $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*

Beweis Da $S \wedge T \leq S, T$, gilt nach Satz 2.25 $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T$. Und damit $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
Sei nun $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Da $\Omega = \{S \leq T\} \cup \{S > T\}$ gilt:

$$\begin{aligned} A \cap \{S \wedge T \leq t\} &= (A \cap \{S \leq T, S \wedge T \leq t\}) \cup (A \cap \{S > T, S \wedge T \leq t\}) \\ &= (A \cap \{S \leq T, S \leq t\}) \cup (A \cap \{S > T, T \leq t\}) \\ &= (A \cap \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{S > T\} \cap \{T \leq t\}). \end{aligned}$$

Da $A \in \mathcal{F}_S$ und nach Satz 2.26 $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S$, ist auch $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S$. Also ist $A \cap \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da $A \in \mathcal{F}_T$ und $\{S > T\} = \{S \leq T\}^c \in \mathcal{F}_T$, gilt $A \cap \{S > T\} \in \mathcal{F}_T$ und somit $A \cap \{S > T\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Also ist $A \cap \{S \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und damit $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$, d.h. $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

Korollar 2.28 *Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Dann sind*

$$\{S < T\}, \{S \leq T\}, \{S > T\}, \{S \geq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}.$$

Beweis Da $\{S < T\} = \{S \geq T\}^c$ und $\{S > T\} = \{S \leq T\}^c$, so folgt dies aus den Sätzen 2.26 und 2.27.

Satz 2.29 *Ist $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Stoppzeiten auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ eine Stoppzeit auf dem filtrierten Raum. Ist die Filtration rechtsstetig, dann sind $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$, $\liminf_{n\to\infty} T_n$ und $\limsup_{n\to\infty} T_n$ Stoppzeiten. Existiert $\lim_{n\to\infty} T_n$ auf Ω, dann ist $\lim_{n\to\infty} T_n$ eine Stoppzeit.*

Beweis Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\Big\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq t \Big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ eine Stoppzeit. Betrachte $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$:

$$\Big\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n \geq t \Big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T_n \geq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < t\}^c.$$

Da die Filtration rechtsstetig ist, ist für alle $n \in \mathbb{N}$, nach Satz 2.19, $\{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$ und damit $\big\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n \geq t\big\} \in \mathcal{F}_t$. Nach Satz 2.19 ist $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$ eine Stoppzeit.
Da $\liminf_{n\to} T_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} T_n\big)$ und $\limsup_{n\to\infty} T_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} T_k\big)$, sind $\liminf_{n\to} T_n$ und $\limsup_{n\to\infty} T_n$ Stoppzeiten.
Existiert $\lim_{n\to\infty} T_n$ auf Ω, dann ist $\lim_{n\to\infty} T_n = \liminf_{n\to\infty} T_n$. Also ist $\lim_{n\to\infty} T_n$ eine Stoppzeit.

Satz 2.30 *Sei $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine monoton fallende Folge von Stoppzeiten auf einem rechtsstetigen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Dann ist $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ eine Stoppzeit und $\mathcal{F}_T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}$.*

Beweis Nach Satz 2.29 ist T eine Stoppzeit. Da $T \leq T_n$ ist nach Satz 2.25 $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $\mathcal{F}_T \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}$. Sei nun $A \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < t\},$$

so dass

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(A \cap \{T_n < t\}\big) \in \mathcal{F}_t,$$

nach Satz 2.19, angewendet auf T_n. Also ist nach Satz 2.19 $A \in \mathcal{F}_T$. Also gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_T$.

Satz 2.31 *Sei T eine Stoppzeit auf einem filtriertem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $\vartheta_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert durch:*

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} k2^{-n} , & \textit{für } t \in [(k-1)2^{-n}, k\,2^{-n}) \,, k \in \mathbb{N} \\ \infty , & \textit{für } t = \infty \end{cases}$$

und $T_n := \vartheta_n \circ T$.
Dann ist $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine monoton fallende Folge von Stoppzeiten, mit Werten in $\{k\,2^{-n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ und $T_n \downarrow T$ gleichmäßig auf Ω, für $n \to \infty$.

Beweis ϑ_n ist auf $\mathbb{R}_+$ eine rechtsstetige Treppenfunktion und für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt: $t < \vartheta_n \leq t + 2^{-n}$. Also $\vartheta_n \downarrow t$ gleichmäßig, für $t \to \infty$. Sei X eine $\overline{\mathbb{R}}_+$ wertige Zufallsvariable und definiere $X_n := \vartheta_n \circ X$, dann ist X_n eine $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion, da X eine $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}_+$ und ϑ_n eine $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ nach $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist. Somit ist X_n eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $\{k\,2^{-n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$. Also $X(\omega) < X_n(\omega) \leq X(\omega) + 2^{-n}$, für $\omega \in \Omega$, mit $X(\omega) \in \mathbb{R}_+$ und $X_n(\omega) = \infty$, für $\omega \in \Omega$, mit $X(\omega) = \infty$. Also $X_n(\omega) \downarrow X(\omega)$ gleichmäßig für $\omega \in \Omega$, $n \to \infty$. Dies gilt auch, wenn X eine Stoppzeit T ist. Ist T eine Stoppzeit, dann ist T eine $\mathcal{F}_T$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion auf Ω nach $\overline{\mathbb{R}}_+$. Da ϑ_n eine $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ nach $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist, ist T_n eine $\mathcal{F}_T$-$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-messbare Funktion auf Ω nach $\overline{\mathbb{R}}_+$. Mit $T_n \geq T$ auf Ω ist also, nach Satz 2.20, T_n eine Stoppzeit.

Definition 2.32 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$ ein filtrierter Raum in diskreter Zeit. Eine Funktion T auf Ω mit Werten in $\{t_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nennt man eine $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$-Stoppzeit, wenn gilt:*

$$\{T \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n} \,, \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei $t_\infty := \lim_{n\to\infty} t_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und $\mathcal{F}_{t_\infty} := \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{t_n}\big)$. Die σ-Algebra zur Stoppzeit T ist definiert durch

$$\mathcal{F}_T = \big\{A \in \mathcal{F}_{t_\infty} : A \cap \{T \leq t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n} \,, \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\big\}.$$

Satz 2.33 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$, dann gilt:*

i. $\mathcal{F}_T$ *ist eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$,*

ii. T *ist $\mathcal{F}_T$-messbar,*

iii. $\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{t_\infty} \subset \mathcal{F}$.

Beweis Dies beweist man analog dem stetigen Fall.

Definition 2.34 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein adaptierter Prozess und T eine Stoppzeit auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Sei X_∞ eine beliebige $\overline{\mathbb{R}}$ wertige $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\overline{X} := \{X_t : t \in \overline{R}_+\}$ Definiere X_T vermöge*

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega) := \overline{X}(T(\omega), \omega)\,,\ \textit{für alle}\ \omega \in \Omega. \tag{4}$$

Sei $X = \{X_{t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein adaptierter Prozess in diskreter Zeit und T eine Stoppzeit auf dem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$. Sei X_{t_∞} eine beliebige $\overline{R}$ wertige $\mathcal{T}_{t_\infty}$-messbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\overline{X} := \{X_{t_n} : n \in \overline{N}_0\}$. So definiert man X_T wie in (4).

Satz 2.35 *i. Sei $X = \{X_{t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein adaptierter Prozess in diskreter Zeit und T eine Stoppzeit auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$, dann ist die Zufallsvariable X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.*

ii. Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiger adaptierter Prozess und T eine Stoppzeit auf einem rechtsstetigen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, dann ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.

Beweis *i.* Nach Satz 2.33 ist $\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T$. Damit ist $\{T = t_k\} \in \mathcal{F}_T$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also reicht es aus zu zeigen, dass X_T $\mathcal{F}_T$-messbar auf $\{T = t_k\}$ ist, für alle $k \in \overline{N}_0$. Dazu ist zu zeigen, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{X_T \leq \alpha\} \cap \{T = t_k\} \in \mathcal{F}_T. \tag{5}$$

Es gilt $\{X_T \leq \alpha\} \cap \{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_{t_\infty}$. Weiter gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\{X_T \leq \alpha\} \cap \{T = t_k\} \cap \{T \leq t_j\} = \begin{cases} \{X_T \leq \alpha\} \cap \{T = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_{t_j} & \text{, falls } k \leq j \\ \emptyset \in \mathcal{F}_{t_j} & \text{, falls } k > j. \end{cases}$$

Damit ist (5) gezeigt.

ii. Für $n \in \mathbb{N}$ sei ϑ_n auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ definiert durch:

$$\vartheta_n(t) := \begin{cases} k2^{-n} & \text{, falls } t \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})\,,\ \text{für } k \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{, falls } t = \infty \end{cases}$$

und sei $T_n := \vartheta_n \circ T$. Nach Satz 2.31 ist T_n eine Stoppzeit, mit Werten in $\{k\,2^{-n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ und $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine monoton fallende Folge, so dass $T_n \downarrow T$ gleichmäßig auf Ω, für $n \to \infty$. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $t_k = k2^{-n}$, für $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist $\{X_{t_k} : k \in \mathbb{N}_0\}$ ein adaptierter Prozess in diskreter Zeit und T_n

ist eine Stoppzeit auf dem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_k}\}, P)$, so dass X_{T_n} nach *i.* $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar ist. Da $T_n \downarrow T$ auf Ω und X rechtsstetig ist gilt:

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(T_n(\omega), \omega) = X(T(\omega), \omega) = X_T(\omega)\,, \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Da X_{T_n} $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}$ und da $\mathcal{F}_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 2.25 eine monoton fallende Folge ist, ist $\lim_{k\to\infty} X_{T_k}$ $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\lim_{k\to\infty} X_{T_k}$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n}$-messbar. Nach Satz 2.30 ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$. Also ist $\lim_{n\to\infty} X_{T_n}$ $\mathcal{F}_T$-messbar, d.h. X_T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

Definition 2.36 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein adaptierter Prozess und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Sei $t \wedge s := \min\{t, s\}$. Der gestoppte Prozess ist definiert durch:*

$$X^{T\wedge} := \{X_t^{T\wedge} : t \in \mathbb{R}_+\},$$

mit

$$X_t^{T\wedge}(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t}(\omega) = X(T(\omega) \wedge t, \omega) \quad \textit{für } \omega \in \Omega.$$

D.h. für $\omega \in \Omega$ mit $T < \infty$ gilt:

$$X_t^{T\wedge}(\omega) = \begin{cases} X(t, \omega) & , \textit{für} \quad t \in [0, T(\omega)] \\ X(T(\omega), \omega) & , \textit{für} \quad t \in (T(\omega), \infty) \end{cases}$$

und für $\omega \in \Omega$ mit $T(\omega) = \infty$ gilt:

$$X_t^{T\wedge}(\omega) = X(t, \omega) \quad \textit{für } t \in \mathbb{R}_+.$$

Für einen adaptierten Prozess $X = \{X_{t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ in diskreter Zeit und einer Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$ ist der gestoppte Prozess definiert durch:

$$X^{T\wedge} := \{X_{t_n}^{T\wedge} : n \in \mathbb{N}_0\},$$

mit

$$X_{t_n}^{T\wedge}(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t_n}(\omega) = X(T(\omega) \wedge t_n, \omega) \quad \textit{für } \omega \in \Omega.$$

Satz 2.37 *Sei $X = \{X_{t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein adaptierter Prozess und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t_n}\}, P)$. Ist X ein L_p-Prozess für $p \in (0, \infty)$, d.h. $|X_{t_n}|^p$ ist integrierbar für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist der gestoppte Prozess $X^{T\wedge} = \{X_{T\wedge t_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein L_p-Prozess.*

Beweis Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$X_{T\wedge t_n} = \mathbb{1}_{\{T=t_0\}} X_{t_0} + \mathbb{1}_{\{T=t_1\}} X_{t_1} + \ldots + \mathbb{1}_{\{T=t_{n-1}\}} X_{t_{n-1}} + \mathbb{1}_{\{T\geq t_n\}} X_{t_n}$$

und damit

$$\int_\Omega |X_{T\wedge t_n}|^p dP = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\{T=t_k\}} |X_{t_k}|^p dP + \int_{\{T\geq t_n\}} |X_{t_n}|^p dP$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega |X_{t_k}|^p dP < \infty.$$

Satz 2.38 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein adaptierter Prozess und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Ist X ein L_p-Prozess für $p \in (0, \infty)$, dann ist der gestoppte Prozess $X^{T\wedge} = \{X_{T\wedge t} : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein L_p-Prozess.*

Beweis Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$X_{T\wedge t} = \mathbb{1}_{\{T\leq t\}} X_t + 1_{\{T>t\}} X_t$$

und damit

$$\int_\Omega |X_{T\wedge t}|^p dP \leq \int_\Omega |X_t|^p + \int_\Omega |X_t|^p dP < \infty.$$

3 Bedingte Erwartungen

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Der Inhalt des Abschnittes basiert auf Yeh [25, Appendix B, S. 453ff.].

Definition 3.1 *Zwei $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nennt man gleich f.ü., wenn $X_1 = X_2$ auf Λ^C, mit $\Lambda \in \mathcal{F}$, $P(\Lambda) = 0$*

Für alle reellwertigen $\mathcal{A}$-messbaren Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ist die Gleichheit f.ü. eine Äquivalenzrelation.

Satz 3.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Betrachte die Äquivalenzrelation Gleichheit f.ü. aller $\mathcal{F}$-messbarer reellwertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Für jede reellwertige Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert eine eindeutige Äquivalenzklasse, bestehend aus allen $\mathcal{F}$-messbaren reellwertigen Zufallsvariablen Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass gilt*

$$\int_G Y dP = \int_G X dP\ , \quad \textit{für alle} \quad G \in \mathcal{F}$$

Beweis Sei X eine beliebige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sei μ eine Funktion auf $\mathcal{F}$ vermöge $\mu(G) = \int_G X dP$ für $G \in \mathcal{F}$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{F}$. Da $\mu(G) = 0$ für alle $G \in \mathcal{F}$ mit $P(G) = 0$, ist μ absolut stetig bzgl. P auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Die Radon-Nikodym Ableitung von μ bzgl. P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist dann eine Äquivalenzklasse bzgl. Gleichheit f.ü., bestehend aus allen $\mathcal{F}$-messbaren reellwertigen Funktionen Y auf Ω, so dass $\int_G Y dP = \mu(G)$. D.h. $\int_G Y dP = \int_G X dP$, für alle $G \in \mathcal{F}$.

Definition 3.3 (Bedingte Erwartung) *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Mit dem bedingten Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{F}$, geschrieben $E(X|\mathcal{F})$ bezeichnet man die eindeutige Äquivalenzklasse aller $\mathcal{F}$-messbarer reellwertiger Zufallsvariablen Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit*

$$\int_G Y dP = \int_G X dP \quad \textit{für alle} \quad G \in \mathcal{F}.$$

Die Vertreter der Äquivalenzklasse $E(X|\mathcal{F})$ bezeichnet man als Versionen der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$.
Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben $\mathcal{F}$, geschrieben $P(A|\mathcal{F})$, ist als der bedingte Erwartungswert der Zufallsvariable $\mathbb{1}_A$ gegeben $\mathcal{F}$ definiert, d.h. $P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})$.

Satz 3.4 *Seien X_1 und X_2 integrierbare reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Existiert eine $\mathcal{F}$-messbare reellwertige Zufallsvariable Y_0 auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die eine Version von $E(X_1|\mathcal{F})$ und $E(X_2|\mathcal{F})$ ist, dann ist $E(X_1|\mathcal{F}) = E(X_2|\mathcal{F})$, d.h. wenn $E(X_1|\mathcal{F}) \cap E(X_2|\mathcal{F}) \neq \emptyset$, dann ist $E(X_1|\mathcal{F}) = E(X_2|\mathcal{F})$.*

Beweis Sei Y_j eine beliebiger Version von $E(X_j|\mathcal{F})$, für $j = 1, 2$. Dann ist $Y_j = Y_0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und damit $Y_1 = Y_2$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Also sind $E(X_1|\mathcal{F})$ und $E(X_2|\mathcal{F})$, bzgl. der Gleichheit f.ü., identisch.

Satz 3.5 *Seien X, X_1 und X_2 integrierbare reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. So gilt:*

i. $X_1 = X_2$ *f.ü. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \quad \Rightarrow \quad E(X_1|\mathcal{F}) = E(X_2|\mathcal{F})$.

ii. X *ist* $\mathcal{F}$*-messbar* $\quad \Rightarrow \quad X \in E(X|\mathcal{F})$.

iii. $X \geq 0$ *f.ü. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \quad \Rightarrow \quad E(X|\mathcal{F}) \geq 0$ *f.ü. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

iv. $E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F}) = c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F})$, *für* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

v. $X_2 \geq X_1$ *f.ü. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \quad \Rightarrow \quad E(X_2|\mathcal{F}) \geq E(X_1|\mathcal{F})$.

Beweis i. Sei $Y \in E(X_1|\mathcal{F})$. Dann ist Y $\mathcal{F}$-messbar und $\int_G Y dP = \int_G X_1 dP$ für alle $G \in \mathcal{F}$. Da n.V. $X_1 = X_2$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, gilt $\int_G X_1 dP = \int_G X_2 dP$ für alle $G \in \mathcal{F}$ und damit $\int_G Y dP = \int_G X_2 dP$ für alle $G \in \mathcal{F}$. Also $Y \in E(X_2|\mathcal{F})$. Mit Satz 1.18 folgt $E(X_1|\mathcal{F}) = E(X_2|\mathcal{F})$.
ii. Folgt aus der Definition.
iii. Sei $X \geq 0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P), Y \in E(X|\mathcal{F})$. Dann ist $\int_G Y dP = \int_G X dP \geq 0$ für alle $G \in \mathcal{F}$ und damit $Y \geq 0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

iv. Sind $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, dann ist die Aussage trivial. Sei $Y_1 \in E(X_1|\mathcal{F})$ und $Y_2 \in E(X_2|\mathcal{F})$. Dann ist $c_1X_1 + c_2X_2$ $\mathcal{F}$-messbar und für alle $G \in \mathcal{F}$ gilt

$$\int_G (c_1Y_1 + c_2Y_2)dP = c_1 \int_G Y_1 dP + c_2 \int_G Y_2 dP$$
$$= c_1 \int_G X_1 dP + c_2 \int_G X_2 dP = \int_G c_1X_1 + c_2X_2 dP.$$

Also $c_1Y_1 + c_2Y_2 \in E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F})$ und somit $c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F}) \subset E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F})$.
Es bleibt noch $E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F}) \subset c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F})$ zu zeigen. Sei nun c_1 oder c_2 ungleich Null, angenommen $c_2 \neq 0$. Seien $Z \in E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F})$, $Y_1 \in (X_1|\mathcal{F})$ und $Y_2 = \frac{1}{c_2}(Z - c_1Y_1)$. Da Z und Y_1 $\mathcal{F}$-messbar sind, ist auch Y_2 $\mathcal{F}$-messbar. Also

$$\int_G Y_2 dP = \frac{1}{c_2}\left(\int_G Z dP - c_1 \int_G Y_1 dP\right)$$
$$= \frac{1}{c_2}\int_G (c_1X_1 + c_2X_2)dP - \frac{c_1}{c_2}\int_G X_1 dP$$
$$= \int_G \frac{c_1}{c_2}X_1 + X_2 - \frac{c_1}{c_2}X_1 dP = \int_G X_2 dP$$

für alle $G \in \mathcal{F}$. Somit $Y_2 \in E(X_2|\mathcal{F})$. Also gilt $Z = c_1Y_1 + c_2Y_2$, für eine beliebige Version Z von $E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F})$, wobei Y_1 eine Version von $E(X_1|\mathcal{F})$ und Y_2 eine Version von $E(X_2|\mathcal{F})$ ist. Mithin ist $Z \in c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F})$ und damit $E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathcal{F}) \subset c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F})$.
v. N.V. ist $X_2 - X_1 \geq 0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P) \overset{iii.}{\Rightarrow} E(X_2 - X_1|\mathcal{F}) \geq 0$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P) \overset{iv.}{\Rightarrow} E(X_2 - X_1|\mathcal{F}) = E(X_2|\mathcal{F}) - E(X_1|\mathcal{F}) \Rightarrow E(X_2|\mathcal{F}) \geq E(X_1|\mathcal{F})$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Satz 3.6 *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Dann gilt*

$$E(E(X|\mathcal{F})) = E(X),$$

d.h. für jede Version Y von $E(X|\mathcal{F})$ gilt $E(Y) = E(X)$.

Beweis Ist $Y \in E(X|\mathcal{F})$, dann ist $\int_G Y dP = \int_G X dP$ für alle $G \in \mathcal{F}$ und speziell für $\Omega \in \mathcal{F}$ erhält man $\int_\Omega Y dP = \int_\Omega X dP$, d.h. $E(Y) = E(X)$.

Satz 3.7 *Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable und Z eine $\mathcal{F}$-messbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sodass ZX integrierbar ist. Dann gilt*

$$E(ZX|\mathcal{F}) = ZE(X|\mathcal{F}).$$

Beweis Kann man zeigen, dass für eine beliebige Version Y von $E(X|\mathcal{F})$, ZY eine Version von $E(ZY|\mathcal{F})$ ist, dann ist $E(ZY|\mathcal{F}) \supset ZE(X|\mathcal{F})$. Da ZY eine Version von $E(ZX|\mathcal{F})$ ist, folgt daraus, dass für eine beliebige Version V von $E(ZX|\mathcal{F}),\ V = ZY$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und damit $V \in ZE(X|\mathcal{F})$, sodass $E(ZX|\mathcal{F}) \subset ZE(X|\mathcal{F})$. Also $E(ZX|\mathcal{F}) = ZE(X|\mathcal{F})$. Somit bleibt zu zeigen, dass für eine beliebige Version Y von $E(X|\mathcal{F}),\ ZY$ eine Version von $E(ZX|\mathcal{F})$ ist. Da ZY $\mathcal{F}$-messbar ist, bleibt zu zeigen, dass

$$\int_G ZY dP = \int_G ZX dP \quad \text{für alle} \quad G \in \mathcal{F} \tag{6}$$

Betrachte zuerst den Fall $Z = \mathbb{1}_{G_0}$ mit $G_0 \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \int_G ZY dP = \int_G \mathbb{1}_{G_0} Y dP = \int_{G\cap G_0} Y dP \\ \overset{G\cap G_0 \in \mathcal{F}}{=} \int_{G\cap G_0} X dP = \int_G \mathbb{1}_{G_0} X dP = \int_G ZX dP \end{aligned}$$

Ist Z eine einfache Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann gilt (6) wegen der Linearität des Integrals. Betrachte als nächstes den Fall, dass $Z \geq 0$ und $X \geq 0$ auf Ω. Da $Z \geq 0$ auf Ω, existiert eine wachsende Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht negativer einfacher Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sodass $Z_n \uparrow Z$ auf Ω. Da Z_n eine einfache Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist, gilt

$$\int_G Z_n Y dP = \int_G Z_n X dP \quad \text{für} \quad G \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

Mit Satz 3.5 *iii.* folgt aus $X \geq 0$ auf Ω, dass $Y \geq 0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Also folgt aus $Z_n \uparrow Z$ auf Ω, dass $Z_n Y \uparrow ZY$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Da $X \geq 0$ gilt auch $Z_n X \uparrow ZX$ auf Ω. Für $n \to \infty$ in (7) erhält man mit dem Satz von Beppo-Levi die Gleichung (6) und somit

$$Z \geq 0, X \geq 0 \text{ auf } \Omega \Rightarrow E(ZX|\mathcal{F}) = ZE(X|\mathcal{F}). \tag{8}$$

Behält man nur noch die Bedingung $X \geq 0$ auf Ω so ist mit $Z = Z^+ - Z^-$

$$\begin{aligned} E(ZX|\mathcal{F}) = E((Z^+ - Z^-)X|\mathcal{F}) &\overset{3.5\,iv.}{=} E(Z^+X|\mathcal{F}) - E(Z^-X|\mathcal{F}) \\ &\overset{(8)}{=} Z^+E(X|\mathcal{F}) - Z^-E(X|\mathcal{F}) \overset{3.5\,iv.}{=} ZE(X|\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Und schließlich mit $X = X^+ - X^-$

$$\begin{aligned} E(ZX|\mathcal{F}) = E(Z(X^+ - X^-)|\mathcal{F}) \overset{3.5\,iv.}{=} E(ZX^+|\mathcal{F}) - E(ZX^-|\mathcal{F}) \\ \overset{(8)}{=} ZE(X^+|\mathcal{F}) - ZE(X^-|\mathcal{F}) = Z(E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F})) \overset{3.5\,iv.}{=} ZE(X|\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Satz 3.8 (Jensensche Ungleichung) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit Werten in I. Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\varphi(X)$ integrierbar ist. Dann gilt für $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$:*

$$\varphi(E(X|\mathcal{F})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{F}), \text{ f.ü. auf } (\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Beweis Der Beweis basiert auf dem Beweis in Klenke [18, S. 172].
Betrachte zuerst das Ereignis $\{E(X|\mathcal{F})$ ist Randpunkt von $I\}$. Sei o.B.d.A. 0 der linke Randpunkt von I und $A := \{E(X|\mathcal{F}) = 0\}$. Da X Werte in $I \subset [0, \infty)$ annimmt, ist $0 \leq E(X\mathbb{1}_A) \overset{3.5ii.}{=} E(E(X|\mathcal{F})\mathbb{1}_A) = 0$. Also ist $X\mathbb{1}_A = 0$ und die Aussage ist trivial. Den rechten Randpunkt behandelt man analog.
Betrachte nun das Ereignis $B := \{E(X|\mathcal{F})$ ist innerer Punkt von $I\}$. Sei I° das Innere von I und definiere zu $x \in I^\circ$ die Funktion

$$g_x(y) := \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}, \text{für } y \in I \setminus \{x\}.$$

Da φ eine konvexe Funktion ist, ist g_x monoton wachsend und es existiert der rechtsseitige Grenzwert

$$D^+\varphi(x) := lim_{y \downarrow x} g_x(y) = \inf\{g_x(y) : y > x\}.$$

Sei $x \in I^\circ$. Nach Konstruktion von g_x, ist für $t \leq D^+\varphi(x)$:

$$\varphi(x) + (y - x)t \leq \varphi(y), \text{ für alle } y \in I.$$

Da g_x monoton wachsend ist, ist auch $D^+\varphi$ monoton wachsend und damit messbar. Also ist $D^+\varphi(E(X|\mathcal{F}))$ eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
E\big(\varphi(X)\big|\mathcal{F}\big) &\geq E\Big(\big(X - E(X|\mathcal{F})\big)D^+\varphi\big(E(X|\mathcal{F})\big) + \varphi\big(E(X|\mathcal{F})\big)\big|\mathcal{F}\Big) \\
&\overset{3.5,3.7}{=} D^+\varphi(E(X|\mathcal{F}))E(X - E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}) + \varphi(E(X|\mathcal{F})) \\
&\overset{3.5}{=} D^+\varphi(E(X|\mathcal{F}))(E(X|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})) + \varphi(E(X|\mathcal{F})) \\
&= \varphi(E(X|\mathcal{F})) \text{ f.ü. auf } B.
\end{aligned}$$

Definition 3.9 *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{H}, \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Definiere:*

$$E(X|\mathcal{F}|\mathcal{H}) := E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H}) := E(Y|\mathcal{H})$$

Wobei Y eine beliebige Version von $E(X|\mathcal{F})$ ist.

Satz 3.10 *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{H}, \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Seien Y_1 und Y_2 zwei Versionen von $E(X|\mathcal{F})$. Dann gilt für die Äquivalenzklassen:*

$$E(Y_1|\mathcal{H}) = E(Y_2|\mathcal{H})$$

Beweis Für $j = 1, 2$ besteht $E(Y_j|\mathcal{H})$ aus allen $\mathcal{H}$-messbaren reellwertigen Zufallsvariablen Z, sodass $\int_H Z dP = \int_H Y_j dP$ für alle $H \in \mathcal{H}$. Da Y_1 und Y_2 Versionen von $E(X|\mathcal{F})$ sind, gilt $Y_1 = Y_2$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}, P) \Rightarrow Y_1 = Y_2$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sodass $\int_A Y_1 dP = \int_A Y_2 dP$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und im Speziellen $\int_H Y_1 dP = \int_H Y_2 dP$ für alle $H \in \mathcal{H}$. Ist W_1 eine Version von $E(Y_1|\mathcal{H})$ und W_2 eine Version von $E(Y_2|\mathcal{H})$, dann gilt $\int_H W_1 dP = \int_H Y_1 dP = \int_H Y_2 dP = \int_H W_2 dP$ für beliebige $H \in \mathcal{H}$. Und damit $W_1 = W_2$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Daraus folgt $E(Y_1|\mathcal{H}) = E(Y_2|\mathcal{H})$.

Bemerkung 3.11
i. Für $E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H})$ wie oben definiert, gilt $E(E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H})) = E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$.

ii. Sei $Z \in E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H})$ und W eine $\mathcal{H}$-messbare reelle Funktion, mit $W = Z$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{H}, P)$, dann ist $W \in E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H})$

Satz 3.12 *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$. Dann gilt:*

$$E(X|\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_2)$$

Beweis Sei Y eine beliebige Version von $E(X|\mathcal{F}_1)$ und Z eine beliebige Version von $E(Y|\mathcal{F}_2)$. Also ist Z $\mathcal{F}_2$-messbar und somit $\int_{G_2} Z dP = \int_{G_2} Y dP = \int_{G_2} X dP$, für alle $G_2 \in \mathcal{F}_2$. Daraus folgt mit Satz 3.4, dass $E(Y|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_2)$, d.h. $E(X|\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_2)$

Satz 3.13 *Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$. Dann gilt:*

i. $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1) \supset E(X|\mathcal{F}_2)$.

ii. Ist zudem jede Version von $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$ $\mathcal{F}_2$-messbar, dann gilt:

$$E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_2).$$

Beweis *i.* Sei Y eine beliebige Version von $E(X|\mathcal{F}_2)$. Dann ist Y $\mathcal{F}_2$-messbar und damit auch $\mathcal{F}_1$-messbar. Um zu zeigen, dass Y eine Version von $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$ ist, reicht es nach Bemerkung 3.11 zu zeigen, dass es eine Version Z von $E(X|\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2)$ gibt, mit $Z = Y$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$. Sei Z eine beliebige Version von $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$.

Dann ist $Z \in E(W|\mathcal{F}_1)$, mit $W \in E(X|\mathcal{F}_2)$. Also $\int_{G_1} ZdP = \int_{G_1} WdP$, für beliebige $G_1 \in \mathcal{F}_1$. Da W und Y Verionen von $E(X|\mathcal{F}_2)$, ist $W = Y$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_2, P)$. Woraus folgt, dass $W = Y$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und damit $\int_{G_1} WdP = \int_{G_1} ZdP$. Mithin $\int_{G_1} ZdP = \int_{G_1} YdP$. Da Z und $Y \mathcal{F}_1$-messbar sind, folgt $Z = Y$ f.ü auf $E(X|\mathcal{F}_1)$.
ii. Sei jede Version von $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$ $\mathcal{F}_2$-messbar. Sei Z eine beliebige Version von $E(X|\mathcal{F}_2|\mathcal{F}_1)$. Da Z $\mathcal{F}_2$-messbar ist, reicht es nach Bemerkung 3.11 zu zeigen, dass es eine Version Y von $E(X|\mathcal{F}_2)$ gibt, mit $Z = Y$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_2, P)$. Da n.V. für $G_2 \in \mathcal{F}_2$ auch $G_2 \in \mathcal{F}_1$, gilt $\int_{G_2} ZdP = \int_{G_2} E(X|\mathcal{F}_2)dP = \int_{G_2} XdP = \int_{G_2} YdP$, für alle $G_2 \in \mathcal{F}_2$. Damit folgt die Behauptung.

4 Gleichgradige Integrierbarkeit

Die Ausführungen in diesem Abschnitt folgen denen von Yeh [25, S. 54f.].

Lemma 4.1 *Eine $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist genau dann integrierbar, wenn $\int_{\{|X|>\lambda\}} |X| \, dP \downarrow 0$, für $\lambda \to \infty$.*

Beweis Angenommen X ist integrierbar, dann ist $|X| < \infty$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $A_n = \{|X| > n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist A_n eine monoton fallende Folge und $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{|X| = \infty\}$, also $\mathbb{1}_{A_n} \downarrow \mathbb{1}_{\{|X|=\infty\}}$, für $n \to \infty$. Da $|\mathbb{1}_{A_n}| \le |X|$ und $|X|$ integrierbar ist, gilt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue):

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |X| \, dP = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_n} |X| \, dP \\ \overset{\text{Lebesgue}}{=} &\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} |X| \, dP = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|X|=\infty\}} |X| \, dP = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Da $P(\{|X| > \lambda\}) \le P(\{|X| > [\lambda]\})$, wobei $[\lambda]$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich λ, folgt aus (1): $\int_{\{|X|>\lambda\}} |X| \, dP \downarrow 0$, für $\lambda \to \infty$.

Angenommen $\int_{\{|X|>\lambda\}} |X| \, dP \downarrow 0$, für $\lambda \to \infty$. Dann exisitiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$, so dass $\int_{\{|X|>\lambda\}} |X| \, dP < \varepsilon$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |X| \, dP = \int_{\{|X|\le\lambda\}} |X| \, dP + \int_{\{|X|>\lambda\}} |X| \, dP \\ = &\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|X|\le\lambda\}} |X| \, dP + \varepsilon \le \lambda P(\Omega) + \varepsilon = \lambda + \varepsilon < \infty, \end{aligned}$$

d.h. X ist integrierbar.

Definition 4.2 *Eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nennt man gleichgradig integrierbar, wenn gilt:*

$$\sup_{\alpha \in A} \int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP \downarrow 0 \,, \text{ für } \lambda \to \infty,$$

oder äquivalent dazu: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\lambda > 0$, so dass

$$\sup_{\alpha \in A} \int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP < \varepsilon,$$

oder äquivalent dazu: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\lambda > 0$, so dass

$$\int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP < \varepsilon \text{ ,für alle } \alpha \in A.$$

$\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ nennt man p-fach gleichgradig integrierbar, wenn $\{|X_\alpha|^p : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar ist, für $p \in (0, \infty)$.

Satz 4.3 *Eine Familie von $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Zufallsvariablen $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn gilt:*

i. $\sup_{\alpha \in A} E(|X_\alpha|) < \infty$,

ii. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\int_E |X_\alpha| \, dP < \varepsilon$, für alle $\alpha \in A$, wenn $E \in \mathcal{F}$ und $P(E) < \delta$.

Beweis Sei $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar.
i. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$, so dass

$$E(|X_\alpha|) = \int_{\{|X_\alpha| \leq \lambda\}} |X_\alpha| \, dP + \int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP \leq \lambda + \varepsilon \text{ , für alle } \alpha \in A.$$

ii. Für alle $\varepsilon > 0$ exitiert ein $\lambda > 0$, so dass $\int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP < \frac{\varepsilon}{2}$, für alle $\alpha \in A$. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \int_E |X_\alpha| \, dP &= \int_{E \cap \{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP + \int_{E \cap \{|X_\alpha| \leq \lambda\}} |X_\alpha| \, dP \\ &\leq \int_{\{|X_\alpha| > \lambda\}} |X_\alpha| \, dP + \int_E \mathbb{1}_{\{|X_\alpha| \leq \lambda\}} |X_\alpha| dP < \frac{\varepsilon}{2} + \lambda P(E). \end{aligned}$$

Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. Dann gilt für $E \in \mathcal{F}$, mit $P(E) < \delta$: $\int_E |X_\alpha| \, dP < \varepsilon$.

Sei nun *i.* und *ii.* für $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ erfüllt. Dann gilt für alle $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} P(\{|X_\alpha| > \lambda\}) &= \frac{1}{\lambda}\int_{\{|X_\alpha|>\lambda\}} \lambda \, dP = \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \mathbb{1}_{\{|X_\alpha|>\lambda\}}\lambda \, dP \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |X_\alpha| \, dP = \frac{E(|X_\alpha|)}{\lambda} \leq \frac{M}{\lambda} \text{ , für alle } \alpha \in A, \end{aligned}$$

mit $M = \sup_{\alpha\in A} E(|X_\alpha|) < \infty$. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass $\frac{M}{\lambda} < \delta$, wie in *ii.* Dann gilt $\int_{\{|X_\alpha|>\lambda\}} |X_\alpha| \, dP < \varepsilon$, für alle $\alpha \in A$.

Satz 4.4 *i. Sei $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ eine Familie gleichgradig integrierbarer $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{c_\alpha : \alpha \in A\}$, mit $|c_\alpha| \leq M$, für $M > 0$ und für alle $\alpha \in A$. Dann ist $\{c_\alpha X_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar.*

ii. Sei $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar und $Y \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dann ist $\{X_\alpha Y : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar.

iii. Seien $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ und $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar, dann ist $\{X_\alpha + Y_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar.

Beweis *i.* Da $|c_\alpha| < M$, für $M > 0$ und für alle $\alpha \in A$, so gilt:

$$\int_{\{|c_\alpha X_\alpha|>\lambda\}} |c_\alpha X_\alpha| \, dP \leq \int_{\{|X_\alpha|>\lambda M^{-1}\}} M|X_\alpha| \, dP,$$

so dass

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{\alpha\in A} \int_{\{|c_\alpha X_\alpha|>\lambda\}} |c_\alpha X_\alpha| \, dP \leq \lim_{\lambda\to\infty} \sup_{\alpha\in A} M \int_{\{|X_\alpha|>\lambda M^{-1}\}} |X_\alpha| \, dP = 0,$$

d.h. $\{c_\alpha X_\alpha : \alpha \in A\}$ ist gleichgradig integrierbar.

ii. Da $Y \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar ist, so folgt mit Satz 4.3*i.*:

$$\sup_{\alpha\in A} E(|X_\alpha Y|) \leq \|Y\|_\infty \sup_{\alpha\in A} E(|X_\alpha|) < \infty.$$

Also muss noch gezeigt werden, dass die Bedingung *ii.* in Satz 4.3 erfüllt ist. Für $\|Y\|_\infty = 0$ ist die Aussage trivial. Sei daher $\|Y\|_\infty > 0$ angenommen. Da $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig intergrierbar ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\int_E |X_\alpha| \, dP < \frac{\varepsilon}{\|Y\|_\infty}$, für alle $\alpha \in A$, wenn $E \in \mathcal{F}$ und $P(E) < \delta$. Dann gilt für $E \in \mathcal{F}$, mit $P(E) < \delta$:

$$\int_E |X_n Y| \, dP \leq \|Y\|_\infty \int_E |X_\alpha| \, dP < \varepsilon.$$

D.h. $\{X_\alpha Y : \alpha \in A\}$ ist gleichgradig integrierbar.

iii. Da $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ und $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ gleichgradig integrierbar sind, folgt dies aus Satz 4.3.

Lemma 4.5 *Eine endliche Familie $\{X_n : n = 1, \dots, N\}$ von $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis Da X_n integrierbar ist, so folgt aus Lemma 4.1, dass

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \, dP = 0.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n=1,\dots,N} \int_{\{|X_n|>\lambda} |X_n| \, dP \\ &\le \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \, dP \\ &= \sum_{n=1}^{N} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \, dP = 0. \end{aligned}$$

D.h. $\{X_n : n = 1, \dots, N\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Lemma 4.6 *Sei $X_n \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, \infty)$.*
Gilt $\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p = 0$, dann ist $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ p-fach gleichgradig integrierbar.

Beweis Ist $\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p = 0$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_\Omega |X_n|^p \, dP < \varepsilon \text{ für } n \ge N + 1. \tag{2}$$

Nach Lemma 4.5 ist die Familie $\{|X_1|^p, \dots, |X_N|^p\}$ gleichgradig integrierbar. Daher existiert für dieses $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\int_{\{|X_n|^p>\lambda\}} |X_n|^p \, dP < \varepsilon \text{ für } n = 1, \dots, N. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $\int_{\{|X_n|^p>\lambda\}} |X_n|^p \, dP < \varepsilon$, für alle $n \in N$ und obiges $\lambda > 0$, d.h. $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist p-fach gleichgradig integrierbar.

Satz 4.7 *Sei $X_n \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $p \in (0, \infty)$. Sei X eine $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$. Dann ist folgendes äquivalent:*

i. $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ist p-fach gleichgradig integrierbar.*

ii. $X \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und* $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$.

Beweis *i.* $\Rightarrow$ *ii.*: Angenommen $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig integrierbar. Da $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, so dass $\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X$ f.ü. und damit $\lim_{k\to\infty} |X_{n_k}|^p = |X|^p$ f.ü.. Dann gilt mit Fatous Lemma:

$$\begin{aligned} E(|X|^p) &= \int_\Omega |X|^p dP = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |X_{n_k}|^p dP = \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |X_{n_k}|^p dP \\ &\underset{\text{Lemma}}{\overset{\text{Fatous}}{\leq}} \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |X_{n_k}|^p dP = \liminf_{k\to\infty} E(|X_{n_k}|^p). \end{aligned}$$

Da $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist, folgt mit Satz 4.3*i.*, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|^p) < \infty$ und damit $E(|X|^p) < \infty$. Also ist $X \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Betrachte nun $|X_n - X|^p \leq (2\sup\{|X_n|, |X|\})^p \leq 2^p(|X_n|^p + |X|^p)$. Da $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ und $|X|^p$ gleichgradig integrierbar sind, folgt mit Satz 4.4, dass $\{2^p(|X_n|^p + |X|^p) : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist. Also ist $|X_n - X|^p$ gleichgradig integrierbar. Nach Satz 4.3*ii.* existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\int_E |X_n - X|^p \, dP < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ wenn } E \in \mathcal{F} \text{ und } P(E) < \delta.$$

Aus $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ folgt, dass für diese $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \delta$, für alle $n \geq N$. Also $\int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP < \varepsilon$, für alle $n \geq N$ und somit.

$$\|X_n - X\|_p^p = \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP + \int_{\{|X_n - X| < \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP < \varepsilon + \varepsilon^p,$$

für alle $n \geq N$. Daraus folgt $\limsup_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p^p < \varepsilon + \varepsilon^p$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$.

ii. $\Rightarrow$ *i.*: Nach Lemma 4.6 folgt aus $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$ die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{|X_n - X|^p : n \in \mathbb{N}\}$. Betrachte nun:

$$|X_n|^p = |X_n - X + X|^p \leq 2^p(|X_n - X|^p + |X|^p).$$

Da $|X|^p$ integrierbar ist, so ist, nach Lemma 4.1 und Satz 4.4, $\{2^p(|X_n - X|^p + |X|^p) : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar. Somit ist auch $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar.

Satz 4.8 *Sei X eine integrierbare $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $\{\mathfrak{G}_\alpha : \alpha \in A\}$ eine Familie von σ-Unteralgebren von $\mathcal{F}$. Sei Y_α eine Version von $E(X|\mathfrak{G}_\alpha)$, mit $\alpha \in A$. Dann ist $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Beweis Da $|\cdot|$ eine konvexe Funktion ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichung, für alle $\alpha \in A$:

$$|Y_\alpha| = |E(X|\mathfrak{G}_\alpha)| \underset{\text{Ungleichung}}{\overset{\text{Jensensche}}{\leq}} E(|X|\,|\mathfrak{G}_\alpha) \text{ f.ü. auf } (\Omega, \mathfrak{G}_\alpha, P). \tag{4}$$

Daraus folgt, mit Satz 3.6:

$$E(|Y_\alpha|) \leq E(E(|X|\,|\mathfrak{G}_\alpha)) \overset{3.6}{=} E(|X|).$$

Also folgt, für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lambda P(\{|Y_\alpha| > \lambda\}) &= \int_{\{|Y_\alpha|>\lambda\}} \lambda \, dP = \int_\Omega \lambda \mathbb{1}_{\{|Y_\alpha|>\lambda\}} \, dP \\ &\leq \int_\Omega |Y_\alpha| \, dP = E(|Y_\alpha|) \leq E(|X|)\,, \text{ für alle } \alpha \in A. \end{aligned} \tag{5}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da X nach Voraussetzung integrierbar ist, existiert nach Lemma 4.1 ein $\delta > 0$, so dass

$$\int_E |X| \, dP < \varepsilon\,, \text{ falls } E \in \mathcal{F} \text{ und } P(E) < \delta. \tag{6}$$

Sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass

$$\frac{1}{\lambda} \int_\Omega |X| \, dP < \delta. \tag{7}$$

Damit folgt, aus (5) und (7)

$$P(\{|Y_\alpha| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} E(|X|) < \delta\,, \text{ für alle } \alpha \in A. \tag{8}$$

Da $\{|Y_\alpha| > \lambda\} \in \mathfrak{G}_\alpha$ folgt, aus (4), (6) und (8) und der Definition der bedingten Erwartung (Definition 3.3):

$$\int_{\{|Y_\alpha|>\lambda\}} |Y_\alpha| \, dP \leq \int_{\{|Y_\alpha|>\lambda\}} E(|X|\,|\mathfrak{G}_\alpha) \, dP = \int_{\{|Y_\alpha|>\lambda\}} |X| \, dP < \varepsilon\,,$$

für alle $\alpha \in A$. D.h $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ ist gleichgradig integrierbar.

5 Martingale

5.1 Martingale, Submartingale und Supermartingale

Der folgende Abschnitt folgt den Ausführungen in Yeh [25, Kapitel 2, S. 71ff.]

Definition 5.1 *Eine wachsende Folge von Zufallsvariablen $\tau_n, n \in \mathbb{N}$ nennt man eine lokalisierende Folge bezüglich einer Filtration, falls folgendes gilt:*

i. Jedes τ_n ist eine Stoppzeit bezüglich obiger Filtration,

ii. $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ f.ü.

Definition 5.2 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$.*

i. X ist nichtnegativ, wenn $X_t \geq 0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für alle $t \in \mathcal{T}$.

ii. X ist beschränkt, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass $|X(t, \omega)| \leq M$ für alle $(t, \omega) \in \mathcal{T} \times \Omega$.

iii. X ist beschränkt in L_p, wenn $\sup_{t\in T} E(|X_t|^p) < \infty$.

Definition 5.3 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ein adaptierter stochastischer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Sei X ein L_1 Prozess. Dann nennt man X ein*

i. Martingal bzgl. $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$, wenn $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$, mit $s, t \in \mathcal{T}$, $s < t$,

ii. Submartingal bzgl. $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$, wenn $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$, mit $s, t \in \mathcal{T}$, $s < t$,

iii. Supermartingal bzgl. $(\{\mathcal{F}_t\}, P)$, wenn $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$, mit $s, t \in \mathcal{T}$, $s < t$.

Definition 5.4 *i. Ein Prozess $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ nennt man ein lokales Martingal (Submartingal) bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, wenn es eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $M_n = \{M(t \wedge \tau_n) : 0 \leq t < \infty\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, ein $\{\mathcal{F}_t\}$- Martingal (Submartingal) ist.*

ii. Ist obiges M_n ein L_2-Prozess und ein Martingal, so nennt man M_n ein quadratisch integrierbares Martingal und M nennt man ein lokal quadratisch integrierbares Martingal.

iii. *Einen adaptierten Prozess $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ nennt man lokal beschränkt, wenn eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass $X_n = \{X(t \wedge \tau_n) : t \geq 0\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, ein in L_1 beschränkter Prozess ist.*

Lemma 5.5 *Jedes Martingal ist auch ein lokales Martingal.*

Beweis Sei $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein Martingal und $\tau_n = n$ eine lokalisierende Folge.
Ist $n < t$, dann ist $t \wedge n = n$ und es gilt $\{M(n) \leq n\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_t$. Ist $t < n$, dann ist $t \wedge n = t$ und es gilt $\{M(t) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Also ist M_n adaptiert.
Da M ein Martingal ist, ist $E(|M(t)|) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und somit $E(|M(t \wedge n)|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Seien $n, s > t$ dann ist $E\big(M(s \wedge n)\big|\mathcal{F}_t\big) = M(t)$, da M ein Martingal ist.
Also existiert eine lokalisierende Folge, so dass $M_n = \{M(t \wedge \tau_n) : 0 \leq t < \infty\}$ ein Martingal ist. D.h. M ist ein lokales Martingal.

Lemma 5.6 *Sei $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ein stochastischer Prozess auf einem filtriertem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathcal{T}\}, P)$.*

i. *Ist X ein Martingal, dann ist $E(X_t) =$ konst., für alle $t \in \mathcal{T}$.*

ii. *Ist X ein Submartingal, dann ist $E(X_s) \leq E(X_t)$, für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s < t$.*

iii. *Ist X ein Supermartingal, dann ist $E(X_s) \geq E(X_t)$, für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s < t$.*

Beweis *i.* Da X ein Martingal ist, gilt nach Definition 5.3 *i.* $E(E(X_t|\mathcal{F}_s)) = E(X_s)$, für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s < t$. Nach Satz 3.6 ist $E(E(X_t|\mathcal{F}_s)) = E(X_t)$. Also $E(X_s) = E(X_t)$, d.h. $E(X_t)$ ist konstant für alle $t \in \mathcal{T}$. Analog beweist man *ii.* und *iii.*

Definition 5.7 *Sei $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Martingal, Submartingal oder Supermartingal. Sei $C = \{C_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein vorhersagbarer stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$. Den stochastischen Prozess $C \bullet X$ definiert durch:*

$$\begin{aligned}(C \bullet X)_0 &:= 0 \\ (C \bullet X)_n &:= \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \{X_k - X_{k-1}\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

nennt man Martingal Transformation.

Bemerkung 5.8 C_k, X_k und X_{k-1}, für $k = 1, \dots, n$ sind $\mathcal{F}_n$-messbar und damit ist $C \bullet X$ ein adaptierter Prozess.
Ist C ein beschränkter Prozess, dann ist $\sum_{k=1}^n C_k \cdot \{X_k - X_{k-1}\} \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$. Da X ein L_1-Prozess ist und damit ist auch $C \bullet X$ ein L_1-Prozess.

Satz 5.9 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$ *ein filtrierter Raum.*

i. Sei C *ein beschränkter nichtnegativer vorhersagbarer stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$ *und* X *ein Martingal, Submartingal oder Supermartingal, dann ist* $C \bullet X$ *ein Martingal, Submartingal oder Supermartingal.*

ii. Sei C *ein beschränkter vorhersagbarer Prozess und* X *ein Martingal, dann ist* $C \bullet X$ *ein Martingal.*

Beweis Nach Bemerkung 5.8 ist $C \bullet X$ in *i.* und *ii.* ein adaptierter L_1-Prozess. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
E((C \bullet X)_n | \mathcal{F}_{n-1}) &\overset{3.5iv}{=} E(\sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot \{X_k - X_{k-1}\} | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&+ E(C_n \cdot \{X_n - X_{n-1}\} | \mathcal{F}_{n-1}) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot \{X_k - X_{k-1}\} + C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \\
&= (C \bullet X)_{n-1} + C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\}
\end{aligned}$$

auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü. Dabei gilt $(*)$ wegen der Linearität des bedingten Erwartungswertes, da C_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, X n.V. ein Martingal ist und mit Satz 3.7.

i. Sei C beschränkt und nichtnegativ. Da X ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal ist, gilt entsprechend $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}, E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ oder $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü.
Da $C_n \geq 0$ gilt $C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \geq 0, C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} = 0$ oder $C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} \leq 0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü. Somit folgt mit obiger Überlegung, dass $E((C \bullet X)_n | F_{n-1}) \geq (C \bullet X)_{n-1}$, bzw $E((C \bullet X)_n | F_{n-1}) = (C \bullet X)_{n-1}$ oder $E((C \bullet X)_n | F_{n-1}) \leq (C \bullet X)_{n-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü., d.h. $C \bullet X$ ist ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal.

ii. Sei C beschränkt und X ein Martingal. Dann gilt $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü. und damit $C_n \cdot \{E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}\} = 0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü. Mit obiger Überlegung erhält man $E((C \bullet X)_n | \mathcal{F}_{n-1}) = (C \bullet X)_{n-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P)$ f.ü. Also ist $C \bullet X$ ein Martingal.

Definition 5.10 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$ und definiere den vorhersagbaren Prozess $C^{(T)} = \{C_n^{(T)} : n \in \mathbb{N}_0\}$ durch:*

$$C_n^{(T)} := \mathbb{1}_{\{n \leq T\}}, \quad \textit{für alle } n \in N_0.$$

D.h.

$$C_n^{(T)}(\omega) = \mathbb{1}_{\{n \leq T(\omega)\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \textit{falls } n \leq T(\omega) \\ 0 & , \textit{falls } n > T(\omega) \end{cases}$$

Lemma 5.11 *Sei T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, dann ist $C^{(T)}$ ein vorhersagbarer Prozess.*

Beweis *i.* $C_0^{(T)} = \mathbb{1}_{\{0 \leq T\}} = 1$.
ii. Da $\mathbb{1}_{\{n \leq T\}} = \mathbb{1}_{\{n > T\}^c}$ und $\{T < n\} = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, ist $C_n^{(T)}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $C^{(T)}$ ein vorhersagbarer Prozess.

Satz 5.12 *Sei $X = \{X_n : n \in N_0\}$ ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$, dann gilt $X^{T\wedge} = X_0 + C^{(T)} \bullet X$.*

Beweis Da nach Lemma 5.11 $C^{(T)}$ ein vorhersagbarer Prozess ist, ist nach Definition 5.7 und 5.10 $(C^{(T)} \bullet X)_0 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} (C^{(T)} \bullet X)_n &= \textstyle\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{k \leq T\}} \cdot \{X_k - X_{k-1}\} \\ &= \mathbb{1}_{\{1 \leq T\}} \cdot \{X_1 - X_0\} + \mathbb{1}_{\{2 \leq T\}} \cdot \{X_2 - X_1\} + \ldots + \mathbb{1}_{\{n \leq T\}} \cdot \{X_n - X_{n-1}\} \\ &= -X_0 \cdot \mathbb{1}_{\{1 \leq T\}} + \textstyle\sum_{k=1}^n (X_k \cdot \{\mathbb{1}_{\{k \leq T\}} - \mathbb{1}_{\{k+1 \leq T\}}\}) + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{n \leq T\}}. \end{aligned}$$

Da $X_0 \cdot \mathbb{1}_{\{1 \leq T\}} = X_0 \cdot \{\mathbb{1}_{\{0 \leq T\}} - \mathbb{1}_{\{T=0\}}\} = X_0 \cdot \{\mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{\{T=0\}}\} = X_0 - X_0 \cdot \mathbb{1}_{\{T=0\}}$ und $\mathbb{1}_{\{k \leq T\}} - \mathbb{1}_{\{k+1 \leq T\}} = \mathbb{1}_{\{T=k\}}$ für $k = 1, \ldots, n-1$, gilt

$$\begin{aligned} (C^{(T)} \bullet X)_n &= -X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (X_k \cdot \mathbb{1}_{\{T=k\}}) + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \\ &= -X_0 + X_{T \wedge n} = -X_0 + X_n^{T\wedge}, \end{aligned}$$

d.h. $X_n^{T\wedge} = X_0 + (C^{(T)} \bullet X)_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Und für $n = 0$ gilt $X_0^{T\wedge} = X_{T \wedge 0} = X_0 = X_0 + (C^{(T)} \bullet X)_0$.

Satz 5.13 *Sei $X = \{X_n : n \in N_0\}$ ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$. Dann ist* *i. der gestoppte Prozess $X^{(T\wedge)} = \{X_{T\wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal und*

ii. insbesondere ist $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_0)$, $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$ oder $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis *i.* Da $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein L_1-Prozess ist, so ist nach Satz 2.37 $X^{T\wedge}$ ein L_1-Prozess. Nach Satz 5.12 gilt: $X^{T\wedge} = X_0 + (C^{(T)} \bullet X)$. Da $C^{(T)}$ ein beschränkter nichtnegativer vorhersagbarer stochastischer Prozess ist, gilt nach Satz 5.9, dass $C^{(T)} \bullet X$ ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal ist, jenachdem, ob X ein Submartingal, Martingal oder Supermartingal ist. Also ist $X^{T\wedge}$ ein Submartingal, bzw. Martingal oder Supermartingal.
ii. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Sei $0 \leq m < n$. Ist $X^{T\wedge}$ ein Martingal, dann ist $E(X^{T\wedge})$ nach Lemma 5.6 *i.* konstant. Da $(C^{(T)} \bullet X)$ ein Martingal ist und $(C^{(T)} \bullet X)_0 = 0$, gilt $E(X_{T\wedge 0}) = E(X_0 + (C^{(T)} \bullet X)_0) = E(X_0)$. Daraus folgt $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$. Ist $X^{T\wedge}$ ein Sub- bzw. Supermartingal, so ist nach Lemma 5.6 *ii.* bzw. *iii.* $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_{T\wedge m})$ bzw. $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_{T\wedge m})$. Mit obiger Argumentation folgt: $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_0)$ bzw. $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_0)$.

Satz 5.14 (Optional Stopping Theorem von Doop) *Sei $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Submartingal und T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Sei T endlich auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ f.ü. Dann gilt $E(X_0) \leq E(X_T) < \infty$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

i. T ist beschränkt, d.h. es existiert ein $m \in N_0$, sodass $T(\omega) \leq m$ für alle $\omega \in \Omega$.

ii. X ist beschränkt, d.h. es existiert ein $K \geq 0$, sodass $|X_n(\omega)| \leq K$ für alle $(n, \omega) \in \mathbb{N}_0 \times \Omega$.

iii. T ist integrierbar und X hat beschränkte Zuwächse. D.h. es existiert ein $L \geq 0$, sodass $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq L$ für alle $(n, \omega) \in \mathbb{N}_0 \times \Omega$.

Ist X ein Martingal, so gilt $E(X_T) = E(X_0)$, wenn eine der Bedingungen erfüllt ist.

Beweis Ist X ein Submartingal, dann ist nach Satz 5.13 der gestoppte Prozess $X^T = \{X_{T\wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ebenfalls ein Submartingal. Dann ist $\{E(X_{T\wedge n}) : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine wachsende Folge in $\mathbb{R}$, mit der unteren Schranke $E(X_{T\wedge 0}) = E(X_0)$. Gilt $T(\omega) < \infty$ für ein $\omega \in \Omega$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodass $T(\omega) \wedge n = T(\omega)$ für $n \geq N$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(T(\omega) \wedge n, \omega) = X(T(\omega)) = X_T(\omega)$$

Ist also T endlich auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ f.ü., dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T \text{ auf } (\Omega, \mathcal{F}_\infty, P) \text{ f.ü.} \tag{1}$$

Sind die Voraussetzungen von *i.* erfüllt, so gilt $T \wedge m = T$, sodass $E(X_0) \leq E(X_{T\wedge m}) = E(X_T)$ und $E(X_T) < \infty$. Ist X ein Martingal, so ist nach Satz 5.13 X_T ein Martingal. Daraus folgt $E(X_{T\wedge m}) = E(X_0)$ und damit $E(X_T) = E(X_0)$.

Sind die Voraussetzungen von *ii.* erfüllt, so gilt $|X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| \leq K$ für alle $(n,\omega) \in \mathbb{N}_0 \times \Omega$, da $|X_n(\omega)| \leq K$ für alle $(n,\omega) \in \mathbb{N}_0 \times \Omega$. Und das Bounded Convergence Theorem (Korollar des Satzes von der majorisierten Konvergenz) kann angewendet werden. Somit erhält man

$$\begin{aligned} E(X_T) \overset{(1)}{=} E(\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}\, dP \underset{\text{Theorem}}{\overset{\text{Bounded Convergence}}{=}} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_{T\wedge n}\, dP \\ = \lim_{n\to\infty} E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_0). \end{aligned}$$

Da $|E(X_{T\wedge n})| \leq K$ für $n \in \mathbb{N}_0$, gilt $E(X_0) \leq E(X_T) \leq K$. Ist X ein Martingal, dann ist X_T ein Martingal, sodass $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt $E(X_T) = E(X_0)$.

Sind die Voraussetzungen von *iii.* erfüllt, so gilt für alle $(n,\omega) \in \mathbb{N}_0$

$$X_{T\wedge n}(\omega) - X_0(\omega) = \sum_{k=1}^{T(\omega)\wedge n} \{X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|X_{T\wedge n} - X_0| \leq \sum_{k=1}^{T\wedge n} \underbrace{|X_k - X_{k-1}|}_{\leq L} \leq L \cdot (T \wedge n) \leq LT. \tag{2}$$

Also ist LT eine Majorante von $|X_{T\wedge n} - X_0|$. Aus der Integrierbarkeit von T folgt, dass T endlich auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ f.ü. ist. Dann erhält man mit (1), $\lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge n} - X_0) = X_T - X_0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ f.ü.. Also kann der Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue) angewendet werden. Da $X_T - X_0$ integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} E(X_T - X_0) = E(\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} - X_0) \\ = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} - X_0\, dP \overset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_{T\wedge n} - X_0\, dP \\ = \lim_{n\to\infty} E(X_{T\wedge n} - X_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Somit ist X_T integrierbar und $E(X_0) \leq E(X_T) < \infty$. Ist X ein Martingal, dann gilt, mit der selben Bergründung wie oben, $E(X_T) = E(X_0)$.

Korollar 5.15 *Sei $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Martingal mit beschränkten Zuwächsen, $C = \{C_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein beschränkter vorhersagbarer Prozess und T eine integrierbare Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$. Dann gilt für die Martingal Transformation $C \bullet X$:*

$$E((C \bullet X)_T) = 0.$$

Beweis Seien $K, L \geq 0$, so dass $|C_n| \leq K$ und $|X_n - X_{n-1}| \leq L$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X ein Martingal und C ein beschränkter vorhersagbarer Prozess ist, ist $C \bullet X$, nach Satz 5.9*ii.*, ein Martingal und $(C \bullet X)_0 = 0$. $|(C \bullet X)_n - (C \bullet X)_{n-1}| = |C_n(X_n - X_{n-1}| \leq KL$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, mit Satz 5.14, dass $E((C \bullet X)_T) = E((C \bullet X)_0) = 0$.

Definition 5.16 *Ein Martingal $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ nennt man (rechts-) stetig, genau dann wenn*

i. die Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ die gewöhnlichen Eigenschaften erfüllt, und

ii. $\{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ (rechts-) stetig ist.

Satz 5.17 (Optional Stopping Theorem, stetig) *Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges Submartingal und T eine Stoppzeit auf einem rechtsstetigen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Sei T endlich f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Ist X beschränkt, d.h. es existiert ein $K \geq 0$, so dass $|X(t, \omega)| \leq K$, für alle $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, dann gilt:*

$$E(X_0) \leq E(X_T) < \infty.$$

Ist X ein beschränktes rechtsstetiges Martingal, dann gilt:

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis Sei

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} k\,2^{-n} & , \text{ für } t \in [(k-1)2^{-n}, k\,2^{-n}),\ k \in \mathbb{N} \\ \infty & , \text{ für } t = \infty \end{cases}$$

und $T_n = \vartheta_n \circ T$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.31 ist $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine monoton fallende Folge von Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, mit Werten in $\{k\,2^{-n} : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\infty\}$ und $T_n \downarrow T$ auf Ω, für $n \to \infty$. Sei $\Lambda = \{T = \infty\}$ und $\Lambda_n = \{T_n = \infty\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition von ϑ_n gilt:

$$\Lambda_n = T_n^{-1}(\{\infty\}) = T^{-1} \circ \vartheta_n^{-1}(\{\infty\}) = T^{-1}(\{\infty\}) = \Lambda.$$

Da $P(\Lambda) = 0$, ist $P(\Lambda_n) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist T_n endlich f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Hält man nun n fest, und betrachtet den filtrierten

Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{k\,2^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}, P)$. Da $\{\mathcal{F}_{k\,2^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Filtration in diskreter Zeit ist und $\{T_n = k\,2^{n-1}\} = \{T_n \leq k\,2^{-n}\} \setminus \{T_n \leq (k-1)2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k\,2^{-n}}$, ist T_n eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{k\,2^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}, P)$. Da X ein Submartingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ist, ist $\{X_{k\,2^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}$ ein Submartingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{k\,2^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}, P)$. Nach Satz 5.14 gilt $E(X_0) \leq E(X_{T_n}) < \infty$. Da $T_n \downarrow T$ auf Ω, für $n \to \infty$ und der Rechtsstetigkeit von X gilt:

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(T_n(\omega), \omega) = X_T(\omega), \text{ für alle } \omega \in \Lambda_n^c.$$

Da $|X| \leq K$, so gilt $|X_T| \leq K$ auf Λ_n^c. Also gilt, mit dem Bounded Convergence Theorem, $\lim_{n\to\infty} E(X_{T_n}) = E(X_T)$. Da $|E(X_{T_n})| \leq K$, so ist $|E(X_T)| \leq K$ und somit $E(X_0) \leq E(X_T) < \infty$.
Ist X ein Martingal, so gilt nach Satz 5.14, $E(X_{T_n}) = E(X_0)$ und damit $E(X_T) = E(X_0)$.

Satz 5.18 (Optional Sampling Theorem von Doob, diskreter Fall)
Sei $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Submartingal. Seien S und T Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, mit $S \leq T \leq m$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

i. $E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}_S, P)$ *f.ü.,*

insbesondere gilt

ii. $E(X_T) \geq E(X_S)$

und

iii. $E(X_m) \geq E(X_T) \geq E(X_0)$

Beweis Zuerst *ii.* Da S und T Stoppzeiten sind, so sind nach Satz 2.35 X_S $\mathcal{F}_S$-messbar und X_T $\mathcal{F}_T$-messbar. Da S und T beschränkt sind, folgt mit Satz 5.14*i.*, dass X_S und X_T integrierbar sind. Sei $D^{(S,T]} = \{D_n^{(S,T]} : n \in \mathbb{N}_0\}$, mit

$$D_n^{(S,T]} := \mathbb{1}_{\{S<n\leq T\}} = \mathbb{1}_{\{n\leq T\}} - \mathbb{1}_{\{n\leq S\}}\,,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Da $\{S < 0 \leq T\} = \emptyset$, gilt $D_0^{(S,T]} = 0$. Damit ist $D_n^{(S,T]}$ ein beschränkter nichtnegativer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Da $\{n \leq T\} = \{T < n\}^c = (\cup_{k=0}^{n-1}\{T = k\})^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, ist $\mathbb{1}_{\{n\leq T\}}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Mit der gleichen Argumentation ist $\mathbb{1}_{\{n\leq S\}}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Also ist $D_n^{(S,T]}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $D_n^{(S,T]}$ ein beschränkter nichtnegativer vorhersagbarer Prozess und nach Satz 5.9 ist $D^{(S,T]} \bullet X$ ein Submartingal. Nach Definition 5.7 und den Berechnungen im Beweis des Satzes 5.12 gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(D^{(S,T]} \bullet X)_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S<k\leq T\}}(X_k - X_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\leq S\}}(X_k - X_{k-1}) \\
&= (X_{T\wedge n} - X_0) - (X_{S\wedge n} - X_0) \\
&= X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n}.
\end{aligned}$$

Da $S \leq T \leq m$, gilt $(D^{(S,T]} \bullet X)_m = X_T - X_S$. Da $D^{(S,T]} \bullet X$ ein Submartingal ist, gilt:

$$E((D^{(S,T]} \bullet X)_n) \geq E((D^{(S,T]} \bullet X)_0) = E(0) = 0$$

und damit $E(X_T - X_S) \geq 0$.

i. Da $E(X_T|\mathcal{F}_S)$ und X_S $\mathcal{F}_S$-messbar sind, reicht es zu zeigen, dass gilt:

$$\int_A X_T dP \geq \int_A X_S dP \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_S. \tag{1}$$

Definiere dazu für jedes $A \in \mathcal{F}_S$ zwei Zufallsvariablen S_A und T_A auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $S_A = S$ auf A und $S_A = m$ auf A^c und analog $T_A = T$ auf A und $T_A = m$ auf A^c. Dann sind S_A und T_A Stoppzeiten, da mit $A \in \mathcal{F}_S$ gilt:

$$\{S_A \leq n\} = \begin{cases} \Omega \in F_n & \text{für } n \geq m \\ \{S \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n & \text{für } n < m. \end{cases}$$

Analog für T_A, da $A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_T$. Da S_A und T_A Stoppzeiten sind und $S_A \leq T_A \leq m$ folgt mit *ii.*

$$E(X_{T_A}) \geq E(X_{S_A}). \tag{2}$$

Da $E(X_{T_A}) = \int_A X_T dP + \int_{A^c} X_m dP$ und $E(X_{S_A}) = \int_A X_S dP + \int_{A^c} X_m dP$ folgt (1) mit (2).

iii. Dies folgt aus *ii.*, da $0, T$ und m beschränkte Stoppzeiten sind, und $0 \leq T \leq m$.

Satz 5.19 (Ungleichung von Doob, endl. Fall) *Sei* $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein Submartingal auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*, dann gilt für beliebige* $m \in \mathbb{N}_0$ *und* $\lambda > 0$*:*

$$\lambda P(\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda) \leq \int_{\{\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\}} X_m dP \leq E(X_m^+) \tag{1}$$

und

$$\lambda P(\max_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda) \leq \int_{\{\max_{n=0,\dots,m} X_n > -\lambda\}} X_m dP - E(X_0) \leq E(X_m^+) - E(X_0) \tag{2}$$

Beweis Definiere die Funktion $T_m \in \Omega$ vermöge:

$$T_m(\omega) := \begin{cases} \min(n = 0, \dots, m : X_n(\omega) \geq \lambda), \\ m \quad \text{falls die obige Menge} = \emptyset. \end{cases} \tag{3}$$

Um zu zeigen, dass T_m eine Stoppzeit ist, reicht es nach Bemerkung 2.16 aus zu zeigen, dass $\{T_m = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachte dazu:

$$\{T_m = n\} = \{X_0 < \lambda, \dots, X_{n-1} < \lambda, X_n \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für } n = 0, \dots, m-1,$$
$$\{T_m = m\} = \{X_0 < \lambda, \dots, X_{m-1} < \lambda, X_m \geq \lambda\} \cup \{X_0 < \lambda, \dots, X_m < \lambda\} \in \mathcal{F}_m$$

und

$$\{T_m = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n \quad \text{für } n > m.$$

Sei $A = \{\max_{n=0,\dots,m} X_n \geq \lambda\}$. Da X ein Submartingal und T_m eine durch m beschränkte Stoppzeit ist, gilt mit Satz 5.18*iii.*

$$E(X_m) \geq E(X_T) = \int_A X_{T_m} dP + \int_{A^c} X_{T_m} dP. \tag{4}$$

Ist $A = \emptyset$, dann gilt (1) trivialerweise. Ist $A \neq \emptyset$, dann gilt auf dieser Menge, nach (3) $X_{T_m} \geq \lambda$. Mit (3) gilt auch $T_m = m$ auf A^c. Also folgt mit (4):

$$E(X_m) \geq \lambda P(A) + \int_{A^c} X_m dP$$

und damit

$$\lambda P(A) \leq E(X_m) - \int_{A^c} X_m dP = \int_A X_m dP \leq \int_\Omega X_m^+ dP.$$

Um (2) zu beweisen sei

$$S_m(\omega) = \begin{cases} \min\{n = 0; \dots, m : X_n(\omega) \leq -\lambda\} \\ m \quad \text{, wenn die obige Menge} = \emptyset. \end{cases} \tag{5}$$

Analog zu T_m kann man zeigen, dass S_m eine Stoppzeit ist. Sei $B = \{\min_{n=0,\dots,m} X_n \leq -\lambda\}$. Mit Satz 5.18*iii.* gilt:

$$E(X_0) \leq E(X_{S_m}) = \int_B X_{S_m} dP + \int_{B^c} X_{S_m} dP. \tag{6}$$

Ist $B = \emptyset$, dann gilt (2) trivialerweise. Ist $B \neq \emptyset$, dann gilt auf dieser Menge, nach (5) $X_{S_m} \leq -\lambda$. Mit (5) gilt auch $S_m = m$ auf B^c. Also folgt mit (6):

$$E(X_0) \leq -\lambda P(B) + \int_{B^c} X_m dP.$$

und damit

$$\lambda P(B) \leq -E(X_0) + \int_{B^c} X_m dP \leq -E(X_0) + \int_{\Omega} X_m^+ dP.$$

Definition 5.20 (Reverses Submartingal) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie $\{\mathcal{F}_{-n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ von σ-Unteralgebren von $\mathcal{F}$ nennt man eine Filtration, wenn $\mathcal{F}_{-m} \subset \mathcal{F}_{-n}$, für $m, n \in \mathbb{N}_0$, mit $m > n$. Definiere $\mathcal{F}_{\infty} := \cap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{-n}$. Einen stochastischen Prozess $X = \{X_{-n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{-n} : n \in \mathbb{N}_0\}, P)$ nennt man $\mathcal{F}_{-n}$-adaptiert, wenn X_{-n} $\mathcal{F}_{-n}$-messbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Einen $\mathcal{F}_{-n}$-adaptierten L_1-Prozess $X = \{X_{-n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, nennt man ein reverses Submartingal, reverses Martingal oder reverses Supermartingal, wenn $E(X_{-n}|\mathcal{F}_{-m}) \geq, =$ oder $\leq X_{-m}$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_{-m}, P)$ ist, für $n, m \in \mathbb{N}_0$, mit $m > n$.*

Satz 5.21 *Ist $X = \{X_{-n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ ein reverses Submartingal auf dem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{-n}\}, P)$, mit*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_{-n}) > -\infty, \tag{7}$$

dann ist X gleichgradig integrierbar. Ist X ein reverses Supermartingal, mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_{-n}) < \infty, \tag{8}$$

dann ist X gleichgradig integrierbar.

Beweis Sei X ein reverses Submartingal. Nach Lemma 5.6 ist $E(X_{-n})$ monoton fallend, für $-n \downarrow$. Dann gilt mit (7), dass $E(X_{-n}) \downarrow c \in \mathbb{R}$, für $-n \downarrow -\infty$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $E(X_{-N}) - c < \frac{\varepsilon}{2}$. Also

$$E(X_{-N}) - E(X_{-n}) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } n > N. \tag{9}$$

Außerdem erhält man für ein beliebiges $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\{|X_{-n}|>\lambda\}} |X_{-n}|\, dP &= \int_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-n}\, dP - \int_{\{X_{-n}<-\lambda\}} X_{-n}\, dP \\ &= \int_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-n}\, dP + \int_{\{X_{-n}\geq-\lambda\}} X_{-n}\, dP - \int_{\Omega} X_{-n}\, dP. \end{aligned} \tag{10}$$

Da X ein Submartingal ist, ist $E(X_{-N}|\mathcal{F}_{-n}) \geq X_{-n}$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_{-n}, P)$, für $n > N$. Da $\{X_{-n} > \lambda\}, \{X_{-n} \geq -\lambda\} \in \mathcal{F}_{-n}$ erhält man aus (9) und (10)

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|X_{-n}|>\lambda\}} |X_{-n}|\, dP \\
\overset{(10)}{=} &\int_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-n}\, dP + \int_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-n}\, dP - \int_{\Omega} X_{-n}\, dP \\
= &\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-n}\, dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-n}\, dP - \int_{\Omega} X_{-n}\, dP \\
\leq &\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} E(X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})\, dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} E(X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})\, dP - \int_{\Omega} X_{-n}\, dP \\
\overset{3.7}{=} &\int_{\Omega} E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})\, dP + \int_{\Omega} E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})\, dP - \int_{\Omega} X_{-n}\, dP \\
= &E(E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})) + E(E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-N}|\mathcal{F}_{-n})) - E(X_{-n}) \\
\overset{3.6}{=} &E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}) + E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-N}) - E(X_{-n}) \\
\overset{(9)}{<} &E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}) + E(\mathbb{1}_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-N}) - E(X_{-N}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
= &\int_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}\, dP + \int_{\{X_{-n}\geq -\lambda\}} X_{-N}\, dP - \int_{\Omega} X_{-N}\, dP + \frac{\varepsilon}{2} \\
= &\int_{\{X_{-n}>\lambda\}} X_{-N}\, dP - \int_{\{X_{-n}<-\lambda\}} X_{-N}\, dP + \frac{\varepsilon}{2} \\
\leq &\int_{\{X_{-n}>\lambda\}} |X_{-N}|\, dP + \int_{\{X_{-n}<-\lambda\}} |X_{-N}|\, dP + \frac{\varepsilon}{2} \\
= &\int_{\{|X_{-n}|>\lambda\}} |X_{-N}|\, dP + \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{ für } n > N.
\end{aligned} \tag{11}$$

Da $X_0, \dots, X_{-N}$ integrierbar sind, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\int_A |X_0|\, dP\,, \dots, \int_A |X_{-N}|\, dP < \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{ für } A \in \mathcal{F}\,, \text{ mit } P(A) < \delta. \tag{12}$$

Da $|X_{-n}| = 2X_{-n}^+ - X_{-n}$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so erhält man

$$\begin{aligned}
P(\{|X_{-n}| > \lambda\}) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|X_{-n}|>\lambda\}} \lambda\, dP \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |X_{-n}|\, dP \\
&= \frac{1}{\lambda} E(|X_{-n})|) = \frac{1}{\lambda}(2E(X_{-n}^+) - E(X_{-n})).
\end{aligned}$$

Da X ein reverses Submartingal ist, so ist auch X^+ ein reverses Submartingal und so folgt aus Lemma 5.6, dass $E(X_{-n}^+) \leq E(X_0^+)$. Somit

$$P(\{|X_{-n}| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}(2E(X_0^+) - c) < \infty\,, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Also kann $\lambda > 0$ so gewählt werden, dass $P(\{|X_{-n}|) > \lambda\}) < \delta$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses λ gilt, mit (11) und (12), dass $\int_{\{|X_{-n}>\lambda\}} |X_{-n}|\, dP < \varepsilon$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. X ist gleichgradig integrierbar.
Ist X ein reverses Supermartingal, mit der Eigenschaft (8). Dann ist $-X$ ein reverses Submartingal, mit $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} E(-X_n) > -\infty$. Also ist $-X$ gleichgradig integrierbar und damit ist auch X gleichgradig integrierbar.

Satz 5.22 (Optional Sampling, stetig) *Sind $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges Submartingal, Martingal oder Supermartingal, S und T beschränkte Stoppzeiten auf einem rechtsstetigen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, mit $S \leq T$ auf Ω. Dann sind X_S und X_T integrierbar und $E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S$, $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ bzw. $E(X_T|\mathcal{F}_S) \leq X_S$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_S, P)$.*

Beweis Sei X ein rechtsstetiges Submartingal. Seien S und T beschränkte Stoppzeiten, mit $S \leq T \leq m$ auf Ω, mit $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.31 existieren $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, so dass S_n und T_n Werte in $\{k\,2^{-n} : k = 1, \dots, m\,2^n\}$ annehmen, $S_n \leq T_n$ auf Ω, für alle $n \in \mathbb{N}$, $S_n \downarrow S$ und $T_n \downarrow T$ auf Ω, für $n \to \infty$. Also sind S_n und T_n Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_{k\,2^{-n}:k\in\mathbb{N}_0}\}$. Somit gilt, nach Satz 5.18, $E(X_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}) \geq X_{S_n}$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_{S_n}, P)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\int_A X_{T_n}\, dP = \int_A E(X_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n})\, dP \geq \int_A X_{S_n}\, dP\,, \text{ für } A \in \mathcal{F}_{S_n}. \tag{13}$$

Da X rechststetig ist und $T_n \downarrow T$, $S_n \downarrow S$ auf Ω, so ist $\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T$ und $\lim_{n\to\infty} X_{S_n} = X_S$ auf Ω.
Sind $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, dann gilt nach Satz 4.7, dass $X_T \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, $X_S \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_S, P)$, $\lim_{n\to\infty} \|X_{T_n} - X_T\|_1 = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|X_{S_n} - X_S\|_1 = 0$. Daraus folgt:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{T_n} - X_T\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{T_n}\, dP - \int_A X_T\, dP$$

und

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{S_n} - X_S\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{S_n}\, dP - \int_A X_S\, dP, \text{ für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_{T_n}\, dP = \int_A X_T\, dP \text{ und } \lim_{n\to\infty} \int_A X_{S_n}\, dP = \int_A X_S\, dP \text{ für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Daraus folgt mit (13):

$$\int_A X_T\, dP \geq \int_A X_S\, dP\,, \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_S,$$

d.h. $E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S$.
Bleibt noch die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$ zu zeigen.
T_n ist eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_{2\,k^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da, nach der Konstruktion von T_n in Satz 2.31, $T_{n-1} \geq T_n$, so ist $\{T_{n-1} < 2k^{-n}\} \subset \{T_n < 2k^{-n}\} \in \mathcal{F}_{2k^{-n}}$, für $k \in \mathbb{N}_0$. D.h. T_{n-1} ist ebenfalls eine Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{F}_{2\,k^{-n}} : k \in \mathbb{N}_0\}$. Aus $T_{n-1} \geq T_n$ folgt, mit Satz 5.18, dass $E(X_{T_{n-1}}|\mathcal{F}_{T_n}) \geq X_{T_n}$. Ferner folgt aus $T_{n-1} \geq T_n$, dass $\mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{Tn-1}$. Also ist $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ein reverses Submartingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Aus $E(X_{T_n}|\mathcal{F}_0) \geq X_0$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ folgt $E(X_{T_n}) \geq E(X_0)$. Also $\inf_{n\in\mathbb{N}} E(X_{T_n}) \geq E(X_0) > -\infty$. Mit Satz 5.21 folgt nun die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Analog zeigt man die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Ist X ein rechtsstetiges Martingal oder Supermartingal, so beweist man die Aussage des Satzes analog.

Satz 5.23 (Optional Stopping Theorem II) *Sei $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges Martingal (bzw. Submartingal) und sei T eine $\mathcal{F}_t$-Stoppzeit. Dann ist $\{X(t \wedge T) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Martingal (bzw. Submartingal).*

Beweis Der Beweis folgt dem Beweis in [12, S. 56f.].
$X(t \wedge T)$ ist F_t-messbar, da für $T < t$: $\{X(t \wedge T) \leq t\} \subset \{X(t) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und für $T \geq t$: $t \wedge T = t$, also $\{X(t \wedge T) \leq t\} = \{X(t) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Sei $s \leq t$. Dann sind s und t Stoppzeiten, und nach Satz 2.21 sind $t \wedge T$ und $s \wedge (t \wedge T)$ ebenfalls Stoppzeiten und durch t beschränkt. Wendet man Satz 5.22 (Optional Sampling Theorem) auf das Martingal $\{X(u) : 0 \leq u \leq t\}$ an, erhält man:

$$\begin{aligned} E\big(|X(t \wedge T)|\big) &\overset{5.22}{=} E\big(|E(X(t)|\mathcal{F}_{t\wedge T})|\big) \\ &\underset{\text{Ungleichung}}{\overset{\text{Jensensche}}{\leq}} E\big(E(|X(t)|\big|\mathcal{F}_{t\wedge T})\big) \overset{3.6}{=} E\big(|X(t)|\big) < \infty. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $E\big(X(t\wedge T)|\mathcal{F}_s\big) = X(s\wedge T)$ f.ü., für alle $0 \leq s \leq t$, gilt. Betrachte

$$X(t \wedge T) = \mathbb{1}_{\{T<s\}} X(t \wedge T) + \mathbb{1}_{\{T\geq s\}} X(t \wedge T).$$

Da $\mathbb{1}_{\{T<s\}} X(t \wedge T) = \mathbb{1}_{\{T<s\}} X(s \wedge T)$ $\mathcal{F}_s$-messbar ist, gilt

$$E\big(\mathbb{1}_{\{T<s\}} X(t \wedge T)|\mathcal{F}_s\big) = \mathbb{1}_{\{T<s\}} X(t \wedge T) \text{ f.ü.}$$

Nach Satz 2.21 ist die Zufallsvariable $T^* := \max(T, s)$ eine Stoppzeit und

$$\mathbb{1}_{\{T\geq s\}} X(t \wedge T) = \mathbb{1}_{\{T\geq s\}} X(t \wedge T^*).$$

Da $\mathbb{1}_{\{T\geq s\}}$ $\mathcal{F}_s$-messbar ist gilt:

$$E\big(\mathbb{1}_{\{T\geq s\}}X(t\wedge T^*)|\mathcal{F}_s\big) = \mathbb{1}_{\{T\geq s\}}E\big(X(t\wedge T^*)|\mathcal{F}_s\big)$$
$$\overset{5.22}{=} \mathbb{1}_{\{T\geq s\}}X(s) = \mathbb{1}_{\{T\geq s\}}X(s\wedge T) \text{ f.ü..}$$

Definition 5.24 (Klassen (D) und (DL)) *Sei S die Familie aller endlichen Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathcal{T}\}, P)$. Für jedes $a \in \mathcal{T}$ sei S_a, die Teilfamilie von S, die aus den Stoppzeiten besteht, die von a beschränkt sind. Ein Submartingal $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ auf dem filtrierten Raum ist von der Klasse (D), wenn $\{X_T : t \in S\}$ gleichgradig integrierbar ist. X ist von der Klasse (DL), wenn $\{X_T : T \in S_a\}$ für jedes $a \in \mathcal{T}$ gleichgradig integrierbar ist.*

Satz 5.25 *Auf einem rechtsstetig filtriertem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ gilt:*

i. Jedes rechtsstetige Martingal ist von der Klasse (DL),

ii. jedes rechtsstetige nichtnegative Submartingal ist von der Klasse (DL),

Beweis *i.* Sei X ein rechtsstetiges Martingal. Ist $T \in S_a$, d.h. $T \leq a$, für alle $a \in \mathbb{R}_+$, dann ist nach Satz 5.22 $E(X_a|\mathcal{F}_T) = X_T$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, für alle $a \in \mathbb{R}_+$, wobei S_a wie in Definition 5.24. Also ist $\{X_T : T \in S_a\}$, nach Satz 4.8, gleichgradig integrierbar.
ii. Sei X ein nichtnegatives rechtsstetiges Submartingal. Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Nach Satz 5.22 ist $E(X_a|\mathcal{F}_T) \geq X_T$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, für alle $T \in S_a$. Für alle $\lambda > 0$ ist $\{X_T > \lambda\} \in \mathcal{F}_T$, so dass

$$\int_{\{X_T>\lambda\}} X_a \, dP \geq \int_{\{X_T>\lambda\}} X_T \, dP. \tag{14}$$

Also $\lambda P(\{X_T > \lambda\}) \leq E(X_T) \leq E(X_a)$, so dass

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(\{X_T > \lambda\}) = 0 \text{ gleichmäßig in } T \in S_a. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{T\in S_a} \int_{\{X_T>\lambda\}} X_T \, dP \leq \lim_{\lambda\to\infty} \sup_{T\in S_a} \int_{\{X_T>\lambda\}} X_a \, dP = 0.$$

Also ist $\{X_T : T \in S_a\}$ gleichgradig integrierbar und damit von der Klasse (DL).

Lemma 5.26 *i. Ein f.ü. wachsender Prozess $A = \{A_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$ ist ein Submartingal von der Klasse (DL).*

ii. Ist M ein rechtsstetiges Martingal und A ein f.ü. wachsender Prozess auf einem rechtsstetigen filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, dann ist $M + A$ ein Submartingal von der Klasse (DL).

Beweis *i.* Da A ein f.ü. wachsender Prozess ist, existiert eine Nullmenge Λ_A in $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, so dass $A(\cdot, \omega)$ eine reellwertige, rechtsstetige monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_+$ ist, mit $A(0, \omega) = 0$ für alle $\omega \in \Lambda_A^c$. Also gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s < t$: $A_t \geq A_s$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Somit $E(A_t|\mathcal{F}_s) \geq E(A_s|\mathcal{F}_s) = A_s$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. D.h. A ist ein Submartingal. Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Betrachte die Familie S_a aller Stoppzeiten auf $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}, P)$, die von a beschränkt sind. Da A ein f.ü. wachsender Prozess ist gilt für alle $T \in S_a$, dass $0 \leq A_T(\omega) \leq A_a(\omega)$, mit $\omega \in \Lambda_A^c$, d.h. $0 \leq A_T \leq A_a$ f.ü. auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Da A_a intergierbar ist, ist $\{A_T : T \in S_a\}$ gleichgradig integrierbar. Da $a \in \mathbb{R}_+$ beliebig, ist A von der Klasse (DL).
ii. Nach Satz 5.25*i.* ist jedes rechtsstetige Martingal M von der Klasse (DL). Ein f.ü. wachsender Prozess A, ist nach *i.*, von der Klasse (DL). Also ist $M + A$ ein Submartingal. Da $(M + A)_T = M_T + A_T$, für alle $T \in S$, folgt mit Satz 4.4*iii.*, dass $M + A$ von der Klasse (DL) ist.

Satz 5.27 (Doob-Meyer Zerlegung) *Sei $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges Submartingal der Klasse (DL) auf einem augmentierten rechtsstetigen filtrierten Raum. Dann existiert ein rechtsstetiges Martingal $M = \{M_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ und ein f.s. wachsender rechtsstetigen vorhersagbaren Prozess $A = \{A_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ auf dem filtrierten Raum, so dass $E\big(A(t)\big) < \infty$ und $X(t) = M(t) + A(t)$ f.s., für alle $t \geq 0$.*
Ist $A(0) = 0$ f.ü. und $X = \tilde{M} + \tilde{A}$ eine weitere Zerlegung, mit $\tilde{A}(0) = 0$, dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$P\big(\tilde{M} \neq M(t)\big) = 0 = P\big(\tilde{A}(t) \neq A(t)\big).$$

Ist X zusätzlich beschränkt, dann ist M gleichgradig integrierbar und A ist integrierbar.

Beweis Der Beweis des Satzes würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Ein ausführlicher Beweis findet sich z.B. in Yeh [25, Seite 182ff]

Bemerkung 5.28 Der Prozess A aus Satz 5.27 (Doob-Meyer Zerlegung) nennt man auch den Kompensator des Submartingals X.

5.2 Quadratische Variation

Definition 5.29 *Ein Martingal $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ nenn man L_p-Martingal, für $p \in [1, \infty)$, wenn X ein Martingal ist und $X_t \in L_p$, für alle t, mit $p \in [1, \infty)$. Ist*

$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E(|X_t|^p) < \infty$*, so nennt man* X L_p*-beschränkt.*

Es sei $M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ *oder kurz* M_2*, der lineare Raum der Äquivalenzklassen aller rechtsstetigen* L_2*-Martingale* $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$*, mit* $X_0 = 0$ *f.ü. auf einem standard filtriertem Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*. Sei* $M_2^c(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ *oder kurz* M_2^c*, der lineare Unterraum der rechtsstetigen f.ü. Vertreter von* M_2*.*

Es sei $A(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ *die Familie der Äquivalenzklassen aller f.ü. wachsender Prozesse. Sei* $A^c(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ *die Teilfamilie von* $A(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ *der f.ü. stetigen Vertreter von* $A(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*.*

Es sei $V(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$ *der lineare Raum der Äquivalenzklassen aller Prozesse von f.ü. lokal endlicher Variation auf einem standard filtrierten Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$*. Es sei* $V^c(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$ *der lineare Unterraum von* $V(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$ *der f.ü. stetigen Vertreter von* $V(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$*.*

Satz 5.30 *Sei* $M \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*. Es existiert eine Äquivalenzklasse* $A \in A(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*, so dass* $M^2 - A$ *ein rechtsstetiges Martingal ist und* $M^2(0) - A(0) = 0$*.*

Beweis Ist M ein rechtsstetiges L_2-Martingal, dann ist M^2 ein rechtstetiges nicht negatives Submartingal, da

$$M_s^2 = (E(M_t|\mathcal{F}_s))^2 \underset{\text{Ungleichung}}{\overset{\text{Jensensche}}{\leq}} E(M_t^2|\mathcal{F}_s), \text{ für } s, t \in \mathbb{R}_+, \text{ mit } s < t.$$

Da $M \in M_2$, so ist, nach Satz 5.25*ii.*, M^2 von der Klasse (DL). Nach Satz 5.27 existiert ein wachsender Prozess A, so dass $M^2 - A$ ein rechtsstetiges Martingal ist. Da $M(0) = 0$ und $A(0) = 0$, ist auch $M^2(0) - A(0) = 0$.

Satz 5.31 *Seien* $M, N \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*. Es existiert eine Äquivalenzklasse* $V \in V(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*, so dass* $MN - V$ *ein rechtsstetiges Martingal und* $MN(0) - V(0) = 0$ *ist.*

Beweis Bertrachte

$$\begin{aligned} MN &= \frac{2MN}{4} + \frac{2MN}{4} + \frac{M^2}{4} - \frac{M^2}{4} + \frac{N^2}{4} - \frac{N^2}{4} \\ &= \frac{M^2 + 2MN + N^2}{4} - \frac{M^2 - 2MN + N^2}{4} \\ &= (\frac{M+N}{2})^2 - (\frac{M-N}{2})^2 = (M')^2 - (M'')^2, \end{aligned} \tag{16}$$

mit $M' = \frac{M+N}{2}$ und $M'' = \frac{M-N}{2}$. Da $M, N \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, so sind auch $M', M'' \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Nach Satz 5.30, existieren f.ü. wachsende Prozesse A', A'', so dass $(M')^2 - A'$ und $(M'')^2 - A''$ rechtsstetige Martingale sind, mit

$(M'(0))^2 - A'(0) = 0$ und $(M''(0))^2 - A''(0) = 0$. Aus (16) erhält man

$$MN - (A' - A'') = ((M')^2 - A') - ((M'')^2 - A''). \tag{17}$$

Sei $V = A' - A''$, dann ist V, nach Satz 2.14, ein Prozess von f.ü. lokal endlicher Variation. Da $(M')^2 - A'$ und $(M'')^2 - A''$ rechtsstetige Martingale, mit $(M'(0))^2 - A'(0) = 0$ und $(M''(0))^2 - A''(0) = 0$ sind, so ist auch $((M')^2 - A') - ((M'')^2 - A'')$ ein rechtsstetiges Martingal, mit $((M'(0))^2 - A'(0)) - ((M''(0))^2 - A''(0)) = 0$. Somit, folgt aus (17) die Behauptung.

Definition 5.32 *Sei $M \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Man schreibt $\langle M, M\rangle$ für $A \in A(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, so dass $M^2 - A$ ein rechtsstetiges Martingal ist, mit $M^2(0) - A(0) = 0$, und nennt $\langle M, M\rangle$ die quadratische Variation von M. Seien $M, N \in M_2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Man schreibt $\langle M, N\rangle$ für $V \in V(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, so dass $MN - V$ ein rechtsstetiges Martingal, mit $MN(0) - V(0) = 0$ ist, und nennt $\langle M, N\rangle$ die quadratische Variation von M und N.*

6 Lebenszeitanalyse

Die Ausführungen dieses Abschnitts basieren, wenn nicht anders angegeben, auf Klein und Moeschberger [16, Kapitel 2].

Sei T die Zeit bis zum Ausfall eines Objektes unter Beobachtung. In diesem Abschnitt sei T als eine nicht negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F vorausgesetzt. Die Zufallsvariable T wird auch als Ausfallszeit bezeichnet.

6.1 Die Survival-Funktion

Die Survival-Funktion ist eine grundlegende Größe um die Lebenszeiten zu beschreiben. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Objekt nach der Zeit t ausfällt.

Definition 6.1 *Die Survival-Funktion ist definiert als*

$$S(t) := P(T > t)\,, \quad t \geq 0.$$

Satz 6.2 *Für die Survival-Funktion gilt:*

i. $S(t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0,$

ii. Ist T eine stetige Zufallsvariable mit positiver Dichte auf $(0, \infty)$, so ist S streng monoton fallend und es gilt:

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(u)du.$$

So lässt sich f schreiben als

$$f(t) = -\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Weiterhin gilt: $S(0) = 1$ *und* $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

iii. *Ist T eine diskrete Zufallsvariable, die Werte in t_j, $j = 1, 2, \ldots$ annimmt, mit diskreter Dichte $p(t_j) = P(T = t_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ mit $t_1 < t_2 < \ldots$, so ist S eine monoton fallende rechtsstetige Treppenfunktion:*

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{t_j > t} p(t_j).$$

Beweis Dies folgt direkt aus der Definition und den Eigenschaften der Verteilungsfunktion.

6.2 Die Hazard-Funktion

Eine weitere wichtige Funktion ist die Hazard-Funktion.

Definition 6.3 *Sei T eine stetige Überlebenszeit, so definiert man die Hazard-Funktion vermöge:*

$$\lambda(t) := \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t}, \quad t \ge 0.$$

Ist T diskret mit Träger $\{t_1, t_2, \ldots\}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, so ist Hazard-Funktion wie folgt definiert:

$$\lambda(t) := P(T = t_j | T \ge t_j), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Satz 6.4 *Ist die Ausfallszeit T stetig, so gilt:*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t)}{P(T \ge t)\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(T < t + \Delta t) - P(T < t)}{P(T \ge t)\Delta t} \underset{\text{stetig}}{\overset{T}{=}} \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{f(t)}{S(t)} \overset{6.2}{=} -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t).
\end{aligned}$$

6.3 Die kumulierte Hazard-Funktion

Eine der Hazard-Funktion verwandte Funktion ist die kumulierte Hazard-Funktion

Definition 6.5 *Ist T eine stetige Zufallsvariable, so ist die kumulierte Hazard-Funktion Λ folgendermaßen definiert:*

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(u)du.$$

Ist T diskret, so ist Λ wie folgt definiert:

$$\Lambda(t) := \sum_{t_j \leq t} \lambda(t_j).$$

Bemerkung 6.6 Mit dem Riemann-Stieltjes Integral läßt sich die kumulierte Hazard-Funktion wie folgt schreiben:

$$\Lambda(t) = \int_0^t d\Lambda(u) = \int_0^t \lambda(u)du + \sum_{t_j \leq t} \lambda(t_j).$$

6.4 Zensierte Daten (Rechtszensur)

Beobachtet man Objekte bis zum Zeitpunkt des Eintretens von bestimmten Ereignissen, so kann es zu sog. Zensierungen kommen. Im Folgenden wird nur auf Rechtszensur eingegangen, da diese bei den später thematisierten Ermüdungsversuchen auftreten kann.

Man unterscheidet zwischen verschieden Zensurtypen:

Typ-I-Rechtszensur Wird ein Versuch vor dem Eintreten des Ereignisses bei allen Objekten zu einer vorher festgelegten Zeit beendet, so spricht man von Typ-I-Rechtszensur.

Typ-II-Rechtszensur Stehen n Objekte zur Beobachtung und wird der Versuch nach dem Eintreten von $k < n$ Ereignissen beendet, die Zahl k wird vor Versuchsbeginn festgelegt, so spricht man von Typ-II-Rechtszensur.

Zufällige Rechtszensur Es kann auch vorkommen, dass die Objekte eines Versuchs durch verschiedene Einflüsse vor dem Beenden des Versuchs nicht mehr unter Beobachtung stehen. Zum Beispiel kann bei einem Ermüdungsversuch die Probe verrutschen und der Versuch muss abgebrochen werden oder die Maschine kann kaputt gehen. Hierbei spricht man von zufälliger Rechtszensur. Es können auch Mischungen aus Typ-I-Rechtszensur und zufälliger Rechtszensur bzw. Typ-II-Rechtszensur und zufälliger Rechtszensur auftreten.

Definition 6.7 *Sei T eine Ausfallzeit mit Verteilungsfunktion F und U eine Zensurzeit. Definiere $X := \min(T, U)$ und $\delta := \mathbb{1}_{\{T \leq U\}}$.*

Bemerkung 6.8 Sind X und δ wie oben, so können die Daten des Versuchs als Paar von Zufallsvariablen (X, δ) geschrieben werden.

6.5 Zählprozess

Diesem Abschnitt liegen die Ausführungen in Fleming, Herrington [12, Kapitel 1] zu Grunde.

Definition 6.9 (Zählprozess) *Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter stochastischer Prozess, mit $N(0) = 0$ und $N(t) < \infty$, f.s. Sind dessen Pfade mit Wahrscheinlichkeit eins rechtsstetig und stückweise konstant, mit Sprüngen von $+1$ an den Unstetigkeitsstellen, so nennt man $\{N(t) : t \geq 0\}$ einen Zählprozess.*

Beispiel 6.10 Sei T_i eine Ausfallzeit und U_i eine Zensurzeit. Sei $X_i := T_i \wedge U_i$ und $\delta_i := \mathbb{1}_{\{T_i \leq U_i\}}$. Die Prozesse $N_i(t) := \mathbb{1}_{\{X_i \leq t, \delta_i = 1\}}$ sind Null, bis Objekt i ausfällt und springen dann auf 1. Also ist N_i ein Zählprozess.
Der Prozess $N(t) := \sum_{i=1}^n N_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq t, \delta_i\}}$ ist ebenfalls ein Zählprozess.

Bemerkung 6.11 Seien T, U unabhängige Ausfall- und Zensurzeiten. Seien X und δ wie in Definition 6.7, $F = P(T \leq t)$, S wie in Definition 6.1 und λ wie in Definition 6.3. Da T und U unabhängig sind gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t \, P(T \geq t)} \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t, U \geq t)\end{aligned}$$

und somit

$$P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t, U \geq t) \overset{\text{Taylor}}{=} \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Sei $N(t-) := \lim_{s \uparrow t} N(s)$ und $dN(t) := N\big((t + \Delta t) -\big) - N(t-)$, dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(t)\Delta t &\approx P\Big(N\big((t + \Delta t) -\big) - N(t-) = 1 \big| T \geq t, U \geq t\Big) \\ &= P\big(dN(t) = 1 \big| T \geq t, U \geq t\big).\end{aligned}$$

Da $dN(t)$ eine $0, 1$ wertige Zufallsvariable ist, ist

$$\begin{aligned}\lambda(t)\Delta t &\approx E\Big(N\big((t + \Delta t) -\big) - N(t-) = 1 \big| T \geq t, U \geq t\Big) \\ &= E\big(dN(t) = 1 \big| T \geq t, U \geq t\big).\end{aligned}$$

Die Hazard-Funktion λ gibt also die bedingte durchschnittliche Änderung von N im Intervall $[t, t + \Delta t)$ gegeben, dass die Ausfalls- und Zensurzeit größer oder gleich t ist an und gibt so indirekt die bedingte Rate an, für die N in kleinen Intervallen springt.

Der Prozess $A := \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \geq u\}} \lambda(u) du$ ist für jedes feste t eine Zufallsvariable, welche die Anzahl der Sprünge von N im Intervall $(0, t]$ approximiert, da:

$$
\begin{aligned}
E\big(N(t)\big) &= P(X \leq t, \delta = 1) \\
&= P(T \leq t, T \leq U) \\
&\underset{\text{unabhängig}}{\overset{T,U}{=}} \int_0^t P(U \geq u) dF(u) \\
&= \int_0^t P(U \geq u) S(u) \frac{f(u)}{S(u)} du \\
&\overset{6.2}{=} \int_0^t P(U \geq u) P(T \geq u) \lambda(u) du \\
&\underset{\text{unabhängig}}{\overset{T,U}{=}} \int_0^t P(U \geq u, T \geq u) \lambda(u) du \\
&= \int_0^t P(X \geq u) \lambda(u) du \\
&= E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \geq u\}} \lambda(u) du \Big) \\
&= E\big(A(t)\big).
\end{aligned}
$$

Also hat der Prozess $M = N - A$ den Erwartungswert Null.

7 Das Martingal $M = N - A$

Dieser Abschnitt basiert auf den Ausführungen in Fleming, Herrington [12, Kapitel 1]

Satz 7.1 *Sei $\{N(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein an eine rechtsstetige Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ adaptierter Zählprozess, mit $E\big(N(t)\big) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert ein eindeutiger wachsender rechtsstetiger vorhersagbarer Prozess A, so dass $A(0) = 0$ f.ü., $E\big(A(t)\big) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\{M(t) = N(t) - A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges $\mathcal{F}_t$-Martingal ist.*

Beweis Da N ein adaptierter Zählprozess ist und $E\big(N(t)\big) < \infty$, für alle t, ist N ein wachsender Prozess und damit nach Satz 5.26*i.* ein Submartingal der Klasse

(DL). Weiter ist N rechtsstetig. Also existiert nach Satz 5.27 (Doob-Meyer Zerlegung) ein eindeutiger wachsender rechtsstetiger vorhersagbarer Prozess A, so dass $A(0) = 0$ f.ü., $E\big(A(t)\big) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\{M(t) = N(t) - A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetiges $\mathcal{F}_t$-Martingal ist.

Satz 7.2 *Sei T eine stetige Zufallsvariable und U die Zensur-Zeit, mit beliebiger Verteilung und Λ die kumulierte Hazardfunktion von T. Definiere*

$$\begin{aligned} N(t) &:= \mathbb{1}_{\{X \le t, \delta = 1\}}, \\ N^U(t) &:= \mathbb{1}_{\{X \le t, \delta = 0\}}, \\ \mathcal{F}_t &= \sigma(N(u), N^U(u) : 0 \le u \le t). \end{aligned}$$

Der Prozess $M(t) = N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du$ ist genau dann ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_t$, wenn

$$\lambda(t) = \frac{-\frac{\partial}{\partial u} P(T \ge u, U \ge t)|_{u=t}}{P(T \ge t, U \ge t)}, \tag{18}$$

mit $P(X > t) > 0$.

Beweis $\mathcal{F}_t$ ist eine Filtration, da für $s < t$: $\sigma(N(u), N^U(u) : 0 \le u \le s) \subset \sigma(N(u), N^U(u) : 0 \le u \le t)$.

Weiter ist zu zeigen: *i.* $M(t)$ ist an $\mathcal{F}_t$ adaptiert, da $N(t)$ und $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du$ $\mathcal{F}_t$-messbar sind.

ii. Es ist zu zeigen, dass $E(|M(t)|) < \infty$, für alle $t > 0$.

$$\begin{aligned} E(|M(t)|) &= E\Big(|N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du|\Big) \\ &\le E\Big(|\underbrace{N(t)}_{\ge 0}| + \underbrace{|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du\,|}_{\ge 0}\Big) \\ &= E\big(N(t)\big) + E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du\Big) \\ &\le 1 + \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} \lambda(u) du \, dP \\ &= 1 + \int_0^t P(X \ge u) \lambda(u) du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 1 + \int_0^t P(T \geq u)\lambda(u)du \\
&\overset{6.2}{=} \quad 1 + \int_0^t P(T \geq u)\frac{f(u)}{S(u)}du \\
&\underset{\text{stetig}}{\overset{T}{=}} \quad 1 + \int_0^t \frac{S(u)}{S(u)} f(u)du \\
&= \quad 1 + F(t) \\
&= \quad 1 + 1 - S(t) \\
&\leq \quad 2.
\end{aligned}
$$

Also ist $E(|M(t)|) < \infty$, für alle $t > 0$.

iii. Es bleibt noch zu zeigen, dass $E(M(s)|\mathcal{F}_t) = M(t)$, für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s < t$.

$$
\begin{aligned}
E(M(s)|\mathcal{F}_t) &= E\big(N(s) - \int_0^s \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du\big|\mathcal{F}_t\big) \\
&= E\big(N(s) + N(t) - N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du - \int_t^s \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du\big|\mathcal{F}_t\big) \\
&= N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du + E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) - E\big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du\big|\mathcal{F}_t\big).
\end{aligned}
$$

Um den Beweis zu vervollständigen muss nun gezeigt werden, dass genau dann wenn für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s > t$

$$
E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) = E\big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X \geq u\}}\lambda(u)du\big|\mathcal{F}_t\big), \tag{19}
$$

wenn (18) gilt. Nach Voraussetzung gilt:

$$
E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) = E\big(\mathbb{1}_{\{t < X \leq s, \delta = 1\}}\big|N(u), N^U(u) : 0 \leq u \leq t\big). \tag{20}
$$

Ist weder N noch N^U zur Zeit t oder früher gesprungen und $\mathbb{1}_{\{t<X\leq s,\delta=1\}} = 0$, so muss der bedingte Erwartungswert in Gleichung (20) auf der Menge $\{X \leq t\}$ gleich 0 sein. Da $\{N(u) = N^U(u) = 0 : 0 \leq u \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ muss nach der Definition des bedingten Erwartungswertes, auf der Menge $\{N(u) = N^U(u) = 0 : 0 \leq u \leq t\} = \{X > t\}$ der bedingte Erwartungswert in (20) eine Konstante k sein. Also

$$
\begin{aligned}
kP(X > t) &= \int_{\{X>t\}} kdP = \int_{\{X>t\}} \mathbb{1}_{\{t<X\leq s,\delta=1\}}dP \\
&= P(t < X \leq s, \delta = 1).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass $k = P(t < X \leq s, \delta = 1 \big| X > t)$. Zusammen mit (18) folgt:

$$\begin{aligned} E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) &= \mathbb{1}_{\{X>t\}} P\big(t < X \leq s, \delta = 1 \big| X > t\big) \\ &= \mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{P\big(t < X \leq s, \delta = 1\big)}{P\big(X > t\big)} \end{aligned}$$

Auf der Menge $\{X \leq t\}$ ist die rechte Seite der Gleichung (19) gleich 0. Da $\int_t^s \mathbb{1}_{\{X>u\}} \lambda(u) du$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist, muss auf der Menge $\{X > t\}$ der bedingte Erwartungswert $E\big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X>u\}} \lambda(u) du \big| \mathcal{F}_t\big)$ eine Konstante l sein und somit:

$$\begin{aligned} lP(X > t) &= \int_{\{X>t\}} l dP = \int_{\{X>t\}} \int_t^s \mathbb{1}_{\{X \geq u\}} \lambda(u) du \; dP \\ &= \int_t^s \int_{\{X>t\}} \mathbb{1}_{\{X \geq u\}} dP \; \lambda(u) du = \int_t^s P(\{X \geq u\}) \lambda(u) du. \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung (19) äquivalent zu

$$\mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{P(t < X \leq s, \delta = 1)}{P(X > t)} = \mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{\int_t^s P(X \geq u) \lambda(u) du}{P(X > t)}, \text{ f.ü..} \tag{21}$$

Ist $P(X > t) = 0$, so ist $\mathbb{1}_{\{X>t\}} = 0$ f.ü. und die obige Gleichung ist erfüllt. Ist $P(X > t) > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} P(t < X \leq s, \delta = 1) &= P(t < T \leq s, T \leq U) \\ &= \int_t^s \Big(- \frac{\partial}{\partial v} P(T \geq v, U \geq u) \big|_{v=u} \Big) du \\ &= \int_t^s P(X \geq u) \frac{-\frac{\partial}{\partial v} P(T \geq v, U \geq u)|_{v=u}}{P(T \geq u, U \geq u)} du. \end{aligned}$$

Also ist $M(t)$ genau dann ein Martingal, wenn $\lambda(t) = \frac{-\frac{\partial}{\partial u} P(T \geq u, U \geq t)|_{u=t}}{P(T \geq t, U \geq t)}$, wenn $P(X > t) > 0$.

Satz 7.2 kann verallgemeinert werden für Lebenszeiten T, die stetig oder diskret verteilt sind oder eine Mischung aus stetiger und diskreter Verteilung. Betrachte zuerst:

Satz 7.3 *Sei T eine Zufallsvariable mit beliebiger Verteilungsfunktion $F(t) = P(T \leq t)$. Dann läßt sich die kumulierte Hazardfunktion Λ von T schreiben als*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{dF(u)}{1 - F(u-)}.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\overset{6.6}{=} \int_0^t \lambda(u)du + \sum_{t_j \le t} \lambda(t_j) \\
&\overset{6.3}{=} \int_0^t \lim_{\Delta u \downarrow 0} \frac{P(t \le T < u + \Delta u | T \ge u)}{\Delta u} du + \sum_{t_j \le t} P(T = t_j | T \ge t_j) \\
&= \int_0^t \lim_{\Delta u \downarrow 0} \frac{P(u \le T < u + \Delta u)}{P(T \ge u)\Delta u} du + \sum_{t_j \le t} \frac{P(T = t_j)}{P(T \ge t_j)} \\
&= \int_0^t \frac{1}{1 - P(T < u)} \lim_{\Delta u \downarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} du + \sum_{t_j \le t} \frac{P(T = t_j)}{1 - P(T < t_j)} \\
&= \int_0^t \frac{1}{1 - P(T < u)} f(u)du + \sum_{t_j \le t} \frac{P(T = t_j)}{1 - P(T < t_j)} \\
&= \int_0^t \frac{1}{1 - F(u-)} dF(u).
\end{aligned}$$

Satz 7.4 *Sei T eine Ausfallzeit und U die Zensur-Zeit und Λ die kumulierte Hazardfunktion von T. Seien X und δ wie in Definition 6.7 und N, N^U sowie $\mathcal{F}_t$ wie in Satz 7.2 definiert.*

Der Prozess $M(t) = N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} d\Lambda(u)$ ist genau dann ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_t$, wenn

$$\frac{dF(z)}{1 - F(z-)} = \frac{-dP(T \ge z, U \ge T)}{P(T \ge z, U \ge z)}, \tag{22}$$

für alle z, mit $P(X \ge z, U \ge z) > 0$.

Beweis Bis zu Gleichung (25) geht der Beweis analog zu dem von Satz 7.2.

i. $M(t)$ ist an $\mathcal{F}_t$ adaptiert, da $N(t)$ und $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} d\Lambda(u)$ $\mathcal{F}_t$-messbar sind.

ii. Weiter ist zu zeigen, dass $E(|M(t)|) < \infty$, für alle $t > 0$.

$$\begin{aligned}
E(|M(t)|) &= E\big(|N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} d\Lambda(u)|\big) \\
&\le E\big(|\underbrace{N(t)}_{\ge 0}| + |\underbrace{\int_0^t \mathbb{1}_{\{X \ge u\}} d\Lambda(u)}_{\ge 0}|\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\big(N(t)\big) + E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\Big)\\
&\leq 1 + \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\ dP\\
&= 1 + \int_0^t P(X\geq u)d\Lambda(u)\\
&\leq 1 + \int_0^t P(T\geq u)d\Lambda(u)\\
&= 1 + \int_0^t \frac{P(T\geq u)}{1-F(u-)}dF(u)\\
&= 1 + \int_0^t \frac{1-F(u-)}{1-F(u-)}dF(u)\\
&= 1 + F(t)\\
&= 1 + 1 - S(t)\\
&\leq 2.
\end{aligned}
$$

Also ist $E(|M(t)|) < \infty$, für alle $t > 0$.

iii. Es bleibt noch zu zeigen, dass $E(M(s)|\mathcal{F}_t) = M(t)$, für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s < t$.

$$
E(M(s)|\mathcal{F}_t) = E\big(N(s) - \int_0^s \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\big|\mathcal{F}_t\big)
$$

$$
= E\big(N(s) + N(t) - N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u) - \int_t^s \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\big|\mathcal{F}_t\big)
$$

$$
= N(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u) + E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) - E\Big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\big|\mathcal{F}_t\Big).
$$

Um den Beweis zu vervollständigen muss nun gezeigt werden, dass genau dann wenn für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, mit $s > t$

$$
E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) = E\Big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\big|\mathcal{F}_t\Big), \tag{23}
$$

wenn (22) gilt. Nach Voraussetzung gilt:

$$
E\big(N(s) - N(t)\big|\mathcal{F}_t\big) = E\big(\mathbb{1}_{\{t<X\leq s,\delta=1\}}\big|N(u), N^U(u) : 0 \leq u \leq t\big). \tag{24}
$$

Ist weder N noch N^U zur Zeit t oder früher gesprungen und $\mathbb{1}_{\{t<X\leq s,\delta=1\}} = 0$, so muss der bedingte Erwartungswert in Gleichung (24) auf der Menge $\{X \leq t\}$ gleich 0 sein. Nach der Definition des bedingten Erwartungswertes, muss auf

der Menge $\{N(u) = N^U(u) = 0 : 0 \leq u \leq t\} = \{X > t\}$ der bedingte Erwartungswert in (24) eine Konstante k sein. Also

$$\begin{aligned} kP(X > t) &= \int_{\{X>t\}} k dP = \int_{\{X>t\}} \mathbb{1}_{\{t<X\leq s, \delta=1\}} dP \\ &= P(t < X \leq s, \delta = 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $k = P(t < X \leq s, \delta = 1 \big| X > t)$. Zusammen mit (22) folgt:

$$\begin{aligned} E\big(N(s) - N(t) \big| \mathcal{F}_t\big) &= \mathbb{1}_{\{X>t\}} P\big(t < X \leq s, \delta = 1 \big| X > t\big) \\ &= \mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{P\big(t < X \leq s, \delta = 1\big)}{P\big(X > t\big)} \end{aligned}$$

Auf der Menge $\{X \leq t\}$ ist die rechte Seite der Gleichung (23) gleich 0. Da $\int_t^s \mathbb{1}_{\{X>u\}} d\Lambda(u)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist, muss auf der Menge $\{X > t\}$ der bedingte Erwartungswert $E\big(\int_t^s \mathbb{1}_{\{X>u\}} d\Lambda(u) \big| \mathcal{F}_t\big)$ eine Konstante l sein und somit:

$$\begin{aligned} lP(X > t) &= \int_{\{X>t\}} l dP = \int_{\{X>t\}} \int_t^s \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} d\Lambda(u)\ dP \\ &= \int_t^s \int_{\{X>t\}} \mathbb{1}_{\{X\geq u\}} dP\ d\Lambda(u) = \int_t^s P(\{X \geq u\}) d\Lambda(u). \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung (23) äquivalent zu

$$\mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{P(t < X \leq s, \delta = 1)}{P(X > t)} = \mathbb{1}_{\{X>t\}} \frac{\int_t^s P(X \geq u) d\Lambda(u)}{P(X > t)}, \text{ f.ü..} \tag{25}$$

Ist $P(X > t) = 0$, so ist $\mathbb{1}_{\{X>t\}} = 0$ f.ü. und die obige Gleichung ist erfüllt. Ist $P(X > t) > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} P(t < X \leq s, \delta = 1) &= P(t < T \leq s, T \leq U) \\ &= \int_{z=t}^s -dP(T \geq z, U \geq T) \\ &= \int_t^s -P(X \geq z) \frac{dP(T \geq z, U \geq T)}{P(T \geq z, U \geq z)}. \end{aligned}$$

Also ist $M(t)$ genau dann ein Martingal, wenn $\frac{dF(z)}{1-F(z-)} = \frac{-dP(T\geq z, U\geq T)}{P(T\geq z, U\geq z)}$, für alle z, sodass $P(X \geq z, U \geq z) > 0$.

Lemma 7.5 *Seien die Paare (T_i, U_i), $i = 1, \ldots, n$ unabhängig und gleichverteilt, wobei jedes Paar die Gleichung (22) in Satz 7.4 erfüllt. Sei $X_i = \min(T_i, U_i)$ und $\delta_i = \mathbb{1}_{\{X_i=T_i\}}$, $N_i(t) = \mathbb{1}_{\{X_i\leq t, \delta_i=1\}}$ und $N_i^U = \mathbb{1}_{\{X_i\leq t, \delta=0\}}$, dann ist der Prozess $M_i = N_i - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_i\geq u\}} d\Lambda_i(u)$ ein Martingal bezüglich der Filtration*

$$\mathcal{F}_t^n := \sigma\big(\{N_i(u), N_i^U(u), 0 \leq u \leq t\}, i = 1, \ldots, n\big).$$

Beweis Nach Satz 7.4 ist M_i ein $\{\mathcal{F}_t^{(i)}\}$-Martingal, wobei $\mathcal{F}_t^{(i)} = \sigma\big(N_i(u), N_i^U(u) : 0 \leq u \leq t\big)$. Damit ist M_i $\mathcal{F}_t^n$- adaptiert und $E\big(|M_i|\big) < \infty$. Also bleibt noch zu zeigen, dass $E\big(M_i(s)\big|\mathcal{F}_t^n\big) = M_i(t)$, für $s > t$. Da die T_i und U_i unabhängig sind und M_i $\mathcal{F}_t^{(i)}$-messbar ist gilt nach Satz A.6:

$$E\big(M_i(s)\big|\mathcal{F}_t^n\big) \overset{A.6}{=} E\big(M_i(s)\big|\mathcal{F}_t^{(i)}\big) \overset{7.4}{=} M_i(t)\,, \quad \text{für } s > t.$$

Lemma 7.6 *Sei $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein rechtsstetige Filtration. Angenommen $B \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ist ein vorhersagbares Rechteck der Form*

$$\{0\} \times A, \qquad A \in \mathcal{F}_0$$

oder

$$(a, b] \times A, \qquad A \in \mathcal{F}_a.$$

Sei M ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, mit $E\big(|\int_0^t dM(s)|\big) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $\Delta M(0) = 0$. Dann ist der Prozess

$$L(t) := \int_0^t \mathbb{1}_B(s) dM(s)$$

ein $\mathcal{F}_t$-Martingal.

Beweis Da $\Delta M(0) = 0$, ist die Behauptung für $B = [0] \times A, A \in \mathcal{F}_0$ richtig. Aus den Voraussetzungen des Lemma folgt, dass $E\big(|L(t)|\big) < \infty$. Ist $B = [0] \times A,\ A \in \mathcal{F}_0$, dann ist $L(t)$ $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Ist $B = (a, b] \times A,\ A \in \mathcal{F}_a$, dann ist L adaptiert, da für $t \leq a$ und $t > b$: $L(t) \in \mathcal{F}_t$ und für $a < t \leq b$ gilt: $L(t) = \int_0^t dM(s) = M(t)$. Da M ein Martingal ist, ist damit $L(t)$ $\mathcal{F}_t$-messbar. Betrachte nun:

$$L(t + s) = \int_0^{t+s} \mathbb{1}_B(u) dM(u) = \int_0^t \mathbb{1}_B(u) dM(u) + \int_t^{t+s} \mathbb{1}_B(u) dM(u).$$

Um zu zeigen, dass L für $B = (a, b] \times A,\ A \in \mathcal{F}_a$ ein Martingal ist, reicht es zu zeigen, dass

$$E\Big(\int_t^{t+s} \mathbb{1}_B(u) dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big) = 0.$$

Betrachte zuerst den Fall, dass $a \leq t$. Dann ist $A \in \mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_t$ und

$$E\Big(\int_t^{t+s} \mathbb{1}_B(u) dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big) = E\big(\mathbb{1}_A (M((t + s) \wedge b) - M(t \wedge b))\big|\mathcal{F}_t\big)$$
$$= \mathbb{1}_A E\big(M((t + s) \wedge b) - M(t \wedge b)\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathbb{1}_A (M(t \wedge b) - M(t \wedge b)) = 0.$$

Ist $t < a$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&E\Big(\int_t^{t+s} \mathbb{1}_B(u)dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big)\\
&= E\big(\mathbb{1}_A(M((t+s)\wedge b) - M(t\wedge b))\big|\mathcal{F}_t\big)\\
&= E\big(\mathbb{1}_A(M((t+s)\wedge b) - M((t+s)\wedge a))\big|\mathcal{F}_t\big)\\
&= E\big(\mathbb{1}_A(E\big(M((t+s)\wedge b) - M((t+s)\wedge a)\big|\mathcal{F}_a\big)\big|\mathcal{F}_t\big)\\
&= E\big(\mathbb{1}_A(M((t+s)\wedge a) - M((t+s)\wedge a))\big|\mathcal{F}_t\big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Das folgende Lemma ist eine Folgerung des Satz über monotone Klassen. Ein Beweis findet sich z.B. in [12, Anhang 1]

Lemma 7.7 *Sei D_0 eine Menge und S eine Klasse von Teilmengen von D_0, abgeschlossen unter endlicher Durchschnittsbildung. Sei $\mathcal{H}$ ein Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf D_0, so dass*

i. $\mathcal{H}$ alle konstanten Funktionen enthält und $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$, für alle $A \in S$.

ii. Ist $\{X_n : n \geq 0\}$ eine wachsende Folge nicht negativer Funktionen in $\mathcal{H}$, so dass $\sup_n X_n$ beschränkt ist, dann ist $\sup_n X_n \in \mathcal{H}$.

Dann enthält $\mathcal{H}$ alle reellwertigen, bezüglich $\sigma(S)$ messbaren Abbildungen.

Satz 7.8 *Sei N ein Zählprozess mit $E\big(N(t)\big) < \infty$, für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Sei $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ eine rechtsstetige Filtration, so dass*

i. $M = N - A$ ein $\mathcal{F}_t$-Martingal ist, wobei $A = \{A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein wachsender $\mathcal{F}_t$-vorhersagbarer Prozess mit $A(0) = 0$ ist,

ii. H ein beschränkter $\mathcal{F}_t$-vorhersagbarer Prozess ist.

Dann ist der Prozess $L(t) := \int_0^t H(u)dM(u)$ ein $\mathcal{F}_t$-Martingal.

Beweis Bezeichne S die Klasse messbarer Rechtecke

$$\begin{aligned}
\{0\}\times A, \qquad & A \in \mathcal{F}_0,\\
(a,b]\times A, \qquad & A \in \mathcal{F}_a,
\end{aligned}$$

zusammen mit der leeren Menge $\emptyset$. Dann ist S abgeschlossen unter endlicher Durchschnittsbildung. Bezeichne $\mathcal{H}$ den Vektorraum der beschränkten, messbaren und adaptierten Prozesse H, so dass $\int HdM$ ein Martingal ist. Dann enthält $\mathcal{H}$ alle konstanten Funktionen und nach Lemma 7.6 enthält $\mathcal{H}$ auch $\mathbb{1}_B$, für $B \in S$.

Sei nun $H_n, n \in \mathbb{N}$ eine wachsende Folge von Abbildungen von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ nach $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$, so dass $\sup_n H_n = H$ f.ü. beschränkt ist. Dann ist zu zeigen , dass $\int HdM$ ein Martingal ist.

Für alle t gilt: $E\big(|\int_0^t H(u)dM(u)|\big) < \infty$.

Jeder Prozess $\int H_n dM$ ist ein Martingal und damit ein adaptierter Prozess. Da $H = \sup_n H_n$ und $\int_0^t H_n(u)dM(u)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist, ist auch $\int_0^t H(u)dM(u)$ $\mathcal{F}_t$-messbar.

Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
E\Big(\int_0^{t+s} H(u)dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big) &= E\Big(\int_0^{t+s} \lim_{n\to\infty} H_n(u)dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big) \\
\underset{\text{Beppo Levi}}{\overset{\text{Satz von}}{=}} \lim_{n\to\infty} E\Big(\int_0^{t+s} H_n(u)dM(u)\big|\mathcal{F}_t\Big) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_n(u)dM(u) \\
\underset{\text{Beppo Levi}}{\overset{\text{Satz von}}{=}} \int_0^t \lim_{n\to\infty} H_n(u)dM(u) &= \int_0^t H(u)dM(u).
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 7.7 folgt nun die Behauptung.

Satz 7.9 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Angenommen*

i. H_i ist ein beschränkter $\mathcal{F}_t$-vorhersagbarer Prozess.

ii. N_i ist ein beschränkter Zahlprozess.

iii. Für das $\mathcal{F}_t$-Martingal $M_i = N_i - A_i$ gilt $E\big(M_i^2(t)\big) < \infty$, für alle t, wobei A_i der Kompensator aus Satz 7.1 ist.

Dann gilt:

$$
\Big\langle \int H_1 dM_1, \int H_2 dM_2 \Big\rangle = \int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle. \tag{26}
$$

Beweis (Skizze) ein ausführlicher Beweis findet sich in [12, S. 67ff.].
Nach Satz 7.8 ist $\int H_i dM_i$ ein Martingal. Da H_i und N_i beschränkt sind ist

$$
E\Big(\int_0^t H_i dM_i\Big)^2 < \infty.
$$

Also existiert $\langle \int H_1 dM_1, \int H_2 dM_2\rangle$ nach Satz 5.31 und Definition 5.32 und ist eindeutig. Um (26) zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass $\{L(t) : t \geq 0\}$ ein Martingal ist. Wobei:

$$
L(t) = \int_0^t H_1 dM_1 \int_0^t H_2 dM_2 - \int_0^t H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle.
$$

Für $i = 1, 2$ sei B_i ein vorhersagbares Rechteck der Form

$$\{0\} \times A_i\,, \quad A_i \in \mathcal{F}_0$$

oder

$$(a_i, b_i] \times A_i\,, \quad A_i \in \mathcal{F}_a$$

und $H_i = \mathbb{1}_{B_i}$. Dann ist L ein Martingal. Unter Benutzung des Satzes über monotone Klassen kann dies auf beschränkte vorhersagbare H_i ausgeweitet werden. Bezeichne $\mathcal{H}_*$ den Vektorraum der beschränkten messbaren Prozesse H, so dass

$$L = \int H dM_1 \int \mathbb{1}_B dM_2 - \int H \mathbb{1}_B d\langle M_1, M_2\rangle$$

ein Martingal ist, wobei $\mathbb{1}_B$ ein fester einfacher vorhersagbarer Prozess ist. Sei H_n, $n = 1, 2, \ldots$ eine wachsende Folge von Abbildungen von $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ nach $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}_*$, so dass $\sup_n H_n(t, \omega) = H(t, \omega)$ beschränkt ist auf einer Menge mit der Wahrscheinlichkeit 1. Dann enthält $\mathcal{H}$ alle beschränkten $\mathcal{F}_t$-vorhersagbaren Prozesse.
Sei H_1 ein beschränkter $\mathcal{F}_t$-vorhersagbarer Prozess und $\mathcal{H}'$ der Vektorraum der beschränkten messbaren Prozesse H_2, so dass

$$L' = \int H_1 dM_1 \int H_2 dM_2 - \int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle$$

ein Martingal ist. $\mathcal{H}'$ einhält die einfachen vorhersagbaren Prozesse $H_2 = \mathbb{1}_B$. Nach dem Satz über monotone Klassen enthält $\mathcal{H}'$ auch alle beschränkten $\mathcal{F}_t$-vorhersagbaren Prozesse.

Satz 7.10 *Sei N ein Zählprozess und $M = N - A$ das entsprechende lokal quadratisch integrierbare Martingal. Angenommen H sei ein adaptierter und lokal beschränkter Prozess. Dann gilt für alle Stoppzeiten T, mit $T < \infty$ f.ü. und alle $\varepsilon, \eta > 0$, dass*

$$P\Big(\sup_{t \leq T} \big(\int_0^t H(s) dM(s)\big)^2 \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\eta}{\varepsilon} + P\Big(\int_0^T H^2 d\langle M, M\rangle(s) \geq \eta\Big).$$

Beweis Sei $(\tau_k : k \in \mathbb{N})$ eine lokalisierende Folge, so dass für alle k, $N(\cdot \wedge \tau_k)$, $A(\cdot \wedge \tau_k)$ und $H(\cdot \wedge \tau_k)$ durch k beschränkte Prozesse sind und $M(\cdot \wedge \tau_k)$ ein quadratisch integrierbares Martingal ist.
Nach Satz 7.8 ist $\int_0^t H(u) dM(u)$ ein Martingal und mit Satz 5.23 (Optional Stopping Theorem) ist $\int_0^{t \wedge \tau_k \wedge T} H(u) dM(u)$ ein Martigal. Nach Definition 5.32, Satz

5.30 und Lemma 5.6*i.* gilt:

$$E\Big(\Big(\int_0^{t\wedge\tau_k\wedge T} H(s)dM(s)\Big)^2 \\ - \Big\langle \int_0^{t\wedge\tau_k\wedge T} H(s)dM(s), \int_0^{t\wedge\tau_k} H(s)dM(s)\Big\rangle\Big) = 0. \quad (27)$$

Sei $X_k(t) := \Big(\int_0^{t\wedge\tau_k} H(s)dM(s)\Big)^2$ und $Y_k(t) := \int_0^{t\wedge\tau_k} H^2(s)d\langle M,M\rangle(s)$. Dann folgt aus (27) mit Satz 7.9:

$$E\big(X_k(t\wedge T) - Y_k(t\wedge T)\big) = 0. \quad (28)$$

Für $t \to \infty$ gilt $X_k(t\wedge T) \to X_k(T)$ f.ü.. Da $H(\cdot,\tau_k)$ durch k beschränkt ist und $M(\cdot,\tau_k)$ quadratisch integrierbar ist, folgt mit dem Satz von Lebesgue (Satz A.2), dass $E\big(X_k(t\wedge T)\big) \to E\big(X_k(T)\big)$ und $E\big(X_k(T)\big) < \infty$. Für $t \to \infty$ gilt $Y_k(t\wedge T) \uparrow Y_k(T)$, also gilt mit dem Satz von Beppo Levi (Satz A.4), dass $E\big(Y_k(t\wedge T)\big) \to E\big(Y_k(T)\big)$ und $E\big(Y_k(T)\big) < \infty$. Somit folgt aus (28), dass $E\big(X_k(T)\big) = E\big(Y_k(T)\big)$, für alle k.
Nun kann Lenglards Ungleichung (Satz A.5) angewendet werden und es folgt

$$P_{1k} = P\Big(\sup_{t\leq T}\big(\int_0^{t\wedge\tau_k} H(s)dM(s)\big)^2 \geq \varepsilon\Big) \\ \leq \frac{\eta}{\varepsilon} + P\Big(\int_0^{T\wedge\tau_k} H^2(s)d\langle M,M\rangle(s) \geq \eta\Big) = \frac{\eta}{\varepsilon}P_{2k}.$$

Nach der Definition 5.1 gilt $\lim_{k\to\infty} = \infty$ f.ü., somit folgt mit dem Satz von Beppo Levi, für $k \to \infty$:

$$P_{2k} \to P\Big(\int_0^{T} H^2(s)d\langle M,M\rangle(s) \geq \eta\Big) = P_2.$$

Also gilt $P_{1k} \leq \frac{\eta}{\varepsilon} + P_2$, für alle k. Somit kann der Satz von Lebesgue angewendet werden und erhält für $k \to \infty$:

$$P_{1k} \to P\Big(\sup_{t\leq T}\big(\int_0^{t} H(s)dM(s)\big)^2 \geq \varepsilon\Big).$$

Damit folgt die Behauptung.

8 Nelson-Aalen Schätzer

Der folgende Abschnitt basiert auf den Ausführungen in [12, Kapitel 3, S. 89ff.] In diesem Abschnitt wird das Random Censorship Model benutzt. Wie in Abschnitt 6.4 angeführt, ist die zufällige Typ-I-Rechtszensur die Art von Zensur, die bei Ermüdungsversuchen auftritt.

Definition 8.1 (Random Censorship Model) *Das Random Censorship Model besteht aus den geordneten Paaren (T_j, U_j), $j = 1, \dots, n$ von unabhängigen endlichen Ausfalls- und Zensurzeiten, die die Gleichung (22) in Satz 7.4 erfüllen. Sei*

$$X_j := T_j \wedge U_j$$

und

$$\delta_j := \mathbb{1}_{\{X_j = T_j\}}.$$

Die zugrunde liegenden Verteilungsfunktionen sind:

$$\begin{aligned} F(t) &:= P(T_j \leq t), \\ S(t) &:= 1 - F(t) = P(T_j > t), \\ C_j(t) &:= P(U_j > t), \\ L_j(t) &:= 1 - C_j(t) \end{aligned}$$

und sei

$$\pi_j(t) := P(X_j \geq t).$$

Ferner seien:

$N_j(t) := \mathbb{1}_{\{X_j \leq t, \delta_j = 1\}}$		Indikatorfunktion beobachtete Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$,
$\overline{N} := \sum_{j=1}^n N_j(t)$	$= \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j \leq t, \delta_j = 1\}}$,	Anzahl der beobachteten Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$,
$N_j^U(t) := \mathbb{1}_{\{X_j \leq t, \delta_j = 0\}}$		Indikatorfunktion zensierte Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$,
$Y_j(t) := \mathbb{1}_{\{X_j \geq t\}}$		Indikatorfunktion Objekte, die im Zeitintervall $[0, t]$ unter Beobachtung stehen,
$\overline{Y}(t) := \sum_{j=1}^n Y_j(t)$	$= \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j \geq t\}}$	Anzahl der Objekte, die im Zeitintervall $[0, t]$ unter Beobachtung stehen,

$$\begin{aligned} M_j(t) &:= N_j(t) - \textstyle\int_0^t Y_j d\Lambda_j(s), \\ M(t) &:= \textstyle\sum_{j=1}^n M_j(t) \\ &= \overline{N}(t) - \textstyle\int_0^t \overline{Y}(s) d\Lambda(s), \end{aligned}$$

wobei

$$\Lambda(t) = \int_0^t (1 - F(s-))^{-1} dF(s).$$

Soweit keine andere Filtration angegeben ist, wird im Weiteren folgende Filtration verwendet:

$$\mathcal{F}_t := \sigma(N_j(s), N_j^U(s) : 0 \leq s \leq t, j = 1, \ldots, n).$$

8.1 Nelson-Aalen Schätzer

Sei $\overline{N}(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t)$, $\overline{Y}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j \geq t\}}$ und $M(t) = \sum_{j=1}^n M_j(t) = \overline{N} - \int_0^t \overline{Y} d\Lambda(s)$. Im Random Censorship Model ist vorausgesetzt, dass Gleichung (22) in Satz 7.4 erfüllt ist, also ist $M_j(t) = N_j(t) - \int_0^t Y_j(s) d\Lambda(s)$ für jedes j ein $\{\mathcal{F}_t^{(j)}\}$-Martingal und nach Lemma 7.5 ein $\{\mathcal{F}_t^n\}$-Martingal, wobei $\mathcal{F}_t^{(j)} = \sigma\big(N_j(u), N_j^U(u) : 0 \leq u \leq t\big)$ und $\mathcal{F}_t^n = \sigma\big(\{N_j(u), N_j^U(u) : 0 \leq u \leq t\big\}, j = 1, \ldots, n)$. Also ist $M(t) = \overline{N} - \int_0^t \overline{Y} d\Lambda(s)$ ein $\{\mathcal{F}_t^n\}$-Martingal. Da der Prozess

$$\frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t)>0\}}}{\overline{Y}(t)} = \begin{cases} \frac{1}{\overline{Y}(t)} & \text{, für } \overline{Y}(t) > 0, \\ 0 & \text{, für } \overline{Y}(t) = 0 \end{cases}$$

ein linksstetiger adaptierter Prozess dessen rechtsseitige Limiten existieren und damit vorhersagbar ist, ist $\{\mathcal{M}(t) : t \geq 0\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &:= \int_0^t \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}}}{\overline{Y}(s)} dM(s) \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^t \frac{d\overline{N}(s)}{\overline{Y}(s)} - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}} d\Lambda(s) \end{aligned}$$

nach Satz 7.8 ein Martingal, wobei (*) gilt, da nach Definition von $\overline{N}$ und $\overline{Y}$ im ersten Integral $\overline{Y}(s) > 0$ ist und damit $\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}}$ weggelassen werden kann. Da $\mathcal{M}(0) = 0$ und der Erwartungswert eines Martingals nach Lemma 5.6 eine Konstante ist, gilt

$$E\Big(\int_0^t \frac{d\overline{N}(s)}{\overline{Y}(s)}\Big) = E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}} d\Lambda(s)\Big). \tag{1}$$

Sei $\Lambda^*(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}} d\Lambda(s)$. Ist $T := \inf(t : \overline{Y}(t) = 0)$, dann ist $\Lambda^*(t) = \int_0^{t\wedge T} d\Lambda(s) = \Lambda(t \wedge T)$. Nach Gleichung (1) kann man erwarten, dass $\hat{\Lambda} := \int_0^t \frac{d\overline{N}(s)}{\overline{Y}(s)}$ ein guter Schätzer für $\Lambda^*(t) = \Lambda(t \wedge T)$ ist.

Satz 8.2 *Im Random Censorship Model sei $t \geq 0$, so dass $\Lambda(t) < \infty$. Dann gilt*

i. $E\big(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda^*(t)\big) = 0$,

ii. $E\big(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(t)\big) = -\int_0^t \big(\prod_{j=1}^n (1 - \pi_j(s))\big) d\Lambda(s)$,

iii. ist $\pi_j(s) = \pi(s)$, für alle j, dann gilt

$$E\big(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(t)\big) = -\int_0^t (1 - \pi(s))^n d\Lambda(s) \geq -(1 - \pi(t))^n \lambda(t).$$

Beweis *i.* Dies folgt aus Gleichung (1).

ii. Aus *i.* folgt, dass

$$\begin{aligned}
E\big(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(t)\big) &= E\big(\Lambda^*(t) - \Lambda(t)\big) \\
&= E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}} d\Lambda(s) - \int_0^t d\Lambda(s)\Big) \\
&= E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)>0\}} d\Lambda(s) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)\geq 0\}} d\Lambda(s)\Big) \\
&= -E\Big(\int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(s)=0\}} d\Lambda(s)\Big) \\
&= -\int_0^t P\big(\overline{Y}(s) = 0\big) d\Lambda(s) \\
&= -\int_0^t \prod_{j=1}^n P\big(Y_j(s) = 0\big) d\Lambda(s) \\
&= -\int_0^t \prod_{j=1}^n \big(1 - P(Y_j(s) = 1)\big) d\Lambda(s) \\
&= -\int_0^t \prod_{j=1}^n \big(1 - P(X_j \geq t)\big) d\Lambda(s) \\
&= -\int_0^t \prod_{j=1}^n \big(1 - \pi_j(s)\big) d\Lambda(s)
\end{aligned}$$

iii. Dies folgt für $\pi_j(s) = \pi(s)$ aus *ii.*

8.2 Konsistenz des Nelson-Aalen Schätzers

Satz 8.3 *Sei T eine Ausfallszeit mit stetiger Verteilungsfunktion $F(s) = P(T \leq s)$ und kumulierter Hazardfunktion $\Lambda(s) = \int_0^s \frac{dF(v)}{1-F(v)}$. Ist $t \in (0, \infty]$, so dass*

$$\overline{Y}(t) \xrightarrow{P} \infty, \text{ für } n \to \infty. \tag{2}$$

Dann gilt:

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \Big| \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} - \Lambda(s) \Big| \xrightarrow{P} 0, \text{ für } n \to \infty. \tag{3}$$

Beweis Sei $M(t) := \overline{N}(t) - \int_0^t \overline{Y}(u) d\Lambda(u)$ und $s \in [0, t]$. Dann gilt, mit der Konvention $\frac{0}{0} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} - \Lambda(s) \Big| &= \Big| \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} - \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) \geq 0\}} d\Lambda(v) \Big| \\
&= \Big| \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) \geq 0\}} d\Lambda(v) - \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} \Big| \\
&= \Big| \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) = 0\}} d\Lambda(v) + \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}} d\Lambda(v) - \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} \Big| \\
&\leq \Big| \int_0^s \frac{d\overline{N}(v)}{\overline{Y}(v)} - \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}} d\Lambda(v) \Big| + \Big| \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) = 0\}} d\Lambda(v) \Big| \\
&= \Big| \int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}}}{\overline{Y}(v)} d\overline{N}(v) - \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}} \frac{\overline{Y}(v)}{\overline{Y}(v)} d\Lambda(v) \Big| + \Big| \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) = 0\}} d\Lambda(v) \Big| \\
&\overset{(*)}{\leq} \Big| \int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}}}{\overline{Y}(v)} d\overline{N}(v) - \int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}} \frac{\overline{Y}(v)}{\overline{Y}(v)} d\Lambda(v) \Big| + \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t) = 0\}} \Lambda(t) \\
&= \Big| \int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}}}{\overline{Y}(v)} dM(v) \Big| + \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t) = 0\}} \Lambda(t),
\end{aligned}$$

wobei $(*)$ gilt, da $\Lambda \geq 0$, $\Lambda(0) = 0$, $s \in [0, t]$ und $\overline{Y}$ eine fallende Treppenfunktion ist, also $\int_0^s \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) = 0\}} d\Lambda(v) \leq \mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t) = 0\}} \Lambda(t)$. Mit der Voraussetzung (2) folgt, dass $\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t) = 0\}} \Lambda(t) \xrightarrow{P} 0$. Somit reicht es aus, zu zeigen, dass

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \Big(\int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v) > 0\}}}{\overline{Y}(v)} dM(v) \Big)^2 \xrightarrow{P} 0.$$

Da $\frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(t)>0\}}}{\overline{Y}(t)}$ $\mathcal{F}_t$-vorhersagbar und lokal beschränkt ist, folgt mit Satz 7.10:

$$\begin{aligned} &P\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big(\int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v)>0\}}}{\overline{Y}(v)}dM(v)\Big)^2 \ge \varepsilon\Big) \\ &\overset{7.10}{\le} \frac{\eta}{\varepsilon} + P\Big(\int_0^s \Big(\frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v)>0\}}}{\overline{Y}(v)}\Big)^2 d\langle M,M\rangle(v) \ge \eta\Big) \\ &\overset{(**)}{=} \frac{\eta}{\varepsilon} + P\Big(\int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v)>0\}}}{\overline{Y}(v)}d\Lambda(v) \ge \eta\Big) \overset{(***)}{\le} \frac{\eta}{\varepsilon} + P\Big(\frac{\Lambda(t)}{\overline{Y}(t)} > \eta\Big), \end{aligned}$$

wobei $(**)$ gilt, da nach Definition 5.32 und Satz 5.30 $d\langle M,M\rangle(v) = \overline{Y}(v)d\Lambda(v)$ und (***), da $\overline{Y}$ eine fallende Treppenfunktion ist, $s \in [0,t]$ und damit $\int_0^s \frac{\mathbb{1}_{\{\overline{Y}(v)>0\}}}{\overline{Y}(v)}d\Lambda(v) \le \frac{\Lambda(t)}{\overline{Y}(t)}$.

Mit der Voraussetzung (2) folgt, dass $P\big(\frac{\Lambda(t)}{\overline{Y}(v)} > \eta\big) \to 0$, für $n \to \infty$, für alle $\eta > 0$ und die Konvergenz des Nelson-Aalen Schätzers ist gezeigt.

Beispiel 8.4 (Ermüdungsversuch) Bei einem Versuch werden Metallproben mit einer bestimmten Frequenz belastet und wieder entlastet. Angenommen die Proben brechen nach D Lastwechseln $t_1 < t_2 < \ldots < t_D$ und bei t_i sind d_i Proben gebrochen. Sei $\overline{Y}_{t_i}$ die Anzahl der verbleibenden Proben im Versuch zur Zeit t_i-. So erhält man für den Nelson-Aalen Schätzer:

$$\hat{\Lambda}(t_i) = \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad t_i \le t_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{d_{t_j}}{\overline{Y}_{t_j}} & \text{, falls} \quad t_1 \le t_i \end{cases}$$

Der Schätzer der Survival Funktion ist definiert durch $\tilde{S}(t_i) = \exp(-\hat{\Lambda}(t_i))$. In Tabelle 1 sind der Nelson-Aalen Schätzer und die Survival Funktion, für den Datensatz R0-355MPa, aufgelistet.

Geht man von einer Exponentialverteilung aus, dann ist die Hazardrate konstant und λ kann aus der Steigung einer Geraden, die durch die geschätzte kumulierte Hazard-Funktion gelegt wird, geschätzt werden. Dies kann durch die Methode der kleinste Quadrate geschätzt werden. Für diesen Datensatz erhält man damit eine Schätzung $\hat{\lambda} = 0.00005199$ oder $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = 19235.07$.

Abbildung 1 zeigt den Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ und eine Gerade durch den Ursprung, mit Steigung $\hat{\lambda} = 0.00005199$. Abbildung 2 zeigt die Survival Funktion $\tilde{S}$.

t_i	d_{t_i}	$\overline{Y}_{t_i}$	$\hat{\Lambda}(t_i)$	$\tilde{S}(t_i)$
4030	1	7	0.143	0.867
4680	1	6	0.31	0.734
4860	1	5	0.51	0.601
5750	1	4	0.76	0.468
7170	1	3	1.093	0.335
34100	1	2	1.593	0.203
51000	1	1	2.593	0.075

Tabelle 1: Nelson-Aalen Schätzer für R0-355MPa

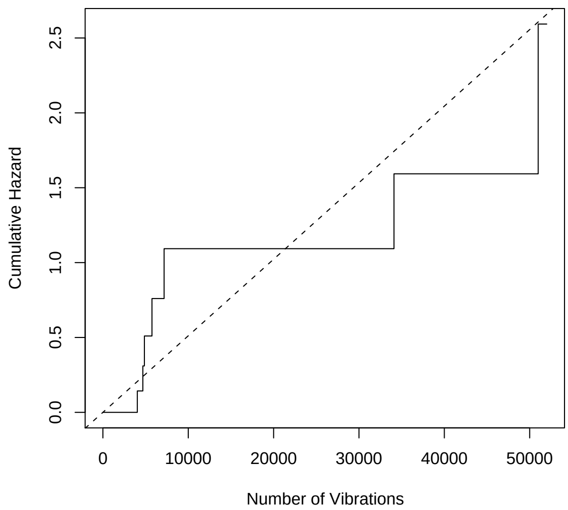

Abbildung 1: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa

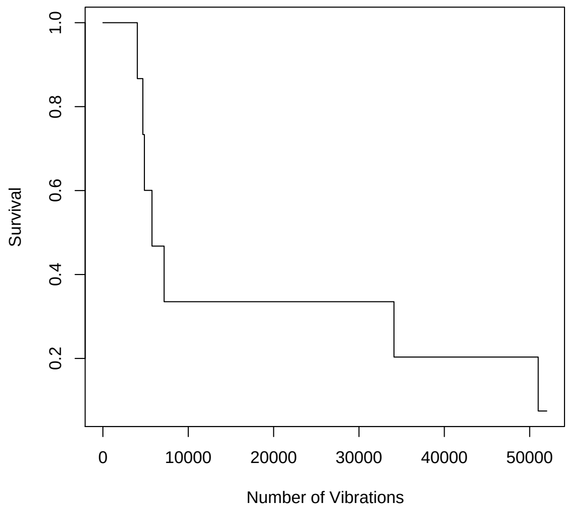

Abbildung 2: Nelson-Aalen Schätzer der Survival Funktion für R0-355MPa

Zensiert man die Daten ‘künstlich’ nach 5000, 7000, 10000, 20000, 30000 bzw. 40000 Lastwechseln, so erhält man die in Tabelle 2 angeführten Werte für $\hat{\lambda}$ und $\hat{\beta}$. Zensiert man bei 5000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 0$ für $t < t_1$, $\hat{\Lambda}(t) = 0.143$, für $4030 \leq t < 4680$, $\hat{\Lambda}(t) = 0.31$, für $4680 \leq t < 4860$ und $\hat{\Lambda}(t) = 0.51$, für $t \geq 4860$. Ein Schätzer für $\hat{\lambda}$ ist $\hat{\lambda} = 0.000091$. Abbildung 3 zeigt den Nelson-Aalen Schätzer für eine Zensur bei 5000 Lastewechseln.
Zensiert man bei 7000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 0.76$, für $t \geq 7000$ und man erhält als Schätzer $\hat{\lambda} = 0.000102$. In Abbildung 4 ist der Nelson-Aalen Schätzer mit Zensur bei 7000 Lastwechseln abgetragen.

	5000	7000	10000	20000	30000	40000	Unzensiert
$\hat{\lambda}$	0.000091	0.000102	0.000111	0.000064	0.000042	0.000046	0.000052
$\hat{\beta}$	11010.98	9744.017	8978.928	15661.49	23655.22	21590.97	19237.06

Tabelle 2: Zensierte Nelson-Aalen Schätzer für R0-355MPa

Zensiert man bei 10000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 1.093$ für $t \geq 10000$. Ein Schätzer für $\hat{\lambda}$ ist $\hat{\lambda} = 0.000111$. Abbildung 5 zeigt den Nelson-Aalen Schätzer für eine Zensur bei 10000 Lastewechseln.
Zensiert man bei 20000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 1.093$, für $t \geq 20000$ und man erhält als Schätzer $\hat{\lambda} = 0.000064$. In Abbildung 6 ist der Nelson-Aalen Schätzer

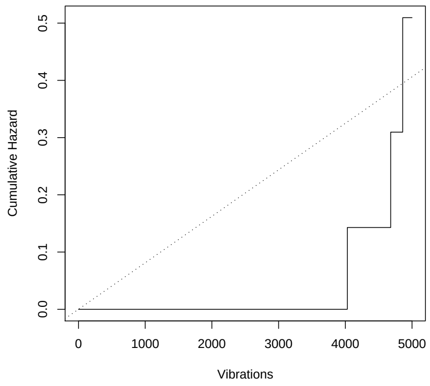

Abbildung 3: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 5000 Lastwechseln

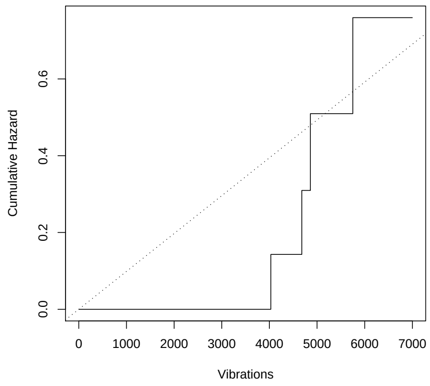

Abbildung 4: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 7000 Lastwechseln

mit Zensur bei 20000 Lastwechseln abgetragen.

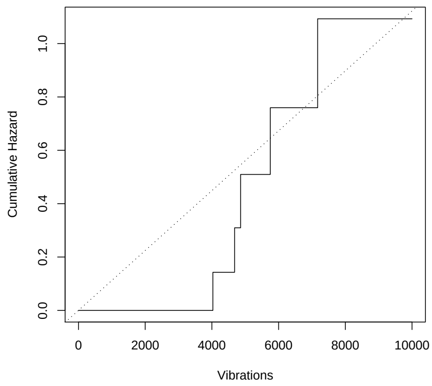

Abbildung 5: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 10000 Lastwechseln

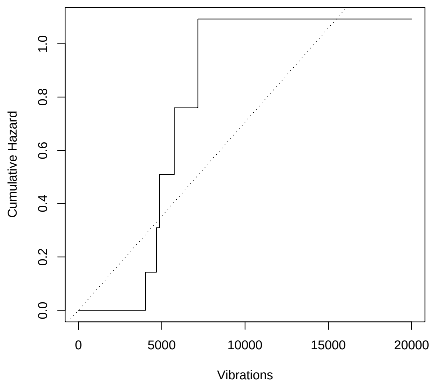

Abbildung 6: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 20000 Lastwechseln

Zensiert man bei 30000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 1.593$ für $t \geq 30000$. Ein Schätzer für $\hat{\lambda}$ ist $\hat{\lambda} = 0.000042$. Abbildung 7 zeigt den Nelson-Aalen Schätzer für eine Zensur bei 30000 Lastewechseln.
Zensiert man bei 40000 Lastwechseln, so ist $\hat{\Lambda}(t) = 1.593$, für $t \geq 40000$ und man erhält als Schätzer $\hat{\lambda} = 0.000046$. In Abbildung 8 ist der Nelson-Aalen Schätzer mit Zensur bei 40000 Lastwechseln abgetragen.

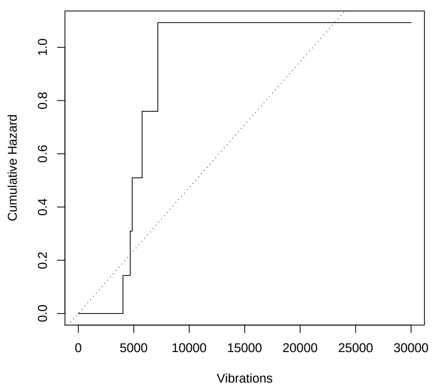

Abbildung 7: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 30000 Lastwechseln

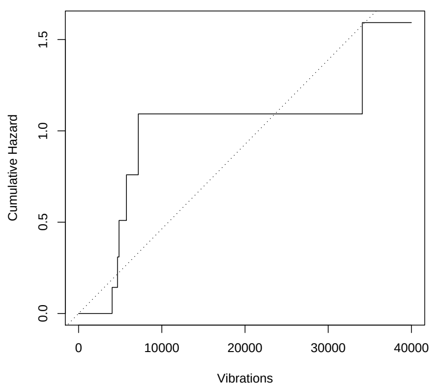

Abbildung 8: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, mit 'künstlicher' Zensur nach 40000 Lastwechseln

Verändert man die Ausfallzeiten künstlich, indem man die zwei kleinsten Werte auf 5 Lastwechsel abändert. So erhält man die in Tabelle 3 aufgführten Werte für $\hat{\Lambda}$. Als Schätzwert für $\hat{\lambda}$ erhält man mit der Methode der kleinste Quadrate $\hat{\lambda} = 0.00005134$ und $\hat{\beta} = 19477.99$. Abbildung 9 zeigt den zugehörigen Plot.

t_i	d_{t_i}	$\overline{Y}_{t_i}$	$\hat{\Lambda}(t_i)$	$\tilde{S}(t_i)$
5	2	7	0.286	0.751
4860	1	5	0.486	0.615
5750	1	4	0.736	0.479
7170	1	3	1.069	0.343
34100	1	2	1.569	0.208
51000	1	1	2.569	0.077

Tabelle 3: Nelson-Aalen Schätzer für R0-355MPa, die zwei kleinsten Werte abgeändert

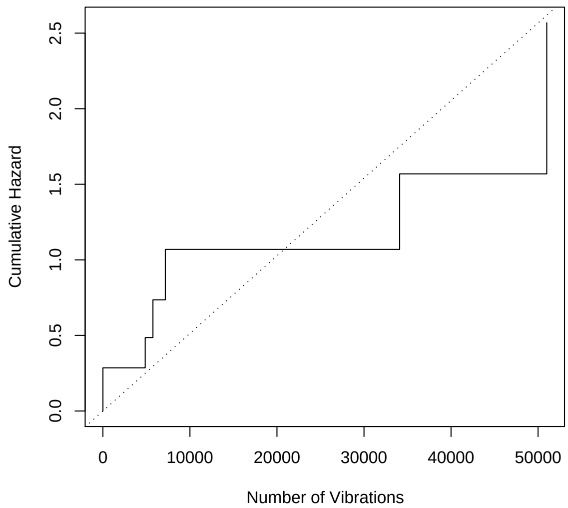

Abbildung 9: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, die zwei kleinsten Werte abgeändert

Verändert man die Daten nun so, dass die zwei größten Werte auf 1000000 Lastwechsel abändert werden. So erhält man die in Tabelle 4 aufgeführten Werte für $\hat{\Lambda}$. Als Schätzwert für $\hat{\lambda}$ erhält man mit der Methode der kleinste Quadrate $\hat{\lambda} = 0.00000211$ und $\hat{\beta} = 474067.5$. Abbildung 10 zeigt den zugehörigen Plot.

t_i	d_{t_i}	$\overline{Y}_{t_i}$	$\hat{\Lambda}(t_i)$	$\tilde{S}(t_i)$
4030	1	7	0.143	0.867
4680	1	6	0.31	0.734
4860	1	5	0.51	0.601
5750	1	4	0.76	0.468
7170	1	3	1.093	0.335
1000000	2	2	2.093	0.123

Tabelle 4: Nelson-Aalen Schätzer für R0-355MPa, die zwei größten Werte abgeändert

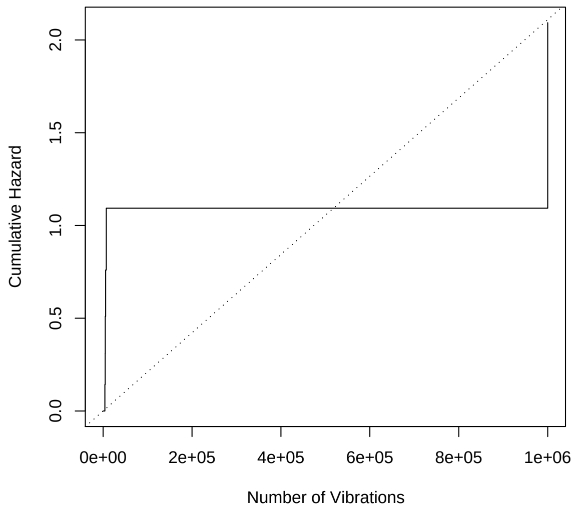

Abbildung 10: (—)Nelson-Aalen Schätzer $\hat{\Lambda}$ für R0-355MPa, die zwei größten Werte abgeändert

9 Cox Hazard Modell und Multiplikatives Dichte Modell

Die Ausführungen in diesem Abschnitt basieren auf Fleming und Harrington [12, Kapitel 4, S.125ff.].

9.1 Cox Hazard Modell

Das Cox Hazard Modell oder auch Proportionale Hazard Modell wurde 1972 von Cox [9] eingeführt und bietet eine Methode, den Einfluss von Kovariaten auf die Ausfallszeiten zu untersuchen. Das Cox Hazard Modell ist ein semiparametrisches Modell.

Sei T eine Ausfallszeit und U eine Zensurzeit. Gegeben sei ein Tripel (X, δ, Z). Mit $X := \min(T, U), \delta = \mathbb{1}_{\{T \leq U\}}$ und $Z = (Z_1, \ldots, Z_p)^T$ einem p-dimensionalen Spaltenvektor von Kovariaten. Sei $S(t|Z) = 1 - P(T > t|Z)$ die bedingte Überlebensfunktion. Die bedingte Hazard Funktion ist definiert durch

$$\lambda(t|Z) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(t \leq T < t + h | T \geq t, Z).$$

Nimmt man an, dass für zwei von der Zeit unabhängigen Kovariaten Z_1 und

Z_2 das Verhältnis der entsprechenden bedingten Ausfallraten konstant ist. Dann ist $\lambda(t|Z_1) = k(Z_1, Z_2)\lambda(t|Z_2)$, wobei k eine nicht negative reellwertige Funktion ist, die von den Kovariaten Z_1 und Z_2 abhängt. Bezeichnet man die bedingte Hazard Rate gegeben $Z = 0$ mit $\lambda_0(t)$ (die Baseline Hazard Rate) und $g(Z) := k(Z, 0)$, dann erhält man

$$\lambda(t|Z) = \lambda_0(t)g(Z).$$

Da man an möglichst einfachen Modellen interessiert ist, wählt man $g(Z) := e^{\beta^T Z}$, mit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$. Damit ist $g \geq 0$ und man erhält:

$$\lambda(t|Z) = \lambda_0(t)e^{\beta^T Z}.$$

Sind die Kovariaten zeitabhängig, so können diese in das Cox Hazard Modell integriert werden, durch die Funktion

$$\lambda\big(t\big|Z(t)\big) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P\big(t \leq T < t + h\big|T \geq t, Z(t)\big).$$

Doch dann besitzt das so definierte λ nicht die Eigenschaften einer Hazard Funktion mit zeitunabhängigen Kovariaten und man kann daraus nicht die bedingte Überlebensfunktion $S\big(t\big|Z(t)\big)$ berechnen.
Eine Erweiterung des Cox Modells stellt das nun folgende Multiplikative Dichte Modell dar.

9.2 Multiplikatives Dichte Modell

Seien X und δ wie oben definiert. Ein allgemeineres Modell basiert auf den Prozessen $N := \mathbb{1}_{\{X \leq t, \delta = 1\}}$ und $Y := \mathbb{1}_{\{X \geq t\}}$. Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der rechtsstetigen Filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big(Z, N(u), Y(u+) : 0 \leq u \leq t\big).$$

Dann ist

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma\big(Z, N(u), Y(u+) : 0 \leq u < t\big).$$

Der wachsende Prozess N erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 5.27 (Doob-Meyer-Zerlegung), also existiert ein vorhersagbarer Prozess A, so dass $N - A$ ein Martingal ist. Heuristisch ist $E\big(dN(s)\big|\mathcal{F}_{s-}\big) = E\big(dA(s)\big|\mathcal{F}_{s-}\big) = dA(s)$.
Der Prozess dA gibt die Art an, wie die bedingte Sprungrate von N, von den Information bis zu einem Zeitpunkt, aber nicht inklusive des Zeitpunktes, abhängt. Eine einfache Modellierung für diese Abhängigkeit ist: $dA(s) = l(s)$, mit einer noch zu spezifizierenden Funktion l. D.h.

$$A(s) = \int_0^s l(u)du.$$

Den Prozess A nennt man auch den kumulierten Dichte Prozess für N und falls A' existiert nennt man $A'(s) = l(s)$ den Dichte Prozess für N.
Bei dem von Aalen vorgestellten multiplikativen Dichte Modell [1] ist $l(s)$ von der Form:

$$l(s) = \lambda_0(s)g(Z)Y(s),$$

mit einer arbiträren Funktion λ_0 und einer Funktion g, die nur von dem Kovariatenvektor Z abhängt. Wie im Cox Hazard Modell wählt man $g(Z) = e^{\beta^T Z}$.
Liegen rechtszensierte Daten mit zeitunabhängigen Kovariaten vor, dann stimmen das Cox Hazard Modell und das multiplikative Dichte Modell überein.
Ist der Kovariatenvektor Z von der Zeit abhängig, kann dies im multiplikativen Dichte Modell, ohne die Komplexität des Modells zu erhöhen, folgendermaßen modelliert werden:

$$A(t) = \int_0^t e^{\beta^T Z(s)} Y(s)\lambda_0(s)ds.$$

A ist ein vorhersagbarer Prozess, wenn Z und Y vorhersagbare Prozesse sind.

Definition 9.1 *Einen k-variaten Prozess $\{N_1, \dots, N_k\}$ nennt man einen multivariaten Zählprozess, wenn folgendes erfüllt ist:*

i. *N_j, $j = 1, \dots, k$ ist ein Zählprozess und*

ii. *keine zwei Prozesse springen zur selben Zeit.*

Definition 9.2 (Multiplikatives Dichte Modell) *Das multiplikative Dichte Modell für Beobachtungen von n unabhängigen Objekten besteht aus n Tripeln $\{N_i, Y_i, Z_i\}$, $i = 1, \dots, n$, bestehend aus Zähl-, Zensur- und Kovariatenprozessen, einer rechtsstetigen Filtration $\{F_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, n Dichten $l_i(s) := \lambda_0(s)Y_i(s)\, e^{\beta^T Z_i(s)}$, $i = 1, \dots, n$ und folgenden Voraussetzungen:*

i. *$N = (N_1, \dots, N_n)^T$ ist ein multivariater Zählprozess.*

ii. *Für alle i ist $N_i - A_i$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, mit dem stetigen Kompensator $A_i = \int l_i(s)ds$.*

iii. *Y_i und Z_i sind $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersagbar und Z_i ist zusätzlich ein lokal beschränkter Prozess.*

Satz 9.3 *Sei das Multiplikative Dichte Modell vorausgesetzt. Sei $\{N(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ein Zählprozess und $\{A(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ sein Kompensator bezüglich einer rechtsstetigen Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Ist $A(t) = \int_0^t l(s)ds$, für einen beliebigen linksstetigen Prozess l, dessen rechtsseitiger Grenzwert existiert und von einer integrierbaren Zufallsvariable Q beschränkt ist. D.h. $l(t) \leq Q$ f.ü. für alle $t \geq 0$ und $E(|Q|) < \infty$, dann gilt:*

i.
$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\big(N(t+h)-N(t)\big|\mathcal{F}_t\big)=l(t+),$$

ii.
$$\begin{aligned}&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}P\big(N(t+h)-N(t)=1\big|\mathcal{F}_t\big)\\ =&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\Big(1-P\big(N(t+h)-N(t)=0\big|\mathcal{F}_t\big)\Big)\\ &=l(t+).\end{aligned}$$

Beweis *i.* Da A adaptiert ist und

$$\begin{aligned}l(t)&=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}l(u)du\\ &=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\big(A(t)-A(t-h)\big),\end{aligned}$$

ist auch l adaptiert. $l(t+)$ ist $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptiert, da für alle $h>0$ gilt:

$$l(t+)=\lim_{s\downarrow t}l(s)=\lim_{\substack{s\downarrow t\\ s<t+h}}l(s).$$

Also ist $l(t+)$ $\mathcal{F}_{t+h}$-messbar, für alle $h>0$, damit auch $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{h>0}F_{t+h}$-messbar und aus der Rechtsstetigkeit von $\{\mathcal{F}_t\}$ folgt die $\mathcal{F}_t$ Messbarkeit.
Nach Voraussetzung ist $N-A$ ein Martingal, also $E\big(dN(t)|\mathcal{F}_t\big)=E\big(dA(t)|\mathcal{F}_t\big)$, da für ein Martingal M gilt, dass $E\big(dM|\mathcal{F}_t\big)=E\big(M(t+s)-M(t)|\mathcal{F}_t\big)=E\big(M(t+s)|\mathcal{F}_t\big)-M(t)=0$. Weiter ist $l(s)$ beschränkt und mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\big(N(t+h)-N(t)\big|\mathcal{F}_t\big)&=\lim_{h\downarrow 0}E\Big(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}l(s)ds\big|\mathcal{F}_t\Big)\\ &\overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{Lebesgue}}{=}}E\Big(\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}l(s)ds\big|\mathcal{F}_t\Big)\\ &=E\big(l(t+)\big|\mathcal{F}_t\big)=l(t+).\end{aligned}$$

ii. Zeige zuerst $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\big(1-P\big(N(t+h)-N(t)=0\big|\mathcal{F}_t\big)\big)=l(t+)$. Für ein festes t sei τ die Zeit des ersten Sprunges von N nach dem Zeitpunkt t. Die Zufallsvariable τ ist eine Stoppzeit. und der Prozess $\mathbb{1}_{(t,\tau]}:=\{\mathbb{1}_{\{t<s\leq\tau\}}:s\geq 0\}$ ist $\{\mathcal{F}_s:s\geq 0\}$-adaptiert. Weiter ist $\mathbb{1}_{(t,\tau]}$ linksstetig in t und damit vorhersagbar und der Prozess $\{J(s):s\geq 0\}$ gegeben durch:

$$J(s)=\int_t^{t+s}\mathbb{1}_{(t,\tau]}d(N-A)$$

ist nach Satz 7.8 ein Martingal. Also gilt:

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}P\big(N(t+h)-N(t)\geq 1\big|\mathcal{F}_t\big)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\Big(\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(t,\tau]}(s)dN(s)\big|\mathcal{F}_t\Big)$$
$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\Big(\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(t,\tau]}(s)dA(s)|\mathcal{F}_t\Big)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\Big(\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(t,\tau]}(s)l(s)ds|\mathcal{F}_t\Big)$$
$$\underset{\text{Lebesgue}}{\overset{\text{Satz von}}{=}}E\Big(\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(t,\tau]}l(s)ds\big|\mathcal{F}_t\Big)=E\big(l(t+)\big|\mathcal{F}_t\big)=l(t+).$$

Wobei die letzten beiden Gleichheitszeichen aus dem Beweis von *i.* folgen.

Zeige nun, dass $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}P\big(N(t+h)-N(t)=1\big|\mathcal{F}_t\big)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\big(1-P\big(N(t+h)-N(t)=0\big|\mathcal{F}_t\big)\big)$. Sei τ' die Zeit des zweiten Sprunges von N nach dem Zeitpunkt t. Mit obigen Überlegungen folgt, dass

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}P\big(N(t+h)-N(t)\geq 2\big|\mathcal{F}_t\big)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}E\Big(\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(\tau,\tau']}(s)dN(s)\big|\mathcal{F}_t\Big)$$
$$=E\Big(\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{1}_{(\tau,\tau']}(s)l(s)ds\big|\mathcal{F}_t\Big)=0.$$

Die folgenden beiden Sätze ohne Beweis sichern unter bestimmten Voraussetzungen, dass der Kompensator A von N als $A(t)=\int_0^t l(u)du$ geschrieben werden kann, und die rechtsstetigkeit der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}$.

Satz 9.4 *Sei N ein Zählprozess und $\tau_1,\tau_2,\ldots$ die aufeinanderfolgenden Sprungzeiten von N. Erfüllt N folgende Eigenschaften:*

i. $E\big(N(t)\big)<\infty$, *für alle* $t\leq 0$ *und*

ii. $P(\tau_{n+1}-\tau_n\leq t|\mathcal{F}_{\tau_n})$ *ist in t absolut stetig,*

dann ist der Kompensator A von N der Form $A(t)=\int_0^t l(u)du$, d.h. A ist absolut stetig.

Beweis Der Beweis findet sich in [6].

Satz 9.5 *Seien $\{N_i,Y_i,Z_i\}$, $i=1,\ldots,n$ n unabhängige Tripel von Zähl-, Zensur- und Kovariatenprozessen und sei die Memge der Pfade, für die jedes Z_i stückweise konstant ist, mit Wahrscheinlichkeit 1. Sei*

$$\mathcal{F}_t^i=\sigma\big(N_i(u),Y_i(u+),Z_i(u+):0\leq u\leq t\big)$$

und

$$\mathcal{F}_t=\sigma\big(\mathcal{F}_t^i:i=1,\ldots,n\big)$$

die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}_t^i$, für alle i, enthält. Dann ist die Familie $\{\mathcal{F}_t:t\geq 0\}$ rechtsstetig.

Beweis Ein Beweis findet sich in [7].

9.3 Partielle Likelihoodfunktion

Diesem Abschnitt liegen die Ausführungen in [23, Kapitel 3, S.40ff.] zu Grunde.

Ein Schätzung für β basiert auf der von Cox [9] eingeführten partiellen Likelihood Funktion. Für das multiplikative Dichte Modell, hat die partielle Likelihood Funktion, für n unabhängige Tripel (N_i, Y_i, Z_i), $i = 1, \ldots, n$ die Form (Siehe [12, S. 144]):

$$PL(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{s \geq 0} \Big(\frac{Y_i(s) \exp(\beta^T Z_i(s))}{\sum_{j=1}^{n} Y_j(s) \exp(\beta^T Z_j(s))} \Big)^{\Delta N_i(s)},$$

wobei

$$\Delta N_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } N_i(s) - N_i(s-) = 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die log partielle Likelihood Funktion kann als eine Summe geschrieben werden:

$$\begin{aligned} l(\beta) &:= \log\big(PL(\beta)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \Big(Y_i(s) \beta^T Z_i(s) - \log\big(\sum_{j=1}^{n} Y_j(s) \exp(\beta^T Z_j(s)) \big) \Big) dN_i(s). \end{aligned}$$

Differenziert man die log partielle Likelihood Funktion, so erhält man:

$$\begin{aligned} U(\beta) &:= \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \Big(Y_i(s) \beta^T Z_i(s) - \log\big(\sum_{j=1}^{n} Y_j(s) \exp(\beta^T Z_j(s)) \big) \Big) dN_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \Big(Y_i(s) Z_i(s) - \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j(s) Z_j(s) \exp(\beta^T Z_j(s))}{\sum_{j+1}^{n} Y_j \exp(\beta^T Z_j(s))} \Big) dN_i(s). \end{aligned}$$

Die partiellen maximum Likelihood Schätzungen erhält man, indem man die Gleichung $U(\hat{\beta}) = 0$ löst.

10 Modelle Risswachstum

Bei einem Ermüdungsversuch können aus den Bildern, die während des Versuchs von der Mikroprobe aufgenommen werden, verschiedene Größen, die sich über die Zeit des Versuchs ändern, ermittelt werden. Diese Größen können als zeitabhängige Kovariaten in das Multiplikative Dichte Modell einfließen. Als Kovariaten kommen z.B. die Anzahl der Risse, die mittlere Risslänge, die kumulierte Risslänge oder der durchschnittliche Grauwert in Frage. Um diese Größen ermitteln zu können müssen die Bilder zuerst vorverarbeitet werden.

10.1 Vorverarbeitung und Transformation

In diesem Abschnitt wird auf die Vorverarbeitung und Transformation der Daten eingegangen. Ziel dieses Prozesses ist es das Bildmaterial in eine Form aufzubereiten, so dass die daraus gewonnenen Daten mit gängigen Statistikpaketen weiterverarbeitet werden können. Hierzu gehört Verdunkelungen, die an den Bildrändern auftreten können, zu entfernen und im nächsten Schritt die auf dem Bild sichtbaren Risse zu erkennen.

10.1.1 Entfernung von Verdunkelungen

Bei der Aufbereitung der Proben für die Aufnahmen am Mikroskop werden die Kanten der Probe, technisch bedingt, leicht abgerundet. Dadurch entsteht auf den Randbildern eine Verdunkelung am jeweiligen Bildrand. Diese Verdunkelungen

Abbildung 11: Bild S12_B40_X=61.000_Y=210.750

müssen entfernt werden, da sie sonst fälschlicherweise bei der späteren Verarbeitung als Riss bewertet werden. Da die Verdunkelungen nur an den Rändern auftreten, wird der mittlere Grauwert eines Streifens am Rand mit dem mittleren Grauwert des Bildes verglichen und gegebenenfalls die Grauwerte der Bildpunkte am Rand erhöht. Um die Grauwerte des Bildpunktes zu erhöhen ist eine nichtnegative monoton fallende Funktion gesucht. Die Exponentialfunktion ist flexibel genug und erfüllt diese Eigenschaften.

Seien im Folgenden $W, H \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R} \ni a > 0$. Die Funktion $f : [0, W] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto ae^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{a}{4}e^{-\frac{x^2}{W}}$ ist streng monoton fallend und hat bei x = 0 ein Maximum. Da f stetig ist, ist f in $(0, W)$ auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = -\frac{ax}{15W}e^{-\frac{x^2}{30W}} - \frac{ax}{2W}e^{-\frac{x^2}{W}} < 0, \quad \text{für alle} \quad x \in (0, W)$$

d.h. f ist streng monoton fallend. Da jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ihr Maximum und Minimum annimt, die Ableitung im Intervall $(0, W)$ in keinem Punkt verschwindet, kommen nur die beiden Randpunkte 0 und W für das Maximum und Minimum in Betracht. f ist streng monoton fallend, also nimmt die Funktion f ihr Maximum in $x = 0$ an, mit $f(0) = ae^0 + \frac{a}{4}e^0 = \frac{5}{4}a$.

Die Verdunkelungen treten nur an den Bildrändern auf. Deshalb wird zur Vorverarbeitung des Bildes der mittlere Grauwert des linken Bildrandes

$$\overline{G_l} = \frac{1}{39 \cdot H} \sum_{x=0}^{39} \sum_{y=0}^{H-1} p(x, y)$$

mit dem mittleren Grauwert des Bildes (ohne die Randstreifen)

$$\overline{G} = \frac{1}{(W - 80)(H - 80)} \sum_{x=40}^{W-41} \sum_{y=40}^{H-41} p(x, y)$$

verglichen. Wobei $p(x, y)$ die Grauwerte des Bildpunktes p mit den Koordinaten $(x, y) \in [0, W-1] \times [0, H-1]$ ist. Analog wird für den rechten Bildstreifen, bzw. oberen und unteren Bildstreifen vorgegangen.

Ist $|\overline{G_l} - \overline{G}| > 10$, dann werden die Grauwerte für die Bildpunkte folgendermaßen neu bestimmt:

$$p_{neu}(x, y) = p(x, y) + a_l e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{a_l}{4}e^{-\frac{x^2}{W}}.$$

Bzw. für $|\overline{G}_r - \overline{G}| > 10$ durch $p_{neu}(x, y) = p(x, y) + a_r e^{-\frac{(W-x-1)^2}{30W}} + \frac{a_r}{4}e^{-\frac{(W-x-1)^2}{W}}$, sowie für $|\overline{G}_u - \overline{G}| > 10$ durch $p_{neu}(x, y) = p(x, y) + a_u e^{-\frac{y^2}{30H}} + \frac{a_u}{4}e^{-\frac{y^2}{H}}$ und für $|\overline{G}_o - \overline{G}| > 10$ durch $p_{neu}(x, y) = p(x, y) + a_o e^{-\frac{(H-y-1)^2}{30H}} + \frac{a_o}{4}e^{-\frac{(H-y-1)^2}{H}}$.

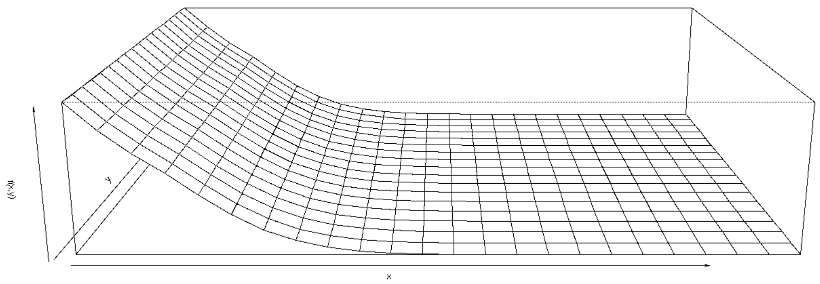

Abbildung 12: $g : [0, W] \times [0, H] \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto a_l e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{a_l}{4} e^{-\frac{x^2}{W}}$

Für $a_l = \frac{40(\overline{G}-\overline{G}_l)}{\beta_W}$ mit $\beta_W = \sum_{x=0}^{39}(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{x^2}{W}})$ ist der mittlere Grauwert der neu bestimmten Grauwerte des linken Bildstreifens $\overline{G}_{l_{neu}} = \overline{G}$, da

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{l_{neu}} &= \frac{1}{40H} \sum_{x=0}^{39} \sum_{y=0}^{H-1} \left(p(x,y) + a_l e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{a_l}{4} e^{-\frac{x^2}{W}} \right) \\
&= \frac{1}{40H} \sum_{x=0}^{39} \sum_{y=0}^{H-1} p(x,y) + \frac{1}{40H}\, a_l \sum_{x=0}^{39} \sum_{y=0}^{H-1} \left(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{W}} \right) \\
&= \overline{G}_l + \frac{1}{40H}\, a_l \sum_{x=0}^{39} \sum_{y=0}^{H-1} \left(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{W}} \right) \\
&= \overline{G}_l + \frac{1}{40H}\, \frac{40(\overline{G} - \overline{G}_l)}{\sum_{x=0}^{39} \left(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{W}} \right)}\, H \sum_{x=0}^{39} \left(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{W}} \right) \\
&= \overline{G}_l + \overline{G} - \overline{G}_l = \overline{G}.
\end{aligned}$$

Analog ist für den rechten Bildstreifen $\overline{G}_{r_{neu}} = \overline{G}$, mit $a_r = \frac{40(\overline{G}-\overline{G}_r)}{\beta_W}$ und

$$\beta_W = \sum_{x=0}^{39}(e^{-\frac{x^2}{30W}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{x^2}{W}}) = \sum_{x=W-41}^{W-1}(e^{-\frac{(W-x-1)^2}{30W}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{(W-x-1)^2}{W}}).$$

Bzw. für den oberen Bildstreifen $\overline{G}_{o_{neu}} = \overline{G}$, mit $a_o = \frac{40(\overline{G}-\overline{G}_o)}{\beta_H}$, sowie für den unteren Bildstreifen $\overline{G}_{u_{neu}} = \overline{G}$ mit $a_u = \frac{40(\overline{G}-\overline{G}_u)}{\beta_H}$ und

$$\beta_H = \sum_{y=0}^{39}(e^{-\frac{y^2}{30H}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{y^2}{H}}) = \sum_{y=H-41}^{H-1}(e^{-\frac{(H-y-1)^2}{30H}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{(H-y-1)^2}{H}}).$$

Beispiel 10.1 Folgendes Beispiel soll den Prozess der Anhebung der Grauwerte veranschaulichen.

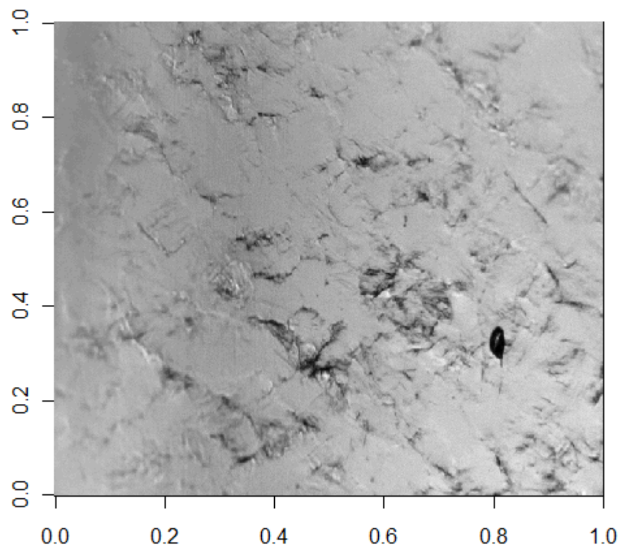

Abbildung 13: Bild S12_B40_X=61.000_Y=210.750 nach der Vorverarbeitung

Abbildung 13 zeigt das Bild, nach dem die Grauwerte am linken und oberen Bildrand angehoben wurden. Da auch die Grauwerte des oberen Bildrandes angehoben wurden, wurde die stärkere Verdunklung in der linken oberen Ecke aufgehoben.

10.1.2 Grundbegriffe aus der Graphentheorie

In diesem Abschnitt werden zuerst Begriffe aus der Graphentheorie eingeführt, die zur späteren Beschreibung der Risserkennung hilfreich sind. Der Inhalt dieses Abschnittes bezieht sich auf Ebert [11] Harary [13] und Noltemeier [21].

Definition 10.2 (Graph) *Sei V eine nicht leere Menge und V^2 die Menge aller zwei Elementigen Teilmengen von V. Das Tupel (V, E), mit $E \subseteq V^2$ nennt man Graph. Die Elemente aus V nennt man Knoten und die Elemente aus E Kanten. Einen Graphen nennt man endlichen, wenn V und E endlich sind.*

Bemerkung 10.3 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Ist $\{u, v\} \in E$, dann nennt man die Ecken u und v benachbart oder adjazent.

Die Eckenmenge eines Graphen G bezeichnet man mit $V(G)$ und die Kantenmenge mit $E(G)$.

Definition 10.4 (Teilgraph)

i. Seien G) und G' zwei Graphen. Gilt $V(G) \subseteq V(G')$ und $E(G) \subseteq E(G')$, dann nennt man G einen Teilgraphen von G'. Ist G ein Teilgraph von G', so nennt man G' einen Obergraphen von G.

ii. Gilt zudem $E(G) = E(G') \cap V^2(G)$, so nennt man G einen Untergraphen von G'. d.h. G enthält alle Kanten zwischen den Knoten aus V, die auch in G' vorhanden sind.

Definition 10.5 (Weg) *Sei G ein Graph. Eine Folge von Knoten $w = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i \in V(G)$ nennt man einen Weg, falls für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$ gilt, dass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$. D.h. es existiert jeweils eine Kante von v_1 nach v_2, von v_2 nach $v_3, \ldots$, von v_{n-1} nach v_n . Ein solcher Weg hat die Länge $n-1$.*

Bemerkung 10.6 Einen Weg $w = (v_1, \ldots, v_n)$ nennt man einfach, wenn $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_k, v_{k+1}\}$ für $i \neq k$. D.h. es wird keine Kante mehrfach durchlaufen.

Definition 10.7 (Pfad) *Einen Weg $w = (v_1, \ldots, v_n)$ nennt man einen Pfad, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.*

Definition 10.8 (Distanz) *Der kürzeste Weg zwischen zwei Knoten ist der Weg, dessen Länge minimal ist. Diesen kürzesten Weg nennt man Distanz oder Abstand. Existiert dieser Weg nicht, so setzt man Distanz = ∞.*

Definition 10.9 (Durchmesser) *Die größte Distanz zwischen zwei Konten im Graphen nennt man Durchmesser des Graphen.*

Definition 10.10 (Zusammenhangskomponente) *Sei G ein Graph. Existiert für alle $v, v' \in V(G)$ ein Weg von v nach v', dann nennt man einen Graphen zusammenhängend. Ist G' ein zusammenhängender Untergraph von G und existiert kein zusammenhängender Untergraph $\tilde{G}$ von G mit $V(G') \subset V\tilde{G}$, dann nennt man G' eine Zusammenhangskomponente von G.*

10.1.3 Risserkennung

Betrachtet man die Bitmap-Grafik, so kann man feststellen, dass ein Riss dunkler als die Umgebung ist. Da eine Bitmap-Grafik ein Raster von einzelnen Bildpunkten, mit entsprechenden Farb/Grau-Werten ist, wird ein Bildpunkt einem Riss zugeordnet, wenn der Farb/Grau-Wert dieses Bildpunktes kleiner als ein vorgegebener Wert ist. Die Farb/Grau-Werte liegen in einer Bitmap-Grafik zwischen 0 und

255, wobei bei einem Schwarz-Weiß-Bild 0 Schwarz und 255 Weiß entspricht. Da bei einem Bild, das am Anfang einer Versuchsreihe aufgenommen wurde, noch relativ wenige Risse zu erkennen sind und die Ausleuchtung von Bild zu Bild variiert, erhält man bessere Ergebnisse, wenn man den Schwellenwert, bei dem ein Bildpunkt einem Riss zugeordnet wird, nicht für alle Bilder gleich festlegt, sondern mit Hilfe des mittleren Grauwert des vorverarbeiteten Bildes bestimmt. Bestimme den Schwellenwert durch:

$$Schwellenwert_{Riss} = \begin{cases} \frac{5}{6}\overline{G} & \text{, falls } \frac{5}{6}\overline{G} < 142 \\ 142 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\overline{G} = \frac{1}{(W \cdot H)} \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} p(x, y)$ der mittlere Grauwert des Bildes ist.

Betrachtet man nun die Bildpunkte, deren Grauwert unterhalb eines Schwellenwertes liegen, d.h. zu einem Riss gehören, als Knoten und verbindet diese Knoten mit einer Kante, wenn die Beziehung 'ist ein direkter Nachbar von' zwischen den Knoten besteht, so kann man die Risse in einem Graphen darstellen. Wenn A ein direkter Nachbar von B ist, dann ist B auch ein direkter Nachbar von A. Daher erhält man durch die Beziehung 'ist ein direkter Nachbar von' einen ungerichteten Graphen. Die Zusammenhangskomponenten des Graphen entsprechen nun den einzelnen Risscluster. Die Zusammenhangskomponenten des Graphen können durch eine Tiefensuche [Ebert 1981, S.145ff] ermittelt werden. Die Laufzeit der Tiefensuche beträgt $O(n)$. Der Durchmesser der jeweiligen Zusammenhangskomponente entspricht der Risslänge des zugehörigen Rissclusters. Der Durchmesser der Zusammenhangskomponente kann durch den Tripelalgorithmus [Ebert 1981, S.187ff], mit einem Laufzeitverhalten von $O(n^3)$ oder besser mit dem Algorithmus von Dijkstra [Ebert 1981, S.197ff], dessen Laufzeitverhalten $O(n^2)$ beträgt, ermittelt werden.
Die Abbildung 14 zeigt die im Beispielbild S12_B40_X=61.000_Y=210.750 gefundenen Risscluster. Dabei ist der Durchmesser eines Risses rot und die kürzeste Entfernung zwischen den Rissenden gelb abgetragen.

10.2 Kovariaten

Aus dem Bildmaterial eines Ermüdungsversuches, wurde mit dem Schwellenwert $\min(142, \frac{5}{6}\overline{G})$, für jedes Bild die Anzahl der Risse, die durchschnittliche Risslänge, die maximale Risslänge, die summierte Risslänge und der durchschnittliche Grauwert des Bildes bestimmt. Wobei $\overline{G}$ der durchschnittliche Grauwert des vorverarbeiteten Bildes ist und Risse nur als solche gewertet werden, wenn die Länge des Risses größer als 3 Pixel ist.
Für die Daten ist der p-Wert des Shapiro-Wilk-Tests kleiner 0.05 (Siehe A.7), also kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Daten normalverteilt sind.

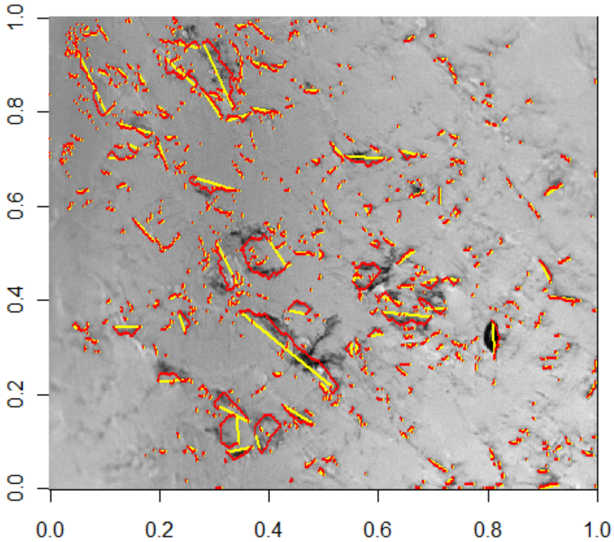

Abbildung 14: Risscluster des Bildes S12_B40_X=61.000_Y=210.750

Daher werden im Folgen die Wilcoxon-Konfidenzintervalle zum Niveau $\gamma = 0.95$ für die Kovariaten bestimmt. Hierfür wird die R-Funktion wilcox.test verwendet, siehe A.8.
Zum Ploten der Konfidenzintervalle wurde das Programm A.9 benutzt, welches mit `plotCI(`*`Datenmatrix, Beschriftung y-Achse, unterer Wert Bereich y-Achse, oberer Wert Bereich y-Achse, Abstand Kreis/Linie`*`)` aufgerufen wird.

Betrachtet man den durchschnittlichen Grauwert der Bilder, so kann der durchschnittliche Grauwert der Bilder aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch eine lineare Funktion $M(\beta, x) = \beta_1 x + \beta_0$, mit $\beta_1 = -1.940299$ und $\beta_0 = 188.940961$ geschätzt werden. Dies ist in Abbildung 15 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.

Für den durchschnittlichen Grauwert der Bilder nach der Vorverarbeitung, ist die Schätzung des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch die lineare Funktion $M(\beta, x) = \beta_1 x + \beta_0$, mit $\beta_1 = -1.950890$ und $\beta_0 = 200.159488$ gegeben. Dies ist in Abbildung 16 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.

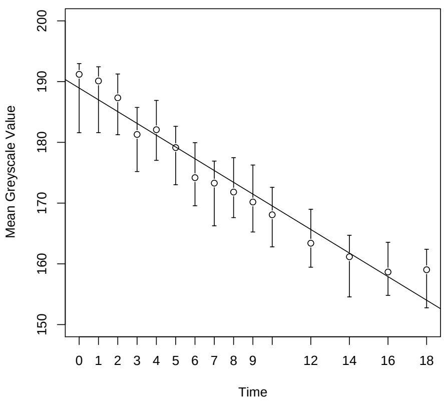

Abbildung 15: Median des durchschnittlichen Grauwertes und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \beta_1 x + \beta_0$

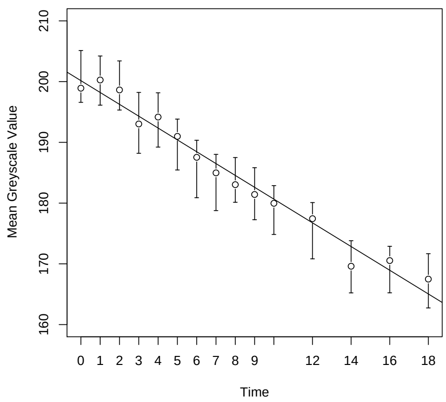

Abbildung 16: Median des durchschnittlichen Grauwertes nach der Vorverarbeitung und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \beta_1 x + \beta_0$

Die Anzahl der Risse auf den Bildern kann aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch die nicht lineare Funktion $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$, mit $\beta_2 = 6.5116$, $\beta_1 = 0.5009$ und $\beta_0 = 217.9621$ geschätzt werden. Dies ist in Abbildung 17 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.

Die maximale Risslänge auf den Bilder kann aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch die nicht lineare Funktion $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$, mit $\beta_2 = 10.8995$, $\beta_1 = 0.1850$ und $\beta_0 = 297.3050$ geschätzt werden. Dies ist in Abbildung 18 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.
Die durchschnittliche Risslänge auf den Bildern kann aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch die nicht lineare Funktion $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$, mit $\beta_2 = 5.1068$, $\beta_1 = 0.1164$ und $\beta_0 = 26.4014$ geschätzt werden. Dies ist in Abbildung 19 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.

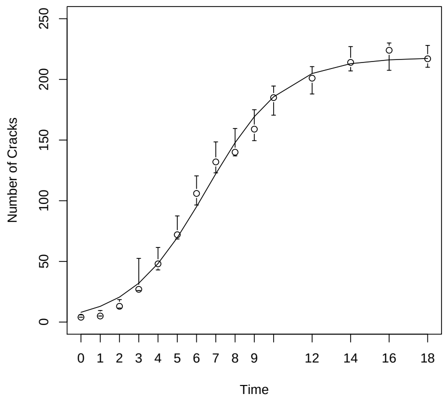

Abbildung 17: Median der Anzahl der Risse und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$

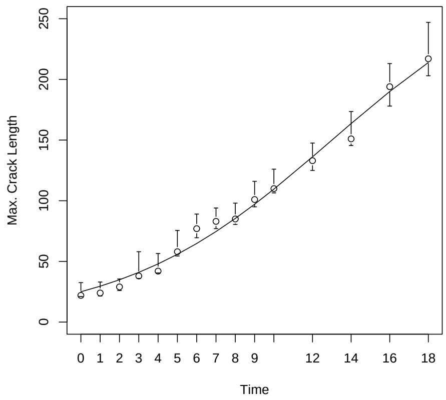

Abbildung 18: Median der maximalen Risslänge und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$

Die kumulierte Risslänge auf den Bilder kann aus dem Zeitpunkt der Aufnahme durch die nicht lineare Funktion $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$, mit $\beta_2 = 8.1558$, $\beta_1 = 0.4258$ und $\beta_0 = 4624.5221$ geschätzt werden. Dies ist in Abbildung 20 zusammen mit dem Median des durchschnittlichen Grauwertes der Bilder 0 bis 18 und dem Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma = 0.95$ für den Median der jeweiligen Bilder eingetragen.

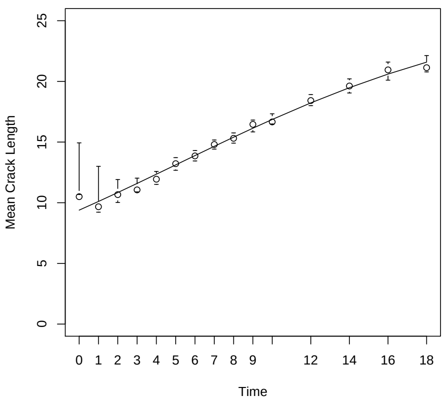

Abbildung 19: Median der durchschnittlichen Risslänge und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$

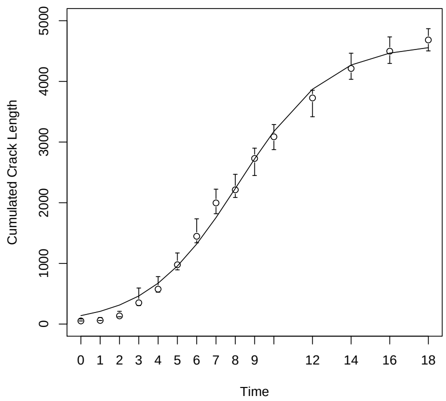

Abbildung 20: Median der kumulierten Risslänge und KI zum Niveau $\gamma = 0.95$, (—) $M(\beta, x) = \frac{\beta_0}{1+e^{-\beta_1(x-\beta_2)}}$

11 Ausblick

Liegen Daten aus Ermüdungsversuchen vor, so können aus diesen, die in Kapitel 10 vorgeschlagen Größen bestimmt werden und als Kovariaten in das in Abschnitt 9.2 vorgestellte Multiplikative Dichte Modell eingehen. Die partiellen maximalen Likelihood Schätzungen erhält man, in dem man wie in Abschnitt 9.3 vorgestellt die Gleichung $U(\hat{\beta}) = 0$ löst.

A Anhang

A.1 Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie

Sei $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $M^+ = M^+(X, \mathcal{X})$ die Familie aller nicht negativen $\mathcal{X}$-messbarer Funktionen von X nach $\overline{R}$.

Satz A.1 (Fatous Lemma) *Ist (f_n) eine Folge aus $M^+(X, \mathcal{X})$, dann gilt:*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Satz A.2 (Satz von Lebesgue) *Sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, die f.ü. gegen eine reellwertige messbare Funktion f konvergiert. Existiert eine integrierbare Funktion g, so dass $|f_n| \leq g$, für alle n. Dann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.*

Satz A.3 (Bounded Convergence Theorem) *Sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, die f.ü. gegen eine reellwertige messbare Funktion f konvergiert. Existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n| \leq M$, für alle n. Dann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.*

Satz A.4 (Satz von Beppo Levi) *Ist (f_n) eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $M^+(X, \mathcal{X})$, die gegen f konvergieren, dann gilt:*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

A.2 Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Satz A.5 (Lenglards Ungleichung) *Sei X ein rechtsstetiger adaptierter Prozess und Y ein monoton wachsender vorhersagbarer Prozess, mit $Y(0) = 0$. Gilt für alle beschränkten Stoppzeiten T, dass $E\big(|X(T)|\big) \leq E\big(Y(T)\big)$. Dann gilt für alle Stoppzeiten T und $\varepsilon, \eta > 0$:*

$$P\big(\sup_{t \leq T} |X(t)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\eta}{\varepsilon} + P\big(Y(T) \geq \eta\big).$$

Satz A.6 *Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, $\mathcal{H} := \sigma(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ die von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ erzeugte σ-Algebra und X eine integrierbare Zufallsvariable. Ist dann die von X und $\mathcal{H}_1$ erzeugte σ-Algebra unabhängig von $\mathcal{H}_2$, so gilt*

$$E(X|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}_1) \quad \text{f.s.}$$

A.3 R-Quellcode

Shapiro-Wilk Test:

```
 >sr<-read.csv("/Users/Shared/sumrisslaenge.csv")
>shapiro.test(sr[,1])

Shapiro-Wilk normality test

data:  rc[, 1]
W = 0.7426, p-value = 2.222e-08
```

Wilcoxon Test:

```
 > wilcox.test(rc[,1], alternative="two.sided",
+ conf.int=T, conf.level=0.95)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  rc[, 1]
V = 1485, p-value = 1.668e-10
alternative hypothesis: true location is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 57.50003 82.49998
sample estimates:
(pseudo)median
      68.00005
```

Plot Konfidenzintervalle:

```
 plotCI<-function(sr, ylabel, yl, yu, a){
 x<-c(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18)
 plot(NULL, xlab="Image", ylab=ylabel, ylim=c(yl, yu),
   xlim=c(0,18), type="n", xaxt="n")
 axis(1, at=c(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18))
 for(i in 1:15)   {
  points(x[i], median(sr[,i], na.rm=T))
  ui<-wilcox.test(sr[,i], alternative="two.sided",
    conf.int=T, conf.level=0.95)$conf.int[2]
  li<-wilcox.test(sr[,i], alternative="two.sided",
    conf.int=T, conf.level=0.95)$conf.int[1]
  lines(c(x[i]-0.1,x[i]+0.1), c(ui, ui), type="l")
  lines(c(x[i]-0.1,x[i]+0.1), c(li, li), type="l")
```

```
  lines(c(x[i],x[i]), c(li, max(li, median(sr[,i],
    na.rm=T)-a)), type="l")
  lines(c(x[i],x[i]), c(ui, min(ui, median(sr[,i],
    na.rm=T)+a)), type="l")
 }
}
```

Literatur

[1] Odd Aalen. Nonparametric inference for a family of counting processes. *The Annals of Statistics*, 6(4):701–726, 1978.

[2] Per Kragh Andersen, Ørnulf Borgan, Richard D. Gill, and Niels Keiding. *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[3] William E. Barlow and Ross L. Prentice. Residuals for relative risk regression. *Biometrika*, (75):65–74, 1988.

[4] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[5] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin, New York, 1991.

[6] R. Boel, P. Varaiya, and E. Wong. *Martingales on jump processes. I: Representation results*, volume 13. SIAM J. Control, 1975.

[7] Pierre Brémaud. *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] Kai Lai Chung and Ruth Williams. *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, Boston, 1990.

[9] D. R. Cox. Regression models and life tables. *Journal of the Royal Statistic Society*, B(34):187–202, 1972.

[10] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York, 1990. First edition 1953.

[11] Jürgen Ebert. *Effiziente Graphenalgorithmen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1981.

[12] Thomas R. Fleming and David P. Harrington. *Counting Processes and Survival Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.

[13] Frank Harary. *Graphentheorie*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1974.

[14] Martin Jacobsen. *Statistical Analysis of Counting Processes*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[15] John D. Kalbfleisch and Ross L. Prentice. *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, second edition, 2002.

[16] John P. Klein and Melvin L. Moeschberger. *Survival Analysis Techniques for Censored and Truncated Data*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, second edition, 2003.

[17] David G. Kleinbaum and Mitchel Klein. *Survival Analysis: A Self-Learning Text*. Springer Science and Business Media, LLC, New, 2005.

[18] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[19] David Machin, Yin Bun Cheung, and Mahesh K.B. Parmar. *Survival Analysis A Practical Approach*. NN, NN, second edition, 1995.

[20] Torben Martinussen and Thomas H. Scheike. *Dynamic Regression Models for Survival Data*. Springer, 2006.

[21] Hartmut Noltemeier. *Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen*. de Gruyter, Berlin, 1976.

[22] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, second edition, 1992.

[23] Terry M. Therneau and Patricia M. Grambsch. *Modeling Survival Data: Extending the Cox Model*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.

[24] Terry M. Therneau, Patricia M. Grambsch, and Thomas R. Fleming. Martingale-based residuals for survival models. *Biometrika*, (73):147–160, 1990.

[25] J. Yeh. *Martingales and Stochastic Analysis*. World Scientific Publishing, Singapore, 1995.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Kassel, 20. August 2008