UNIKASSEL
VERSITÄT

Universität Kassel

Institut für Mathematik

Diplomstudiengang Mathematik

Robuste Schätzungen der Parameter der Weibull-Verteilung

Diplomarbeit

Hamid Fetouaki

Betreuende Gutachterin:	Prof. Dr. Christine Müller
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Werner Varnhorn
Abgabetermin:	15.01.2011

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\#A$	Mächtigkeit einer Menge A
$(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$	Bivariater Datensatz
$\bar{x}$	Arithmetisches Mittel von x
$\beta_Q(\,\cdot\,)$ bzw. $\lambda_Q(\,\cdot\,)$	Quantil-Funktionale
$\beta_{\mathrm{med}\,/\,\mathrm{MAD}}(\,\cdot\,)$	med / MAD-Funktional
$\beta_{\mathrm{med}\,/Q_N}(\,\cdot\,)$	med $/Q_N$-Funktional
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y
$\delta_y(\cdot)$	Dirac'sches Maß $\quad \delta_y(A) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in A, \\ 0, & \text{falls } y \notin A. \end{cases}$
$\det(\,\cdot\,)$	Determinante einer Matrix
$\mathrm{E}(\,\cdot\,)$	Erwartungswert
$\hat{\beta}_Q$ bzw. $\hat{\lambda}_Q$	Quantil-Schätzer der Weibull-Parameter
$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ bzw. $\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}$	Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter
$\hat{\lambda}_{\mathrm{QLS}}(\,\cdot\,)$ bzw. $\hat{\beta}_{\mathrm{QLS}}(\,\cdot\,)$	Schätzung mittels der Methode der Quantil-Kleinste-Quadrate
$\hat{\theta}(y)$	Schätzung für θ beim Datensatz y
$\hat{\theta}_{\mathrm{MM}}$	Schätzung für θ mittels der Methode der Mediane
$\hat{b}_1(\,\cdot\,)$ bzw. $\hat{b}_0(\,\cdot\,)$	Schätzer des Steigungs- und des Achsenabschnitts-Parameters
$\lambda_{\mathrm{med}\,/\,\mathrm{MAD}}(\,\cdot\,)$	med / MAD-Funktional
$\lambda_{\mathrm{med}\,/Q_N}(\,\cdot\,)$	med $/Q_N$-Funktional
$\lambda_{\mathrm{QLS}}(\,\cdot\,)$ bzw. $\beta_{\mathrm{QLS}}(\,\cdot\,)$	QLS-Funktionale
$\lceil\,\cdot\,\rceil$	Aufrundungsfunktion $\quad \lceil z \rceil \;=\; \min\{n \in \mathbb{N};\; n \geq z\}$

$\lfloor \cdot \rfloor$	Gaußklammer $\lfloor z \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N};\ n \leq z\}$
$\lvert \cdot \rvert$	Betragsfunktion $\lvert y \rvert = \begin{cases} y, & \text{für } y \geq 0, \\ -y, & \text{für } y < 0. \end{cases}$
MAD	MAD-Funktional
$\mathrm{MAD}(Y)$	Populationsmedian der absoluten Abweichungen
$\mathrm{MAD}(y)$	Median der absoluten Abweichungen des Datensatzes y
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeit (**P**robability)
$\mathcal{E}(\mu)$	Exponential-Verteilung mit dem Parameter μ
$\mathcal{I}_\theta$	Erwartete Fisher-Informationsmatrix
$\mathcal{O}$	Landau'sches $\mathcal{O}$-Symbol
$\mathcal{P}$	Klasse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen
$\mathcal{S}_\theta(y)$	Score-Funktion
$\mathcal{Y}^N$	Stichprobenraum
$\mathrm{med}(Y)$	Populationsmedian von Y
$\mathrm{med}(y)$	Empirischer Median von y
μ bzw. σ	Parameter einer Lokations-Skalen-Familie
OLS	Methode der kleinsten Quadrate (**O**rdinary **L**east **S**quares)
∂	Partieller Ableitungsoperator
QLS	Methode der Quantil-Kleinste-Quadrate (**Q**uantil **L**east **S**quares)
RM	**R**epeated **M**edian
$\mathrm{sgn}(\cdot)$	Signumfunktion $\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y > 0, \\ 0, & \text{für } y = 0, \\ -1, & \text{für } y < 0. \end{cases}$
ML	**M**aximum **L**ikelihood
θ	Unbekannte(r) Parameter einer Verteilung
Θ	Parameterraum
$\theta^\top$	Transponierter Vektor
$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N)^\top$	Abgeänderter Datensatz

$\mathrm{Var}(\,\cdot\,)$	Varianz
$\varepsilon_A^*(\,\cdot\,, y)$	Asymptotischer Bruchpunkt beim Datensatz y
$\varepsilon_N^*(\,\cdot\,, y)$	Bruchpunkt beim Datensatz y
$\varepsilon_N^+(\,\cdot\,, y)$	Explosionspunkt beim Datensatz y
$\varepsilon_N^-(\,\cdot\,, y)$	Implosionspunkt beim Datensatz y
$b_1(\,\cdot\,)$ bzw. $b_0(\,\cdot\,)$	Steigungs- und Achsenabschnitts-Funktionale
$F^{-1}(\alpha)$	α-Quantil einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
$F_{\lambda,\beta}$	Verteilungsfunktion bei der Weibull-Verteilung
$f_{\lambda,\beta}$	Dichtefunktion bei der Weibull-Verteilung
$F_{\lambda,\beta}^{-1}(\alpha)$	α-Quantil der Weibull-Verteilung
f_θ	Dichtefunktion
$F_\theta(y)$	Verteilungsfunktion an der Stelle y
G	Verteilungsfunktion bei der Standard-log-Weibull-Verteilung
$G^{-1}(\alpha)$	α-Quantil der Standard-log-Weibull-Verteilung
$G_{\lambda,\beta}^{-1}(\alpha)$	α-Quantil der log-Weibull-Verteilung
$G_{\lambda,\beta}$	Verteilungsfunktion bei der log-Weibull-Verteilung
$g_{\lambda,\beta}$	Dichtefunktion bei der log-Weibull-Verteilung
$I_{[y\,<\,A]}$	Indikatorfunktion $\quad I_{[y\,<\,A]} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y < A, \\ 0, & \text{falls } y \geq A. \end{cases}$
I_θ	Fisher-Informationsmatrix
IF	Einflussfunktion (**I**nfluence **F**unction)
$L(\theta, y)$ bzw. $L_\theta(y)$	Likelihood-Funktion
P	Wahrscheinlichkeitsmaß
$P_{1,1}$	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Standard-Weibull-Verteilung
$P_{\lambda,\beta}$	Wahrscheinlichkeitsverteilung der allgemeinen Weibull-Verteilung
q_α	Empirisches α-Quantil
$Q_\alpha(\,\cdot\,)$	α-Quantil-Funktional
$S(\,\cdot\,)$ bzw. $T(\,\cdot\,)$	Statistische Funktionale

$u(\alpha)$	Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable α
$X, Y, Z, Y_1, \ldots, Y_N$	Zufallsvariablen
$x, y, z, y_1, \ldots, y_N$	Realisierungen der Zufallsvariablen
$y = (y_1, \ldots, y_N)^\top$	Datenvektor/Datensatz vom Umfang N

Kapitel 1

Einleitung

Zur Beantwortung einer wissenschaftlichen Fragestellung oder als Grundlage für eine Entscheidung in der Politik oder in der Wirtschaft stützt man sich auf Daten ab. Es wird angenommen, dass bei diesen Daten auch der Zufall eine Rolle mitspielt. Man beobachtet also eine Realisierung einer Zufallsvariablen Y, wobei die Verteilung von Y unbekannt ist; sie gehört zu einer Familie $\mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$. Der Parameter θ kann endlich- oder unendlich-dimensional sein. Er enthält alle Informationen, die man für die Beantwortung der Fragestellung oder für die Entscheidung benötigt.

Außerdem enthalten die Datensätze oft einige wenige extrem hohe oder niedrige Beobachtungen. Solche auffälligen Beobachtungen können dadurch zustande kommen, dass ein Fehler bei der manuellen Datenerhebung gemacht wurde, z. B. Zahlendreher, falsch eingegebene Werte und Vermischung unterschiedlicher Einheiten. Oder auch dadurch, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsannahme getroffen wird, die gar nicht der realen Verteilung der Daten entspricht. Solche extrem gelegenen Beobachtungen werden Ausreißer genannt. Aber extrem gelegene Beobachtungen müssen nicht notwendigerweise Ausreißer sein. Umgekehrt können Ausreißer nicht auffällige Beobachtungen sein. Genau aus diesem Grund ist es wünschenswert, statistische Methoden zu benutzen, die durch einige wenige Ausreißer nur in geringem Maße beeinflusst werden.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit sollen ausreißerrobuste statistische Methoden zur Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters der Weibull-Verteilung vorgestellt werden.

Die Weibull-Verteilung spielt eine zentrale Rolle in der Modellierung von Lebenszeituntersuchungen. Sie wird häufig zur Beschreibung von Lebensdauern in der Zuverlässigkeitstheorie angewendet. Die Weibull-Verteilung wurde erstmals 1939 von Waloddi Weibull zur Beschreibung von Materialermüdungserscheinungen verwendet (vgl. Weibull 1951).

Außerdem erwies sie sich als günstig zur Beschreibung von Ausfällen technischer Bauelemente. Die Weibull-Verteilung findet auch in der Versicherungsmathematik Anwendung (vgl. Brüske et al. 2010): Für $\beta < 1$ ist sie subexponentiell und eignet sich gut zur Modellierung von Großschadenverteilungen; für $\beta > 1$ konvergiert die Dichte sehr schnell, was die Verteilung zur Modellierung von Kleinschäden interessant macht.

Die Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter kann, vor allem wenn die Datensätze mit Ausreißern kontaminiert sind, sehr unzuverlässig sein (vgl. z. B. Adatia und Chan 1982, Shier und Lawrence 1984, Seki und Yokoyama 1996 und He und Fung 1999). In der Literatur wurden zahlreiche robuste Alternativen vorgeschlagen. Lingappaiah (1976) und Dixit (1994) haben einen Bayes-Ansatz vorgeschlagen, um diese Ausreißer zu behandeln. Allerdings gingen deren Schätz-Methoden davon aus, dass die Anzahl der Ausreißer und ihre Verteilungsfamilie bekannt sind. In der Praxis wird dies jedoch nie der Fall sein. Robuste M-Schätzer der Weibull-Parameter wurden, unter anderem von He und Fung (1999) durch die Anwendung der Methode der Mediane-Schätzung, untersucht. Diese Schätzung hat attraktive Robustheits- und Effizienzeigenschaften, sie ist jedoch nicht explizit gegeben.

Aufbauend auf der Arbeit von Boudt et al. (2009) werden hier neue statistische Methoden zur Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung vorgestellt. Boudt, Caliskan und Croux haben folgende robuste und explizite Methoden vorgeschlagen: Quantil-Schätzung, Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung, Repeated-Median-Schätzung, Median/MAD-Schätzung und die Median/Q_N-Schätzung.

Kapitel 2 beginnt mit der Einführung einiger Kriterien, um die Robustheit von Schätzfunktionen messen zu können. Insbesondere wird auf die Einflussfunktion (vgl. Hampel et al. 1986 und Hampel 1974) und den Bruchpunkt (vgl. Donoho und Huber 1983) eingegangen. Beide Kriterien beruhen auf der Idee, das Verhalten einer Schätzfunktion unter dem Einfluss von willkürlichen hinzugefügten Daten zu studieren. Beispiele zur Berechnung der Einflussfunktion und der Bruchpunkt des arithmetischen Mittels werden hinzugefügt.

In Kapitel 3 wird die Weibull-Verteilung vorgestellt. Daraufhin wird das Scheitern der Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung der Parameter dieser Verteilung gezeigt. Die Einflussfunktion wird sowohl für die M-Schätzungen als auch für die simultanen Lokations- und Skalen-M-Schätzer berechnet. Außerdem werden zwei Beispiele hinzugefügt - einerseits die Berechnung der ML-Schätzung der Weibull-Parameter, andererseits die Herleitung der Einflussfunktion zu dieser Schätzung. Es wird auch gezeigt, dass der Bruchpunkt der ML-Schätzung des Skalen-Parameters λ gleich $1/N$ ist. Hierbei entspricht N der Anzahl der Beobachtungen, d. h. es reicht eine einzige Veränderung, um diese Schätzung beliebig zu verfälschen. Leider wird es aber nicht gelingen, den Bruchpunkt für den Gestalts-Parameter β zu zeigen, da die ML-Schätzung für diesen Parameter keine explizite Gleichung liefert.

In der Literatur (vgl. z. B. Boudt et al. 2009 und Rousseeuw und Leroy 2003) wird nur erwähnt, dass der Bruchpunkt der Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter gleich $1/N$ ist.

In Kapitel 4 wird eine robuste, aber nicht explizite Methode erläutert, die sogenannte Methode der Mediane zur Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung (vgl. He und Fung 1999). Bei dieser Methode wird der Stichprobenmedian der Komponenten der Score-Funktion mit dem Populationsmedian der jeweiligen Komponenten gleichgesetzt und anschließend werden die resultierenden Gleichungen gelöst. Hier werden die Einflussfunktion und der Bruchpunkt für den Median hergeleitet, darüber hinaus wird diese Methode in einem Beispiel behandelt und schließlich wird der Satz über die Einflussfunktion dieser Methode zur Schätzung der Weibull-Parameter bewiesen.

Kapitel 5 befasst sich mit der Quantil-Schätzung der Weibull-Parameter (vgl. Boudt et al. 2009). Nach einer Einführung der log-Weibull-Verteilung und den robusten Eigenschaften des Quantils wird man dann am Ende dieses Kapitels für die Quantil-Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung die Einflussfunktionen und die Bruchpunkte explizit angeben können. Es werden die Einflussfunktion und der Bruchpunkt des α-Quantils hinzugefügt, außerdem werden die Sätze über die Einflussfunktionen zur Quantil-Schätzung bewiesen und anschließend werden die Lücken in den Beweisen über die Bruchpunkte zu diesen Schätzungen ergänzt.

Kapitel 6 und 7 beschreiben Regressionsmethoden zur Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und des von Siegel vorgeschlagenen Repeated Median (vgl. Siegel 1982) werden weitere robuste Methoden vorgestellt, um die Weibull-Parameter schätzen zu können. Der Bruchpunkt der QLS-Schätzung wird ebenfalls bewiesen. Ferner werden die Beweise über die Einflussfunktionen zur Schätzung des Steigungs- und des Achsenabschnitts-Parameters ergänzt. In der Original-Arbeit von Boudt et al. (2009) wurden diese Einflussfunktionen falsch berechnet, da die oberen Grenzen bei der Integration der Indikatorfunktionen falsch eingesetzt wurden (vgl. Gleichungen (6.27) und (6.30)). Anschließend wird der Satz über die Relation zwischen der Einflussfunktion der allgemeinen und der Standard-Weibull-Verteilung neu formuliert und bewiesen. Weiterhin wird der Beweis der Einflussfunktion zur RM-Schätzung des Steigungs-Parameters ergänzt und es wird auch der Satz über die Einflussfunktion des Achsenabschnitts-Parameter-Schätzers bewiesen.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit der Median/MAD- und der Median/Q_N-Schätzung (vgl. Olive 2006, Rousseeuw und Croux 1993). Hier wird der Bruchpunkt der MAD-Schätzung hergeleitet, darüber hinaus wird ein Beispiel zur Median/MAD-Schätzung hinzugefügt und anschließend werden die Sätze über die Einflussfunktionen zur Median/MAD- und Median/Q_N-Schätzung der Weibull-Parameter bewiesen.

Den Schluss dieser Arbeit bilden eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse und eine graphische Darstellung der Einflussfunktionen der betrachteten Schätzungen für die Standard-Weibull-Verteilung.

Kapitel 2

Robustheitsanforderungen

Verschiedene Verfahren zur Bestimmung von Lage und Streuung reagieren unterschiedlich auf Ausreißer. Was man in diesem Bezug unter Robustheitsanforderungen versteht, ist auch klar, aber wie beschreibt oder untersucht man diese Robustheit mathematisch? Diese Frage soll im Folgenden untersucht werden. Als Kriterien werden an dieser Stelle die Einflussfunktion und der Bruchpunkt benutzt.

2.1 Einflussfunktion

Definition 2.1.1 (Schätzfunktion (vgl. Müller 2009a))
Eine Schätzfunktion für eine p-dimensionale Kennzahl θ basierend auf univariaten Daten ist eine Funktion

$$\hat{\theta} : \mathbb{R}^N \ni y = (y_1, \dots, y_N)^\top \longrightarrow \hat{\theta}(y) \in \mathbb{R}^p. \tag{2.1}$$

Dabei heißt $\hat{\theta}(y)$ die Schätzung für θ beim Datensatz y.

Definition 2.1.2 (Operator, Funktional (vgl. Werner 2007))

i) *Eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen wird stetiger Operator genannt. Ist der Bildraum der Skalenkörper, so sagt man Funktional statt Operator.*

ii) *Betrachtet man eine Schätzfunktion nicht als eine Funktion der Daten direkt, sondern als eine Funktion der empirischen Verteilung, so spricht man von statistischen Funktionalen.*

Ein Vorteil der Definition 2.1.2 besteht darin, dass man die Konzepte und Ideen der Funktionalanalysis nunmehr auf die Datenanalyse anwenden kann.

Definition 2.1.3 (Einflussfunktion (vgl. Hampel et al. 1986))

i) *Sei $T(\cdot)$ ein Funktional. Die Einflussfunktion* (**I**nfluence **F**unction IF) *von T an der Stelle P ist gegeben durch*

$$IF(y;T,P) \;=\; \lim_{t\downarrow 0} \frac{T((1-t)P + t\delta_y) - T(P)}{t}, \tag{2.2}$$

falls der Limes existiert, dabei ist $y \in \mathcal{Y}^N$, $P \in \mathcal{P}$ und δ_y das Dirac-Maß.

ii) *$\hat{\theta}(y_1,\ldots,y_N) = T(P)$ heißt robust, falls $IF(y;T,P)$ beschränkt ist.*

Beispiel 2.1.4 (Arithmetisches Mittel)
Es wird angenommen, dass die Zufallsvariablen $Y_1,\ldots,Y_N$ mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P \in \mathcal{P}$ mit Erwartungswert $\mu = 0$ verteilt sind.

Sei das arithmetische Mittel durch $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$ gegeben, sei $T(P) = \int z dP(z) = \mu$ das zugehörige Funktional, dann gilt:

$$\begin{aligned} IF(y;T,P) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T((1-t)P + t\delta_y) - T(P)}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\int zd[(1-t)P + t\delta_y](z) - \int zdP(z)}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{(1-t)\int zdP(z) + t\int \delta_y(z) - \int zdP(z)}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{yt}{t}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $IF(y;T,P) = y$, also die Einflussfunktion des arithmetischen Mittels hängt nicht von t ab, somit ist sie unbeschränkt (vgl. dazu Abb. 2.1).

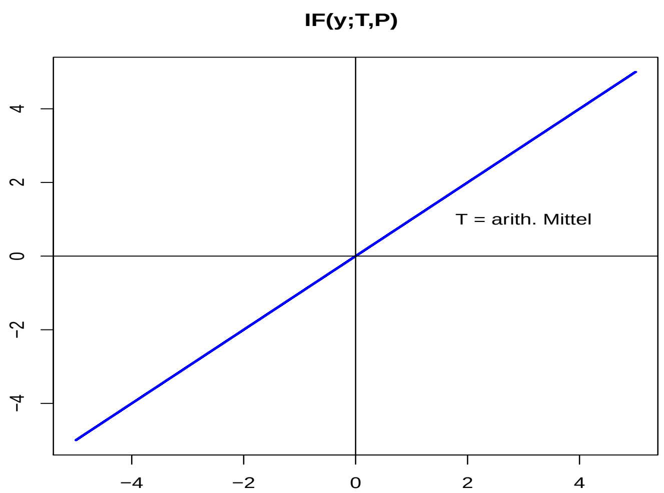

Abb. 2.1: Einflussfunktion des arithmetischen Mittels.

2.2 Bruchpunkt

Definition 2.2.1 (Bruchpunkt)
Der Bruchpunkt ist allgemein der kleinste Anteil von Ausreißern, der eine Schätzung beliebig verfälschen kann.

Definition 2.2.2 (Explosionspunkt (vgl. Müller 2009a))
Der Explosionspunkt $\varepsilon_N^+(\hat{\theta}, y)$ *einer Schätzfunktion* $\hat{\theta}$ *beim Datensatz* y *ist definiert als*

$$\varepsilon_N^+(\hat{\theta}, y) \;=\; \frac{1}{N}\min\Big\{M;\ \sup_{\tilde{y}\in\mathcal{Y}_M(y)}|\hat{\theta}(\tilde{y})| = \infty\Big\}, \tag{2.3}$$

wobei $\mathcal{Y}_M(y) = \big\{(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)^\top \in \mathbb{R}^N; \sharp\{n;\ y_n \neq \tilde{y}_n\} \leq M\big\}$ *die Menge aller Datensätze* $\tilde{y}$ *ist, die sich in höchstens* M *Einzelwerten vom Datensatz* y *unterscheiden.*

Definition 2.2.3 (Implosionspunkt (vgl. Müller 2009a))
Der Implosionspunkt $\varepsilon_N^-(\hat{\theta}, y)$ *einer Schätzfunktion* $\hat{\theta}$ *beim Datensatz* y *ist definiert als*

$$\varepsilon_N^-(\hat{\theta}, y) \;=\; \frac{1}{N}\min\Big\{M;\ \inf_{\tilde{y}\in\mathcal{Y}_M(y)}|\hat{\theta}(\tilde{y})| = 0\Big\}, \tag{2.4}$$

wobei wieder $\mathcal{Y}_M(y) = \big\{(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)^\top \in \mathbb{R}^N; \sharp\{n;\ y_n \neq \tilde{y}_n\} \leq M\big\}$ *die Menge aller Datensätze* $\tilde{y}$ *ist, die sich in höchstens* M *Einzelwerten vom Datensatz* y *unterscheiden.*

Definition 2.2.4 (Bruchpunkt einer Lageschätzung (vgl. Müller 2009a))
Der Bruchpunkt $\varepsilon_N^*(\hat{\mu}, y)$ *einer Lageschätzfunktion* $\hat{\mu}$ *beim Datensatz* y *ist der Explosionspunkt, d. h.*

$$\varepsilon_N^*(\hat{\mu}, y) \;=\; \varepsilon_N^+(\hat{\mu}, y). \tag{2.5}$$

Definition 2.2.5 (Asymptotischer Bruchpunkt)
Der asymptotische Bruchpunkt einer Schätzfunktion $\hat{\theta}$ *ist definiert als der Grenzwert für* N *gegen unendlich des entsprechenden empirischen Bruchpunktes, d. h.*

$$\varepsilon_A^*(\hat{\theta}, y) \;=\; \lim_{N\to\infty}\varepsilon_N^*(\hat{\theta}, y). \tag{2.6}$$

Beispiel 2.2.6 (Arithmetisches Mittel)
Dazu sei $y \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Es reicht zu zeigen, dass für den Explosionspunkt Folgendes gilt:

$$\varepsilon_N^+(\hat{\theta}, y) = \frac{1}{N}.$$

D. h. zu zeigen:

$$\sup_{\tilde{y}\in\mathcal{Y}_1(y)}|\hat{\theta}(\tilde{y})| \;=\; \infty, \quad \text{wobei} \quad \hat{\theta}(y) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n.$$

Sei $B > 0$ und sei $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_1(y)$ mit $\tilde{y}_{(N)} = y_{(N)} + NB$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{\theta}(\tilde{y})| &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |y_n| \\ &\geq \frac{1}{N} \big(|\tilde{y}_{(N)}| + |\tilde{y}_{(1)}| \big) \\ &= \frac{1}{N} \big(y_{(N)} + NB - y_{(1)} \big) \\ &\geq \frac{1}{N} (NB) \\ &= B. \end{aligned}$$

Somit gilt für den Bruchpunkt des arithmetischen Mittels $\varepsilon^*_N(\hat{\theta}, y) = \frac{1}{N}$. Das arithmetische Mittel kann also durch einen Ausreißer beliebig verfälscht werden. Für den asymptotischen Bruchpunkt gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*_A(\hat{\theta}, y) &= \lim_{N \to \infty} \varepsilon^*_N(\hat{\theta}, y) \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der asymptotische Bruchpunkt des arithmetischen Mittels ist 0.

Kapitel 3

Das Scheitern der Maximum-Likelihood-Methode

Die Weibull-Verteilung spielt für eine immer größer werdende Anzahl von Problemen aus den Naturwissenschaften und der Technik eine Rolle zur Modellierung von Festigkeits- und Beanspruchungsproblemen. Ihre besondere Bedeutung beruht unter anderem auf der Tatsache, dass sie in enger Beziehung zu zahlreichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen steht.

In diesem Kapitel wird die Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter hergeleitet, darüber hinaus wird die Einflussfunktion der M-Schätzungen im allgemeinen Fall berechnet, diese wird für die Maximum-Likelihood-Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung in einem Beispiel erläutert und schließlich wird der Bruchpunkt dieser Schätzung berechnet.

3.1 Weibull-Verteilung

Die Weibull-Verteilung ist nach dem schwedischen Ingenieur Waloddi Weibull (1887 - 1979) benannt. Mit deren Hilfe konnte er die Bruchfestigkeit von Werkzeugen beschreiben (vgl. Weibull 1951). Im medizinischen Umfeld wird sie hauptsächlich zur Analyse von Überlebenszeiten verwendet.

Definition 3.1.1 (Weibull-Verteilung)
Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Weibull-Verteilung (in Zeichen $Wei(\lambda,\beta)$), wenn sie die Dichte

$$f_{\lambda,\beta}(y) \;=\; \frac{\beta}{\lambda}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta-1}\exp\Big[-\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}\Big] \tag{3.1}$$

besitzt, wobei $y, \lambda, \beta > 0$. Der Parameter λ wird Skalen-Parameter genannt und β wird Gestalts-Parameter genannt.
Die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung $Wei(\lambda, \beta)$ hat die Gestalt

$$F_{\lambda,\beta}(y) \;=\; 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right], \tag{3.2}$$

wobei wieder $y, \lambda, \beta > 0$ gilt.

Definition 3.1.2 (Exponential-Verteilung)
Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit dem Parameter μ in Zeichen $\mathcal{E}(\mu)$, wenn sie die folgende Dichte

$$f_\mu(x) \;=\; \mu \exp[-\mu x] \tag{3.3}$$

besitzt, dabei ist $x \geq 0$ und $\mu > 0$. Die Verteilungsfunktion von X hat die Form

$$F_\mu(x) \;=\; 1 - \exp\big[-\mu x\big]. \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.1.3
Aus der Weibull-Verteilung $Wei(\lambda, \beta)$ ergibt sich für $\beta = 1$ eine Exponential-Verteilung mit dem Parameter $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Definition 3.1.4
Gegeben sei ein Datensatz $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top$. Für $\lambda, \beta > 0$ wird der Vektor $\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}$ wie folgt definiert:

$$\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta} \;:=\; \left(\left(\frac{y_1}{\lambda}\right)^{\beta}, \left(\frac{y_2}{\lambda}\right)^{\beta}, \ldots, \left(\frac{y_N}{\lambda}\right)^{\beta}\right)^{\top}. \tag{3.5}$$

Lemma 3.1.5
Sei Y eine Weibull-verteilte Zufallsvariable mit den Parametern λ und β, dann besitzt die Zufallsvariable $X := \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^{\beta}$ eine Standard-Exponential-Verteilung mit dem Parameter $\mu = \frac{1}{\lambda} = 1$.

Beweis:
Sei X eine standardisierte exponentialverteilte Zufallsvariable. Betrachte nun die Verteilungsfunktion von X also F_X. Dann gilt für die Zufallsvariable $X := \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^{\beta}$ für $\mu = \frac{1}{\lambda} = 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) \;&=\; \mathbb{P}(X \leq x) \;=\; \mathbb{P}\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^{\beta} \leq x\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\lambda} \leq x^{1/\beta}\right) \\ &=\; \mathbb{P}(Y \leq \lambda x^{1/\beta}) \;\overset{(3.2)}{=}\; 1 - \exp\left[-\left(\frac{(\lambda x)^{1/\beta}}{\lambda}\right)^{\beta}\right] \;=\; 1 - \exp[-x]. \end{aligned}$$

Dies ist die Verteilungsfunktion der Exponential-Verteilung mit dem Parameter $\mu = 1$ (vgl. Definition 3.1.2).

□

3.2 Maximum-Likelihood-Schätzung

Definition 3.2.1 (arg max, arg min (vgl. Müller 2009a))
Sei $f : Z \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann sei*

$$z^* \in \arg\max\{f(z);\ z \in Z\} \quad :\Leftrightarrow \quad f(z^*) = \max\{f(z);\ z \in Z\} \ = \ \max_{z \in Z} f(z),$$
$$z^* \in \arg\min\{f(z);\ z \in Z\} \quad :\Leftrightarrow \quad f(z^*) = \min\{f(z);\ z \in Z\} \ = \ \min_{z \in Z} f(z).$$

D. h. $\arg\max\{f(z);\ z \in Z\}$ *(bzw.* $\arg\min\{f(z);\ z \in Z\}$*) ist die Menge aller Punkte* $z \in Z$*, bei denen die Funktion* f *maximal bzw. minimal wird.*

Definition 3.2.2 (Likelihood-Funktion (vgl. Müller 2009b))
Sei $P^Y \in \{P^Y_\theta; \theta \in \Theta\}$*. Besitzt* P^Y_θ *für jedes* $\theta \in \Theta$ *eine Dichte* f_θ*, die entweder diskret oder stetig ist, dann heißt für jedes* $y \in \mathcal{Y}^N$ *die Funktion*

$$L(\cdot, y) : \Theta \ni \theta \longrightarrow L(\theta, y) := f_\theta(y) \in \mathbb{R}^+ \tag{3.6}$$

die Likelihood-Funktion des statistischen Experimentes bei der Beobachtung y*.*

Definition 3.2.3 (Maximum-Likelihood- (ML)-Schätzung (vgl. Müller 2009b))
Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}$ *für* θ *wird Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für* θ *genannt, falls*

$$L(\hat{\theta}(y), y) \ = \ \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, y), \quad d.\,h. \quad \hat{\theta}(y) \in \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, y), \tag{3.7}$$

für alle $y \in \mathcal{Y}^N$ *gilt. Der Wert* $\hat{\theta}(y)$ *der Schätzfunktion beim Beobachtungsvektor* y *wird Maximum-Likelihood-Schätzung für* θ *bei* y *genannt.*

Beispiel 3.2.4 (Weibull-Verteilung)
Seien die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_N$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit Weibull-Verteilung mit dem Skalen-Parameter λ und dem Gestalts-Parameter β in Zeichen $Wei(\lambda, \beta)$, sodass gilt: $\theta = (\lambda, \beta)^\top \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \Theta$ und

$$f_\theta(y_n) \ = \ \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{y_n}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y_n}{\lambda}\right)^{\beta}\right]. \tag{3.8}$$

Wegen der Unabhängigkeit der $Y_1, \ldots, Y_N$ gilt für $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ Folgendes:

$$\begin{aligned}
\log L(\theta, y) &= \log \prod_{n=1}^{N} f_\theta(y_n) \\
&= \log \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \log \left(\frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\log\left(\left(\frac{\beta}{\lambda} \right) \left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta-1} \right) + \left[-\left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left[\log(\beta) - \log(\lambda) + (\beta-1)\log(y_n) - (\beta-1)\log(\lambda) - \left(\frac{y_n}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left[\log(\beta) - \beta\log(\lambda) + (\beta-1)\log(y_n) - \lambda^{-\beta}(y_n)^{\beta} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \log(\beta) - \beta \sum_{n=1}^{N} \log(\lambda) + (\beta-1) \sum_{n=1}^{N} \log(y_n) - \lambda^{-\beta} \sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta} \\
&= N\log(\beta) - N\beta\log(\lambda) + (\beta-1) \sum_{n=1}^{N} \log(y_n) - \lambda^{-\beta} \sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Differenzieren nach λ und β und Nullsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda} \log L(\theta, y) &= -\frac{N\beta}{\lambda} + \beta\lambda^{-(\beta+1)} \sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{N}{\lambda} &= \frac{\sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta}}{\lambda^{(\beta+1)}} \\
\Leftrightarrow \quad N &= \lambda^{-\beta} \sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta} \\
\Leftrightarrow \quad \lambda &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (y_n)^{\beta} \right\}^{1/\beta}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}\log L(\theta,y) &= \frac{N}{\beta} - N\log(\lambda) + \sum_{n=1}^{N}\log(y_n) - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y_n}{\lambda}\right)^{\beta}\log\left(\frac{y_n}{\lambda}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\beta} - \log(\lambda) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log(y_n) \\
& - \frac{1}{N}\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\beta}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(y_n) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\beta}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(\lambda)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log(y_n) - \log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{1/\beta} \\
& - \frac{1}{N}\left[\left(\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{1/\beta}\right)^{-\beta}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(y_n)\right. \\
& \left. - \left(\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{1/\beta}\right)^{-\beta}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{1/\beta}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log(y_n) - \frac{1}{\beta}\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\} \\
& - \frac{1}{N}\left[\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{-1}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(y_n)\right. \\
& \left. - \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}^{-1}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\frac{1}{\beta}\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log(y_n) - \frac{1}{\beta}\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\} \\
& - \frac{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(y_n)}{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}} + \frac{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\frac{1}{\beta}\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\right\}}{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log(y_n) - \frac{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}\log(y_n)}{\sum_{n=1}^{N}(y_n)^{\beta}} = 0. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (3.11) kann nicht analytisch gelöst werden. In diesem Fall versucht man, näherungsweise eine numerische Lösung zu finden. Ein geeignetes Verfahren wäre z. B. das Newton-Raphson-Verfahren.

3.3 M-Schätzungen

Definition 3.3.1 (M-Schätzungen (vgl. Müller 2009b))
Sei $\rho : \mathcal{Y} \times \Theta \to \mathbb{R}$. *Dann heißt* $\hat{\theta}(y)$ *M-Schätzung für* θ *bei* $y = (y_1, \ldots, y_N)$ *bzgl.* ρ, *falls gilt:*

$$\hat{\theta}(y) \in \arg\min_{\theta \in \Theta} \sum_{n=1}^{N} \rho(y_n, \theta). \tag{3.12}$$

Bemerkung 3.3.2

1. Maximum-Likelihood-Schätzungen sind spezielle M-Schätzungen für den Parameter θ einer parametrischen Verteilungsklasse $\mathcal{P} = \{P_\theta^Y; \theta \in \Theta\}$ mit der Dichte $f_\theta(y)$ für

$$\rho(y_n, \theta) \;=\; -\ln f_\theta(y_n). \tag{3.13}$$

   D. h. der ML-Schätzer minimiert die Funktion $\sum_{n=1}^{N} (-\log f_\theta(y_n))$ bzgl. θ, wobei $\theta \in \Theta$.

2. M-Schätzungen werden oft über die notwendige Bedingung für das Minimum definiert. Existiert nämlich

$$\psi(y_n, \theta) \;=\; \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \rho(y_n, \tilde{\theta}) \bigg|_{\tilde{\theta} = \theta} \in \mathbb{R}^p \tag{3.14}$$

   für alle $y_n \in \mathcal{Y}$ und $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, dann gilt für die M-Schätzung $\hat{\theta}(y) = T(P)$ bzgl. ρ:

$$\sum_{n=1}^{N} \psi(y_n, \hat{\theta}(y)) \;=\; 0. \tag{3.15}$$

   Das zu dem M-Schätzer gehörende Funktional ergibt sich analog durch

$$\int \rho(y, T(P)) dP(y) \;=\; \mathrm{E}_P\big[\rho(Y, T(P))\big] \;:=\; \min, \quad T(P) \in \Theta \tag{3.16}$$

   oder explizit durch die Lösung der Gleichung

$$\int \psi(y, T(P)) dP(y) \;=\; \mathrm{E}_P\big[\psi(Y, T(P))\big] \;=\; 0, \quad T(P) \in \Theta. \tag{3.17}$$

Definition 3.3.3 (Score-Funktion (vgl. Fahrmeir et al. 2009))
Die Score-Funktion bzw. der Score-Vektor $\mathcal{S}_\theta(y)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$ *ist der Vektor der ersten Ableitungen der* log-*Likelihood-Funktion nach* θ*:*

$$\mathcal{S}_\theta(y) \;=\; \frac{\partial \log L(\theta, y)}{\partial \theta} \;=\; \frac{\partial \log f_\theta(y)}{\partial \theta}. \tag{3.18}$$

Definition 3.3.4 (Fisher-Informationsmatrix (vgl. Fahrmeir et al. 2009))
Sei θ ein p-dimensionaler Vektor. Dann heißt die $p \times p$-Matrix I_θ mit den Einträgen

$$I_\theta(y) \;=\; \frac{-\partial^2 \log L(\theta, y)}{\partial\theta\partial\theta^\top} \tag{3.19}$$

die Fisher-Informationsmatrix, wobei $\partial\theta\partial\theta^\top$ die vektorwertige Differentiation bezeichnet.

Definition 3.3.5 (Erwartete Fisher-Informationsmatrix (vgl. Fahrmeir et al. 2009))
Sei θ ein p-dimensionaler Vektor. Dann heißt die $p \times p$-Matrix $\mathcal{I}_\theta$ mit den Einträgen

$$\mathcal{I}_\theta \;=\; \mathrm{E}_\theta(I_\theta(Y)) \;=\; \mathrm{E}_\theta\left(\frac{-\partial^2 \log L(\theta, Y)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right) \tag{3.20}$$

die erwartete Fisher-Informationsmatrix.

Lemma 3.3.6
Unter Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1)*, die die Vertauschung von Differentiation und Integration erlauben, gilt für die erwartete Fisher-Informationsmatrix:*

$$\mathcal{I}_\theta \;=\; \mathrm{E}_\theta\left(\frac{-\partial^2 \log f_\theta(Y)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right) \;=\; \mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(Y)\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\log f_\theta(Y)\right). \tag{3.21}$$

Beweis:
Sei θ ein p-dimensionaler Vektor. Zunächst wird gezeigt, dass für die Fisher-Informationsmatrix Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{-\partial^2 \log L(\theta, y)}{\partial\theta\partial\theta^\top} &= \frac{-\partial^2 \log f_\theta(y)}{\partial\theta\partial\theta^\top} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\log f_\theta(y) \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\right] \\
&= -\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)] f_\theta(y) - \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(y)\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{(f_\theta(y))^2} \\
&= -\frac{f_\theta(y)\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)]}{(f_\theta(y))^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\theta &= \mathrm{E}_\theta\left(\frac{-\partial^2 \log f_\theta(Y)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right) \\
&\overset{(3.22)}{=} \int \left[-\frac{f_\theta(y)\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)]}{(f_\theta(y))^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\right] f_\theta(y)dy \\
&= -\int \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{(f_\theta(y))^2}(f_\theta(y))^2 dy + \int \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)}{f_\theta(y)}\right] f_\theta(y)dy \\
&= -\int \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)dy + \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(y)\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\log f_\theta(y)\right) f_\theta(y)dy \\
&\overset{(*)}{=} 0 + \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(y)\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\log f_\theta(y)\right) f_\theta(y)dy \\
&= \mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(Y)\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\log f_\theta(Y)\right).
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die Gleichheit in $(*)$, denn unter den sogenannten Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1) erhält man:

$$
-\int \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top} f_\theta(y)dy \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top}\underbrace{\int f_\theta(y)dy}_{=1,\ \text{da } f_\theta\ \textit{Dichte}} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\top}1 \;=\; 0.
$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

$\square$

Satz 3.3.7 (Einflussfunktion für M-Schätzer (vgl. Jurečková und Picek 2006))
Unter geeigneten Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1) *ist die Einflussfunktion für jeden M-Schätzer gegeben durch:*

$$
IF(y; T, P) \;=\; -\left[\int \dot{\psi}(z, T(P))dP(z)\right]^{-1} \psi(y, T(P)), \tag{3.23}
$$

wobei

$$
\dot{\psi}(z, T(P)) \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(z, \theta)\right]_{\theta=T(P)}. \tag{3.24}
$$

Beweis: Der Beweis basiert auf dem Beweis in Jurečková und Picek (2006).
Sei $\rho(\cdot,\theta)$ differenzierbar, sodass die Ableitung $\psi(\cdot,\theta)$ absolut stetig in Bezug auf θ ist und $T(P)$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\mathrm{E}_P\big[\psi(Y,T(P))\big] \;=\; 0 \tag{3.25}$$

ist. Sei weiterhin $P_t = (1-t)P + t\delta_y$. Unter geeigneten Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1) löst $T(P_t)$ die Gleichung

$$\int \psi(z,T(P_t))d((1-t)P + t\delta_y) \;=\; 0, \tag{3.26}$$

sodass gilt:

$$(1-t)\int \psi(z,T(P_t))dP(z) + t\psi(y,T(P_t)) \;=\; 0. \tag{3.27}$$

Leitet man diesen Ausdruck nach t ab, ergibt sich:

$$\begin{aligned} &-\int \psi(z,T(P_t))dP(z) + \psi(y,T(P_t)) \\ &+\;(1-t)\frac{dT(P_t)}{dt}\int\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(z,\theta)\right]_{\theta=T(P_t)} dP(z) \\ &+t\frac{dT(P_t)}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(y,\theta)\right]_{\theta=T(P_t)} \;=\; 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Für $t \downarrow 0$ erhält man:

$$\psi(y,T(P)) \;+\; \frac{dT(P)}{dt}\int\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(z,\theta)\right]_{\theta=T(P)} dP(z) \;=\; 0. \tag{3.29}$$

Somit ergibt sich die Einflussfunktion von $T(P)$ als

$$IF(y;T,P) \;=\; -\left[\int \dot{\psi}(z,T(P))dP(z)\right]^{-1}\psi(y,T(P)),$$

wobei

$$\dot{\psi}(z,T(P)) \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(z,\theta)\right]_{\theta=T(P)}$$

die Ableitung von ψ nach θ angibt.

□

Satz 3.3.8 (Simultane Lokations- und Skalen-M-Schätzer (vgl. Huber 1981))
Seien T und S die zu einem Lokations- und Skalen-M-Schätzer gehörende Funktionale und $P \in \mathcal{P}$ gegeben. Dann gilt für deren zugehörige Einflussfunktionen:

$$IF(y;T,P) = \frac{\psi\left(\frac{y}{S(P)}\right)S(P)}{\int \psi'\left(\frac{y}{S(P)}\right)P(dy)} \tag{3.30}$$

und

$$IF(y;S,P) = \frac{\chi\left(\frac{y}{S(P)}\right)S(P)}{\int \chi'\left(\frac{y}{S(P)}\right)\frac{y}{S(P)}P(dy)}, \tag{3.31}$$

wobei ψ eine ungerade Funktion und χ eine gerade Funktion ist.

Beweis: (Skizze) einen ausführlichen Beweis findet man in Huber (1981).
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden nur Verteilungsklassen mit Dichten der Form

$$\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \tag{3.32}$$

betrachtet, dabei ist μ der Lokations-Parameter und σ der Skalen-Parameter.

Die Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode ergibt das folgende Minimierungsproblem:

$$\sum_{n=1}^{N} -\log\left(\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)\right) =: \min.$$

Dieses kann man mit Hilfe der Rechenregeln der Logarithmusfunktion umformen zu

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\log(\sigma) + \underbrace{\left(-\log\left(f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)}_{=:\,\rho_f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)}\right) =: \min.$$

Um das Minimum zu bestimmen, muss man die partiellen Ableitungen nach μ und σ bilden, diese gleich Null setzen und das so entstandene System von Gleichungen lösen, hierbei ist $\psi_f = \rho'_f$.

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{n=1}^{N}\left(\log(\sigma) - \log\left(f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sigma}\psi_f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right) = 0 \tag{3.33}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\sum_{n=1}^{N}\left(\log(\sigma)-\log\left(f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{y_n-\mu}{\sigma^2}\psi_f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)\right) = 0. \quad (3.34)$$

Daraus ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{N}\psi_f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right) = 0 \quad (3.35)$$

und

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\psi_f\left(\frac{y_n-\mu}{\sigma}\right)-1\right) = 0. \quad (3.36)$$

Dieses zu lösende Gleichungssystem wird verallgemeinert. Man bezeichnet mit einem simultanen Lokations- und Skalen-M-Schätzer jedes Paar (T, S), das durch die zwei Gleichungen der Form

$$\sum_{n=1}^{N}\psi\left(\frac{y_n-T}{S}\right) = 0 \quad (3.37)$$

und

$$\sum_{n=1}^{N}\chi\left(\frac{y_n-T}{S}\right) = 0 \quad (3.38)$$

bestimmt wird.

Da $T = T(P)$ und $S = S(P)$ gilt und in den meisten Fällen ψ eine ungerade Funktion und χ eine gerade Funktion ist, kann man (3.37) und (3.38) in Form von Funktionalen der folgenden Art ausdrücken:

$$\int\psi\left(\frac{y-T(P)}{S(P)}\right)P(dy) = 0 \quad (3.39)$$

und

$$\int\chi\left(\frac{y-T(P)}{S(P)}\right)P(dy) = 0. \quad (3.40)$$

D. h. die Schätzer für den Lage-Parameter und den Streuungs-Parameter werden durch simultanes Lösen dieser beiden Gleichungen bestimmt.

Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P \in \mathcal{P}$ mit $P_t = (1-t)P + t\delta_y$ für $0 < t < 1$ ergeben sich die zwei Einflussfunktionen $IF(y; T, P)$ und $IF(y; S, P)$ durch Einsetzen von P_t in (3.39) und (3.40). Diese Einflussfunktionen genügen dem folgenden System von Gleichungen:

$$IF(y;T,P)\int \psi'(z)P(dy) \;+\; IF(y;S,P)\int \psi'(z)zP(dy) \;=\; \psi(z)S(P) \tag{3.41}$$

$$IF(y;T,P)\int \chi'(z)P(dy) \;+\; IF(y;S,P)\int \chi'(z)zP(dy) \;=\; \chi(z)S(P), \tag{3.42}$$

wobei für z gilt $z = (y - T(P))/S(P)$.

Falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung P symmetrisch ist, ψ eine ungerade Funktion und χ eine gerade Funktion ist, dann erhält man insgesamt die folgende Vereinfachung:

$$IF(y;T,P) \;=\; \frac{\psi\left(\dfrac{y}{S(P)}\right) S(P)}{\displaystyle\int \psi'\left(\dfrac{y}{S(P)}\right) P(dy)} \tag{3.43}$$

und

$$IF(y;S,P) \;=\; \frac{\chi\left(\dfrac{y}{S(P)}\right) S(P)}{\displaystyle\int \chi'\left(\dfrac{y}{S(P)}\right) \dfrac{y}{S(P)} P(dy)}. \tag{3.44}$$

□

Beispiel 3.3.9 (Einflussfunktion der ML-Schätzung)
Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_θ mit einer Dichtefunktion $f_\theta(y)$ gilt Folgendes:

$$\rho(y, T(P_\theta)) \;=\; -\log f_\theta(y, T(P_\theta)), \tag{3.45}$$

$$\psi(y, T(P_\theta)) \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(y,\theta)\Big|_{\theta = T(P_\theta)}, \tag{3.46}$$

dabei ist $\psi(y,\theta) \in \mathbb{R}^2$ die Ableitung von $\rho(y,\theta)$ nach θ. Mit Hilfe von Satz 3.3.7 bzw. der Gleichung (3.23) erhält man:

$$IF(y;T,P_\theta) \;=\; \mathcal{I}_\theta^{-1} \cdot \frac{\dot{f}_\theta(y, T(P_\theta))}{f_\theta(y, T(P_\theta))}, \tag{3.47}$$

hierbei ist

$$\dot{f}_\theta(y, T(P_\theta)) \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(y,\theta)\Big|_{\theta = T(P_\theta)}, \tag{3.48}$$

und wegen Lemma 3.3.6 ist

$$\mathcal{I}_\theta = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(y,\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\top} \log f_\theta(y,\theta) \right) f_\theta(y,\theta) dy \tag{3.49}$$

die erwartete Fisher-Informationsmatrix von f_θ an der Stelle $\theta = T(P_\theta)$.

Berechnung der Score-Funktion: Aus dem Beispiel 3.2.4 (vgl. Gleichung (3.9)) ergibt sich für die log-Likelihood-Funktion Folgendes:

$$\log f_\theta(y) = \log(\beta) - \beta \log(\lambda) + (\beta - 1)\log(y) - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta. \tag{3.50}$$

Differenzieren nach λ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\theta(y) &= -\frac{\beta}{\lambda} + \beta \lambda^{-(\beta+1)} y^\beta \\ &= -\frac{\beta}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta \\ &= \frac{\beta}{\lambda}\left[\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right]. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Differenzieren nach β ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \log f_\theta(y) &= \frac{1}{\beta} - \log(\lambda) + \log(y) - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta \log\left(\frac{y}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\beta} + \log\left(\frac{y}{\lambda}\right) - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta \log\left(\frac{y}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\left[1 + \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Die Score-Funktion ist gegeben mit:

$$\mathcal{S}_\theta(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \log f_\theta(y)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \log f_\theta(y)}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\lambda}\left[\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right] \\ \frac{1}{\beta}\left[1 + \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right] \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Nach Lemma 3.1.5 ist $X = \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta$ eine standardisierte exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 1$, somit lassen sich die Einträge der erwarteten Fisher-Informationsmatrix $\mathcal{I}_\theta$ wie folgt berechnen:

$$\mathcal{I}_\theta = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{\lambda\lambda} & \mathcal{I}_{\lambda\beta} \\ \mathcal{I}_{\beta\lambda} & \mathcal{I}_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

Für das erste Hauptdiagonalelement erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\lambda\lambda} &= \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\theta(Y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\theta(Y)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right)^2\right] \\
&\overset{\text{Lemma 3.1.5}}{\underset{(*)}{=}} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \mathrm{E}_\theta\left[\left(X-1\right)^2\right] \\
&\overset{(**)}{=} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Dabei gilt die Gleichheit in $(*)$ wegen der Linearität des Erwartungswertes und in $(**)$ wegen

$$\mathrm{E}_\theta\left[(X-1)^2\right] = \mathrm{E}_\theta\left[(X-\mathrm{E}_\theta(X))^2\right] = \mathrm{Var}_\theta(X) = (\mathrm{E}_\theta(X))^2 = 1.$$

Die Nebendiagonalelemente lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\lambda\beta} &= \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\theta(Y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log f_\theta(Y)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}_\theta\left[\frac{\beta}{\lambda}\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right)\frac{1}{\beta}\left(1+\left(1-\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right)\right] \\
&\overset{\text{Lemma 3.1.5}}{=} \frac{1}{\lambda}\mathrm{E}_\theta\left[\left(X-1\right)\left(1+\log X - X\log X\right)\right] \qquad (3.55) \\
&= \mathcal{I}_{\beta\lambda}.
\end{aligned}$$

Für das zweite Hauptdiagonalelement erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\beta\beta} &= \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log f_\theta(Y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log f_\theta(Y)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}_\theta\left[\left(\frac{1}{\beta}\left(1+\left(1-\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right)\right)^2\right] \\
&\overset{\text{Lemma 3.1.5}}{=} \frac{1}{\beta^2}\mathrm{E}_\theta\left[\left(1+\log X - X\log X\right)^2\right]. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Numerische Berechnungen der Erwartungswerte liefern Folgendes (vgl. He und Fung 1999):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\theta\Big[\big(1+\log X - X\log X\big)^2\Big] &\approx 1.8237 \\ \mathrm{E}_\theta\Big[\big(X-1\big)\big(1+\log X - X\log X\big)\Big] &\approx 0.4228. \end{aligned}$$

Somit erhält man insgesamt:

$$\mathcal{I}_\theta = \begin{pmatrix} (\beta/\lambda)^2 & 0.4228/\lambda \\ 0.4228/\lambda & 1.8237/\beta^2 \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

Die Berechnung der Inversen der erwarteten Fisher-Informationsmatrix $\mathcal{I}_\theta$ liefert

$$\mathcal{I}_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1.109(\lambda/\beta)^2 & -0.257\lambda \\ -0.257\lambda & 0.608\beta^2 \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Für die Einflussfunktion der Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter λ und β gilt somit:

$$\begin{aligned} IF(y;\theta_{\mathrm{ML}},P_\theta) &= \mathcal{I}_\theta^{-1}\mathcal{S}_\theta(y) \\ &= \begin{pmatrix} 1.109\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 & -0.257\lambda \\ -0.257\lambda & 0.608\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\lambda}\left[\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right] \\ \frac{1}{\beta}\left[1+\left(1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Satz 3.3.10
Für den Bruchpunkt der Maximum-Likelihood-Schätzung des Weibull-Parameters λ gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\varepsilon_N^*(\hat\lambda_{\mathrm{ML}}, y) = \frac{1}{N}. \tag{3.59}$$

Beweis:
1. Behauptung: Für den Explosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^+(\hat\lambda_{\mathrm{ML}}, y) = \frac{1}{N}$.

Beweis: Die Maximum-Likelihood-Schätzung des Skalen-Parameters λ ist in (3.10) gegeben durch:

$$\hat\lambda_{\mathrm{ML}} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N (y_n)^\beta\right\}^{1/\beta}.$$

Sei $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_1(y)$ der Datensatz, der durch das Ersetzen von y_i durch $\tilde{y}_i$ entstanden ist. Für $\tilde{y}_i \to \infty$ erhält man:

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \left\{ \frac{1}{N} \left(y_1^\beta + \ldots + \tilde{y}_i^\beta + \ldots + y_N^\beta \right) \right\}^{1/\beta} \xrightarrow{\tilde{y}_i \to \infty} \infty. \tag{3.60}$$

2. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^-(\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}, y) = \frac{1}{N}$.

Beweis: Um die Implosion des Schätzers zu erhalten, reicht es also, für $\tilde{y}_i$ Folgendes zu nehmen

$$\tilde{y}_i = \left\{ -\left(y_1^\beta + \ldots + y_{i-1}^\beta + y_{i+1}^\beta + \ldots + y_N^\beta \right) \right\}^{1/\beta}. \tag{3.61}$$

Also

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \left\{ \frac{1}{N} \left(y_1^\beta + \ldots + \tilde{y}_i^\beta + \ldots + y_N^\beta \right) \right\}^{1/\beta} \xrightarrow{\tilde{y}_i} 0. \tag{3.62}$$

□

Bemerkung 3.3.11

Der asymptotische Bruchpunkt der ML-Schätzung des Skalen-Parameters λ ist gleich:

$$\varepsilon_A^*(\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}, y) = \lim_{N \to \infty} \varepsilon_N^*(\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}, y) \overset{(3.59)}{=} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} = 0. \tag{3.63}$$

Satz 3.3.12

Für den Bruchpunkt der Maximum-Likelihood-Schätzung des Weibull-Parameters β gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\varepsilon_N^*(\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}, y) = \frac{1}{N}. \tag{3.64}$$

Bemerkung 3.3.13

Der Beweis von Satz 3.3.12 geht nicht analog zum Beweis von Satz 3.3.10 und ist sehr schwer, denn der Parameter β ist nicht explizit gegeben, sondern nur implizit durch die Lösung der Likelihood-Gleichung (3.11) gegeben. Zur Ermittlung von β in der Gleichung (3.11) verwendet man also iterative Verfahren, hat man nun β, dann kann man unmittelbar λ berechnen, der Bruchpunkt von λ ist gerade $1/N$ (vgl. Satz 3.3.10). Somit bricht die ML-Schätzung des Skalen-Parameters λ bei einer einzigen Veränderung zusammen, was dazu führt, dass die ML-Schätzung des Gestalts-Parameters β auch bei dieser einzelnen Veränderung zusammenbricht.

Kapitel 4

Methode der Mediane

In diesem Kapitel wird zunächst der Median eingeführt. Der Median zeigt hervorragende Effizienz- und Robustheitseigenschaften, wenn die zugrunde liegenden Daten kontaminiert sind (vgl. Hampel 1980). Es wird gezeigt, dass die Einflussfunktion des Medians beschränkt ist und sein asymptotischer Bruchpunkt 1/2 ist.

He und Fung (1999) haben die Methode der Mediane-Schätzung vorgeschlagen. Diese Methode macht sich die Eigenschaften des Medians zu Nutze und berechnet die Parameter der Weibull-Verteilung aus den Komponenten der Score-Funktion.

4.1 Einführung

Definition 4.1.1 (Median (vgl. Müller 2009a))
Der Median $\mathrm{med}(y) = \tilde{y}_{\frac{1}{2}}$ *für die Daten* $y_1, \ldots, y_N$ *ist ein Wert* $\mu \in W_y$ *(Wertebereich von* Y*), für den gilt:*

$$\sharp\{n;\ y_n \leq \mu\} \geq \frac{N}{2} \leq \sharp\{n;\ y_n \geq \mu\}. \tag{4.1}$$

Sind $y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(N)}$ *die geordneten Werte von* $y_1, y_2, \ldots, y_N$ *d. h.* $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \ldots \leq y_{(N)}$*, so gilt:*

$$\mathrm{med}(y) = y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}, \qquad \textit{falls } N \textit{ ungerade ist.} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{med}(y) \in \left[y_{\left(\frac{N}{2}\right)}, y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}\right], \quad \textit{falls } N \textit{ gerade ist.} \tag{4.3}$$

Definition 4.1.2 (Populationsmedian (vgl. Olive 2006))
Sei Y *eine Zufallsvariable. Der Populationsmedian ist definiert als ein Wert* $\mathrm{med}(Y)$*, für den gilt:*

$$\mathbb{P}(Y \leq \mathrm{med}(Y)) \geq \frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(Y \geq \mathrm{med}(Y)) \geq \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

Definition 4.1.3 (α-Quantil (vgl. Müller 2009a))
Sei $\alpha \in (0,1)$. *Das* α*-Quantil* $\tilde{y}_\alpha$ *für die Daten* $y_1, \ldots, y_N$ *ist ein Wert* $\mu \in W_y$, *für den gilt:*

$$\sharp\{n;\ y_n \leq \mu\} \geq \alpha N \quad \textit{und} \quad \sharp\{n;\ y_n \geq \mu\} \geq (1-\alpha)N. \tag{4.5}$$

Definition 4.1.4 (Quantilfunktion (vgl. Müller 2007))
Sei Y *eine Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung* P. *Dann heißt für* $\alpha \in (0,1)$ *die durch*

$$F^{-1}(\alpha) \ := \ \inf\{y \in \mathbb{R};\ F(y) \geq \alpha\} \tag{4.6}$$

definierte Funktion F^{-1} *Quantilfunktion.* $F^{-1}(\alpha)$ *wird als* α*-Quantil der Verteilung von* Y *bezeichnet.*

Lemma 4.1.5
Sei Y *eine Weibull-verteilte Zufallsvariable mit dem Skalen- und Gestalts-Parameter* λ *und* β, *dann gilt:*

i) $\mathrm{med}(Y) \ = \ \lambda[\log 2]^{1/\beta}$.

ii) $F^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) \ = \ \lambda\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}$.

Beweis:
ii) Das α-Quantil $F^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha)$ der Weibull-Verteilung erhält man durch Gleichsetzen von α und der Verteilungsfunktion in (3.2), also $F_{\lambda,\beta}(y) = \alpha$, und Auflösen nach y.

$$\begin{aligned}
& & 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right] &= \alpha \\
&\Leftrightarrow & \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right] &= 1-\alpha \\
&\Leftrightarrow & -\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta &= \log(1-\alpha) \\
&\Leftrightarrow & y &= \lambda\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt für das α-Quantil:

$$F^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) \ = \ F^{-1}_{\lambda,\beta}(F_{\lambda,\beta}(y)) \ = \ y \ = \ \lambda\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}.$$

i) $\mathrm{med}(Y) \ = \ \lambda[\log 2]^{1/\beta}$ ist ein Spezialfall von ii) für $\alpha = \frac{1}{2}$.

$\square$

Beispiel 4.1.6 (Einflussfunktion des Medians)
Der Median ist ein M-Schätzer mit $\rho(y, T(P)) = |y|$ und $\psi(y, T(P)) = \operatorname{sgn}(y)$, d. h. der Median $\operatorname{med}(y)$ ist für $\theta = T(P)$ eine Lösung des folgenden Minimierungsproblems:

$$\sum_{n=1}^{N} |y_n - \theta| \;:=\; \min, \;\; \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Wenn man für $\psi(y, \theta)$ Folgendes einsetzt

$$\psi(y,\theta) \;=\; \begin{cases} 1-\alpha, & \text{für } y < \theta, \\ -\alpha, & \text{für } y > \theta, \end{cases} \tag{4.8}$$

und an der Stelle $\alpha = \frac{1}{2}$ auswertet, dann erhält man als zugehörigen M-Schätzer den empirischen Median, der für N gegen unendlich gegen den Populationsmedian (also den theoretischen Median) $\operatorname{med}(Y) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ konvergiert. Angenommen der Median ist eindeutig, und wenn man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P mit einer streng monoton wachsenden Dichte $f(y, \theta)$, die in einer Umgebung des Medians differenzierbar ist, ausgeht, dann liefert Satz 3.3.7 die gewünschte Einflussfunktion

$$IF(y; \theta_{\text{med}}, P) \;=\; -\left[\int \frac{\partial}{\partial\theta}\psi(y,\theta)\bigg|_{\theta=T(P)} dP(y)\right]^{-1} \psi(y,\theta).$$

Unter geeigneten Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1) wird zunächst berechnet:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial\theta}\psi(y,\theta)\bigg|_{\theta=T(P)} dP(y) \;&=\; \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(Y,\theta)\right]_{\theta=T(P)} \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta}\,\mathrm{E}\left[\psi(Y,\theta)\right]\bigg|_{\theta=\operatorname{med}(Y)} \\ &=\; \frac{\partial}{\partial\theta}\left(F(\theta) - \tfrac{1}{2}\right)\bigg|_{\theta=\operatorname{med}(Y)} \;=\; f(F^{-1}(\tfrac{1}{2})). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Einflussfunktion des Medians ist

$$\begin{aligned} IF(y; \theta_{\text{med}}, P) \;&=\; \frac{-1}{f(F^{-1}(\frac{1}{2}))}\left(-\frac{1}{2} + 1_{\left[y < F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]}\right) \\ &=\; \frac{1}{2f(F^{-1}(\frac{1}{2}))}\operatorname{sgn}\big(y - F^{-1}(\tfrac{1}{2})\big) \\ &=\; \begin{cases} \dfrac{-1}{2f(F^{-1}(\frac{1}{2}))}, & \text{für} \quad y < F^{-1}(\frac{1}{2}), \\ \dfrac{1}{2f(F^{-1}(\frac{1}{2}))}, & \text{für} \quad y > F^{-1}(\frac{1}{2}). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Da die Einflussfunktion beschränkt ist, ist der Median unempfindlich gegenüber Ausreißern. Die Sprungstelle $F^{-1}(\frac{1}{2})$ zeigt jedoch an, dass der Median sehr stark von den mittleren Werten abhängt. Für die Standard-Weibull-Verteilung (vgl. Abb. 4.1) ist die Sprungstelle gegeben durch $F^{-1}(\frac{1}{2}) = \log 2$.

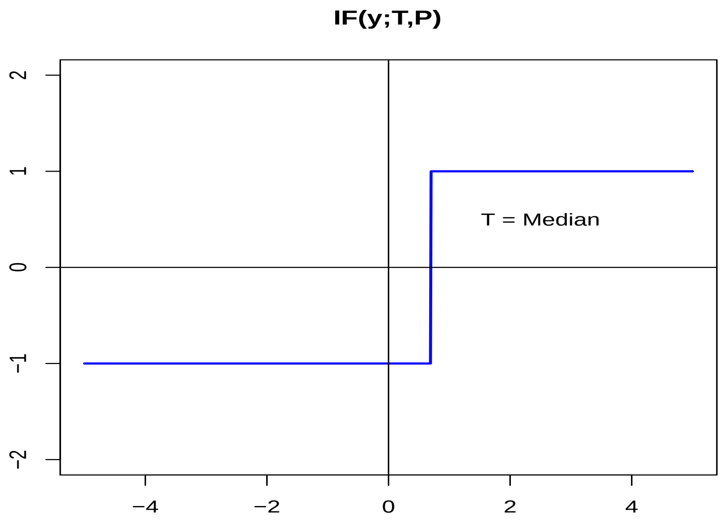

Abb. 4.1: Einflussfunktion des Medians der Standard-Weibull-Verteilung.

Definition 4.1.7 (Lokations-Äquivarianz (vgl. Rousseeuw und Leroy 2003))
Eine Schätzfunktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ *heißt lokations-äquivariant, wenn für alle* $y = (y_1, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ *und alle* $l \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\hat{\theta}(y_1 + l, y_2 + l, \dots, y_N + l) \;=\; \hat{\theta}(y) + l. \tag{4.11}$$

Definition 4.1.8 (Skalen-Äquivarianz (vgl. Rousseeuw und Leroy 2003))
Eine Schätzfunktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ *heißt skalen-äquivariant, wenn für alle* $y = (y_1, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ *und alle* $s \in \mathbb{R}^+$ *gilt:*

$$\hat{\theta}(sy_1, sy_2, \dots, sy_N) \;=\; s\hat{\theta}(y). \tag{4.12}$$

Lemma 4.1.9
Der Median ist lokations- und skalen-äquivariant.

Beweis:
Es wird hier nur für den Fall gezeigt, in dem der Median eindeutig ist, d. h. für N ungerade. Für den anderen Fall geht der Beweis analog.

Lokations-Äquivarianz: Seien $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top$ und $z = (z_1, \ldots, z_N)^\top$ mit $z_n = y_n + l$ für $n = 1, \ldots, N$ und $l \in \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt die Beziehung:

$$\operatorname{med}(z) \;=\; z_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \;=\; y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} + l \;=\; \operatorname{med}(y) + l.$$

Skalen-Äquivarianz: Seien $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top$ und $z = (z_1, \ldots, z_N)^\top$ mit $z_n = s y_n$ für $n = 1, \ldots, N$ und $s \in \mathbb{R}^+$ gegeben, dann gilt:

$$\operatorname{med}(z) \;=\; z_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \;=\; s y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \;=\; s \operatorname{med}(y).$$

□

Satz 4.1.10 (vgl. Rousseeuw und Leroy 2003)
Ist die Schätzfunktion $\hat{\theta}$ lokations-äquivariant, so gilt für den Explosionspunkt:

$$\varepsilon_N^+(\hat{\theta}, y) \;\leq\; \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor \tag{4.13}$$

für alle $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$.

Beweis:
Siehe zum Beispiel Müller, C. (2009a), Seite 25-26, oder Rousseeuw und Leroy (2003), Seite 185-186.

□

Satz 4.1.11
Für den Bruchpunkt des Medians gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\varepsilon_N^*(\operatorname{med}, y) \;=\; \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor. \tag{4.14}$$

Beweis:
„ $\leq$ “ Nach Lemma 4.1.9 ist der Median eine lokations-äquivariante Schätzfunktion, somit folgt mit dem Satz 4.1.10 für den Explosionspunkt: $\varepsilon_N^+(\operatorname{med}, y) \;\leq\; \frac{1}{N}\lfloor\frac{N+1}{2}\rfloor$.

„ $\geq$ “ Seien $y \in \mathbb{R}^N$ und $M := \lfloor\frac{N+1}{2}\rfloor - 1$. Zu zeigen: $\sup\limits_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)} |\operatorname{med}(\tilde{y})| < \infty$.

Sei $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$, d. h. $\tilde{y}$ unterscheidet sich an höchstens M Stellen von y. Außerdem gilt: $\operatorname{med}(y) \in [y_{(1)}, y_{(N)}] =: I$.

1. Fall: Sei N gerade, d. h. der Median ist nicht eindeutig. Für $M = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1 = \frac{N}{2} - 1$ gibt es höchstens $\frac{N}{2} - 1$ Beobachtungen, die kleiner als $y_{(1)}$ sind, d. h. $\tilde{y}_{(\frac{N}{2})} \geq y_{(1)} = \min I$, und höchstens $\frac{N}{2} - 1$ Beobachtungen, die größer als $y_{(N)}$ sind, d. h. $\tilde{y}_{(\frac{N}{2}+1)} \leq y_{(N)} = \max I$. Somit folgt für den Median: $\operatorname{med}(\tilde{y}) \in [\tilde{y}_{(\frac{N}{2})}, \tilde{y}_{(\frac{N}{2}+1)}] \subset I$.

2. Fall: Sei N ungerade, d. h. der Median ist eindeutig. Für $M = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1 = \frac{N-1}{2}$ gibt es wieder höchstens $\frac{N-1}{2}$ Beobachtungen, die kleiner als $y_{(1)}$ sind, d. h. $\tilde{y}_{(\frac{N+1}{2})} \geq y_{(1)} = \min I$, und höchstens $\frac{N-1}{2}$ Beobachtungen, die größer als $y_{(N)}$ sind, d. h. $\tilde{y}_{(\frac{N+1}{2})} \leq y_{(N)} = \max I$. Somit folgt $\operatorname{med}(\tilde{y}) = \tilde{y}_{(\frac{N+1}{2})} \in I$.

In beiden Fällen gilt:

$$|\operatorname{med}(\tilde{y})| \;\leq\; \max(|y_{(1)}|, |y_{(N)}|) \;<\; \infty.$$

□

Bemerkung 4.1.12

Der asymptotische Bruchpunkt des Medians ist gleich 1/2. Denn nach Definition 2.2.5 gilt:

$$\varepsilon^*_A(\operatorname{med}, y) \;=\; \lim_{N\to\infty} \varepsilon^*_N(\operatorname{med}, y) \;\overset{(4.14)}{=}\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor \;=\; \frac{1}{2}.$$

Lemma 4.1.13 (Äquivarianz bzgl. monotoner Transformation)

Sei $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ ein Datensatz eines ordinalskalierten Merkmals Y, sei g eine streng monoton steigende Funktion und $x_1 = g(y_1), \ldots, x_N = g(y_N)$ die Urliste des Merkmals X mit $x = g(y)$, dann gilt für den Median:

$$\operatorname{med}(x) \;=\; g(\operatorname{med}(y)).$$

Beweis:

Sei $x = (x_1, \ldots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt nach der Definition des Populationsmedians:

$$\mathbb{P}\big(x \leq \operatorname{med}(x)\big) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big(x \geq \operatorname{med}(x)\big) \geq \frac{1}{2}. \tag{4.15}$$

Für eine monoton steigende Funktion g mit $x = g(y)$ erhält man somit das Folgende:

$$\mathbb{P}\big(g(y) \leq g(\operatorname{med}(y))\big) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big(g(y) \geq g(\operatorname{med}(y))\big) \geq \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Beispiel 4.1.14
Hier sind ein paar Beispiele der Äquivarianz bzgl. monotoner Transformation:

i) Addition einer beliebigen Konstante.

ii) Multiplikation mit einer positiven Zahl.

iii) Potenzieren mit einer ungeraden Zahl.

iv) Logarithmieren.

v) Bilden der Exponentialfunktion.

4.2 Schätzen mittels der Mediane

Definition 4.2.1 (Methode der Mediane (vgl. He und Fung 1999))
Das Gleichsetzen des Stichprobenmedians der Komponenten der Score-Funktion $\mathcal{S}_\theta(y)$ mit dem Populationsmedian der jeweiligen Komponenten und Lösen der resultierenden Gleichungen wird die Methode der Mediane-Schätzung genannt.

Beispiel 4.2.2 (Methode der Mediane)
Seien die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_N$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit Weibull-Verteilung $Wei(\lambda, \beta)$, die zugehörige Score-Funktion $\mathcal{S}_\theta(y)$ ist im Beispiel 3.3.9 gegeben durch:

$$\mathcal{S}_\theta(y) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\lambda}\left[\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right] \\ \frac{1}{\beta}\left[1 + \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right] \end{pmatrix}.$$

Da die Zufallsvariable $X = \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta$ standard-exponentialverteilt ist (vgl. Lemma 3.1.5), erhält man für den Median von X:

$$\operatorname{med}(X) = \log 2. \tag{4.17}$$

Denn:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x = \log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \log 2.$$

Anwendung der Methode der Mediane-Schätzung (vgl. Definition 4.2.1) auf die erste Komponente der Score-Funktion ergibt:

$$
\begin{aligned}
& & \operatorname{med}\left\{\frac{\beta}{\lambda}\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}-1\right)\right\} &= \operatorname{med}\left\{\frac{\beta}{\lambda}(X-1)\right\} \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} & \frac{\beta}{\lambda}\operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}-1\right\} &= \frac{\beta}{\lambda}\operatorname{med}\{(X-1)\} \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} & \operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}-1 &= \operatorname{med}(X)-1 \\
&\Leftrightarrow & \operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right\} &= \operatorname{med}(X) \\
&\overset{(4.17)}{\Leftrightarrow} & \operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right\} &= \log 2.
\end{aligned}
$$

Anwendung der Methode der Mediane auf die zweite Komponente der Score-Funktion liefert:

$$
\begin{aligned}
& & \operatorname{med}\left\{\frac{1}{\beta}\left[1+\left(1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]\right\} &= \operatorname{med}\left\{\frac{1}{\beta}[1+(1-X)\log X]\right\} \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} & \frac{1}{\beta}\operatorname{med}\left\{1+\left(1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right\} &= \frac{1}{\beta}\operatorname{med}\left\{1+(1-X)\log X\right\} \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} & \operatorname{med}\left\{\left(1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right\}+1 &= \operatorname{med}\left\{(1-X)\log X\right\}+1 \\
&\Leftrightarrow & \operatorname{med}\left\{\left(1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right\} &= c,
\end{aligned}
$$

wobei $c = \operatorname{med}((1-X)\log X) \approx -0.51$ (vgl. He und Fung 1999).

Somit genügen $(\hat{\lambda}, \hat{\beta})$ nach der Methode der Mediane-Schätzung den folgenden Gleichungen

$$
\operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right\} = \log 2, \tag{4.18}
$$

und

$$
\operatorname{med}\left\{\left(1-\left(\frac{y}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\log\left(\left(\frac{y}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\right\} = c. \tag{4.19}
$$

Aus der Gleichung (4.18) und mit Hilfe von Lemma 4.1.13 wegen der Äquivarianz bzgl. monotoner Transformation des Medians erhält man für den Skalen-Parameter λ die folgende Schätzung:

$$\begin{aligned} && \operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right\} &= \log 2 \\ \overset{\text{Lemma 4.1.13}}{\Leftrightarrow} && \operatorname{med}\left\{\left(\frac{y}{\hat{\lambda}}\right)\right\} &= (\log 2)^{1/\hat{\beta}} \\ \overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} && \frac{1}{\hat{\lambda}}\operatorname{med}(y) &= (\log 2)^{1/\hat{\beta}} \\ \Leftrightarrow && \hat{\lambda} &= \frac{\operatorname{med}(y)}{(\log 2)^{1/\hat{\beta}}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Weiterhin lässt sich die Berechnung der Weibull-Parameter reduzieren, indem man nur noch die Gleichung (4.19) mit dem Gestalts-Parameter β löst. D. h.

$$\begin{aligned} && \operatorname{med}\left\{\left(1-\left(y\Big/\frac{\operatorname{med}(y)}{(\log 2)^{1/\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\log\left(\left(y\Big/\frac{\operatorname{med}(y)}{(\log 2)^{1/\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\right\} &= c \\ \Leftrightarrow && \operatorname{med}\left\{\left(1-\log 2\left(\frac{y}{M_N}\right)^{\hat{\beta}}\right)\log\left(\log 2\left(\frac{y}{M_N}\right)^{\hat{\beta}}\right)\right\} &= c. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Dabei ist $M_N := \operatorname{med}(y)$ und $c \approx -0.51$.

In den meisten Fällen ist die linke Seite von (4.21) eine monoton fallende Funktion von β, für die es einfacher ist, eine Lösung zu finden. In dem anderen Fall, in dem die Hälfte oder mehr als die Hälfte der Beobachtungen den gleichen Wert haben, kann keine Lösung gefunden werden. In diesem Fall ist das Weibull-Modell nicht geeignet.

Definition 4.2.3 (Signumfunktion eines Vektors)
Die Signumfunktion eines Vektors $y = (y_1, \dots, y_N)^\top$ ist der Vektor bestehend aus den Signumfunktionen der Komponenten für jede Variable, d. h.

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y_1) \\ \operatorname{sgn}(y_2) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(y_N) \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Bemerkung 4.2.4
Die Methode der Mediane-Schätzung gehört zu den M-Schätzungen (vgl. Hampel et al. 1986) in der Form von

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y_n) - m_\theta) \;=\; 0, \tag{4.23}$$

wobei m_θ durch die Konsistenz Anforderung

$$\mathrm{E}\big[\operatorname{sgn}(\mathcal{S}_\theta(Y) - m_\theta)\big] = 0 \tag{4.24}$$

zu bestimmen ist.

Satz 4.2.5 (vgl. He und Fung 1999)
Sei Y eine Weibull-verteilte Zufallsvariable mit den Parametern λ und β. Dann gilt für die Einflussfunktion der Methode der Mediane-Schätzung:

$$IF(y;\theta_{\mathrm{MM}}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; \begin{pmatrix} 1.4207\,\dfrac{\lambda}{\beta} & -0.0601\,\dfrac{\lambda}{\beta} \\[2ex] 0.4314\,\beta & 1.1767\,\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta} - \log 2\right) \\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\left(1-\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right) - c\right) \end{pmatrix},$$

wobei $c \approx -0.51$ ist.

Beweis:
Seien die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_N$ stochastich unabhängig und identisch verteilt mit Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$. Unter Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1), die die Vertauschung von Differentiation und Integration erlauben, geht die Berechnung der Einflussfunktion vorteilhaft mit dem Satz 3.3.7, d. h. für die Methode der Mediane-Schätzung mit $\theta = (\lambda, \beta)^\top$ gilt:

$$IF(y;\theta_{\mathrm{MM}}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; -V^{-1}\operatorname{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y) - m_\theta),$$

wobei die 2×2-Matrix V wie folgt gegeben ist (vgl. auch Hampel et al. 1986, Seite 231):

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\partial\,\mathrm{E}_\theta\big[\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_t(Y)-m_t)\big]}{\partial t}\bigg|_{t=\theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\int \mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y)-m_\theta)f_\theta(y)dy \\
&\overset{\text{Reg. Bed.}}{=} \int \mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y)-m_\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(y)dy \\
&= \int \mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y)-m_\theta)\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(y)}{f_\theta(y)}f_\theta(y)dy \qquad (4.25)\\
&= \int \mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y)-m_\theta)\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(y)\Big)f_\theta(y)dy \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(Y)-m_\theta)\mathcal{S}_\theta(Y)\big]. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

In der Gleichung (4.25) wird mit der Dichtefunktion $f_\theta(y)$ erweitert.

Nach der Methode der Mediane-Schätzung (vgl. Beispiel 4.2.2) und durch die Konsistenz Anforderung $\mathrm{E}\big[\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(Y)-m_\theta)\big]=0$ (vgl. Bemerkung 4.2.4) erhält man $\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y)-m_\theta)$ mit $m_\theta=(m_\lambda,m_\beta)^\top$ wie folgt:

Zunächst wird m_λ bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\lambda(y)-m_\lambda) = 0 \quad &\overset{(3.53)}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{med}\{m_\lambda\} = \mathrm{med}\Big\{\frac{\beta}{\lambda}\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta-1\Big)\Big\} \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{\Leftrightarrow} \quad m_\lambda = \frac{\beta}{\lambda}\Big[\mathrm{med}\Big\{\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta\Big\}-1\Big] \\
&\overset{(4.18)}{\Leftrightarrow} \quad m_\lambda = \frac{\beta}{\lambda}\Big[\log 2-1\Big]. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Anschließend erhält man ebenfalls mit Hilfe von Lemma 4.1.9 für m_β:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(\mathcal{S}_\beta(y)-m_\beta) = 0 \quad &\overset{(3.53)}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{med}\{m_\beta\} = \mathrm{med}\Big\{\frac{1}{\beta}\Big[1+\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta\Big)\log\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta\Big)\Big]\Big\} \\
&\Leftrightarrow \quad m_\beta = \frac{1}{\beta}\Big[\mathrm{med}\Big\{\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta\Big)\log\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta\Big)\Big\}+1\Big] \\
&\overset{(4.19)}{\Leftrightarrow} \quad m_\beta = \frac{1}{\beta}\Big[c+1\Big]. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Damit erhält man insgesamt für

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\mathcal{S}_\theta(y) - m_\theta) &= \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\frac{\beta}{\lambda}\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right) - \frac{\beta}{\lambda}\left[\log 2 - 1\right]\right) \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\beta}\left[1 + \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right] - \frac{1}{\beta}\left[c+1\right]\right) \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\lambda} \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - 1 - (\log 2 - 1)\right) \\ \frac{1}{\beta} \operatorname{sgn}\left(1 + \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) - (c+1)\right) \end{pmatrix} \\
&\overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta - \log 2\right) \\ \operatorname{sgn}\left(\left(1 - \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\beta\right) - c\right) \end{pmatrix}. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die Gleichheit in $(*)$ und $(**)$ wegen $\lambda, \beta > 0$.

Berechnung der Matrix V: Für das erste Diagonalelement gilt:

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda\lambda} &= \mathrm{E}\Big[\operatorname{sgn}\left(\mathcal{S}_\lambda(Y) - m_\lambda\right) \mathcal{S}_\lambda(Y)\Big] \\
&\overset{(4.29)}{\underset{(3.53)}{=}} \mathrm{E}\left[\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right) \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - \log 2\right)\right] \\
&\overset{\text{Lemma } 3.1.5}{=} \frac{\beta}{\lambda} \mathrm{E}\Big[(X-1) \operatorname{sgn}\big(X - \log 2\big)\Big]. \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist die Zufallsvariable X exponentialverteilt mit dem Parameter $\mu = 1$ (vgl. Lemma 3.1.5).

Die Nebendiagonalelemente lassen sich wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
V_{\beta\lambda} &= \mathrm{E}\Big[\operatorname{sgn}\left(\mathcal{S}_\beta(Y) - m_\beta\right) \mathcal{S}_\lambda(Y)\Big] \\
&\overset{(4.29)}{\underset{(3.53)}{=}} \mathrm{E}\left[\frac{\beta}{\lambda}\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - 1\right) \operatorname{sgn}\left(\left(1 - \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right) - c\right)\right] \\
&\overset{\text{Lemma } 3.1.5}{=} \frac{\beta}{\lambda} \mathrm{E}\Big[(X-1) \operatorname{sgn}\big(\log X - X \log X - c\big)\Big]. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda\beta} &= \mathrm{E}\Big[\operatorname{sgn}\left(\mathcal{S}_\lambda(Y) - m_\lambda\right) \mathcal{S}_\beta(Y)\Big] \\
&\overset{(4.29)}{\underset{(3.53)}{=}} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\beta}\left(1 + \log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\left(1 - \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right) \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta - \log 2\right)\right] \\
&\overset{\text{Lemma 3.1.5}}{=} \frac{1}{\beta}\,\mathrm{E}\Big[\big(1 + \log X - X \log X\big) \operatorname{sgn}\big(X - \log 2\big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Für das zweite Hauptdiagonalelement gilt ebenso mit Hilfe von Lemma 3.1.5:

$$
\begin{aligned}
V_{\beta\beta} &= \mathrm{E}\Big[\operatorname{sgn}\left(\mathcal{S}_\beta(Y) - m_\beta\right) \mathcal{S}_\beta(Y)\Big] \\
&\overset{(4.29)}{\underset{(3.53)}{=}} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\beta}\left(1 + \log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\left(1 - \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right)\right) \operatorname{sgn}\left(\left(1 - \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right) \log\left(\left(\frac{Y}{\lambda}\right)^\beta\right) - c\right)\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\,\mathrm{E}\Big[\big(1 + \log X - X \log X\big) \operatorname{sgn}\big(\log X - X \log X - c\big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Numerische Berechnungen der Erwartungswerte liefern (vgl. He und Fung 1999):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\big(X - 1\big) \operatorname{sgn}\big(X - \log 2\big)\Big] &\approx -0.6931 \\
\mathrm{E}\Big[\big(X - 1\big) \operatorname{sgn}\big(\log X - X \log X - c\big)\Big] &\approx -0.0354 \\
\mathrm{E}\Big[\big(1 + \log X - X \log X\big) \operatorname{sgn}\big(X - \log 2\big)\Big] &\approx 0.2541 \\
\mathrm{E}\Big[\big(1 + \log X - X \log X\big) \operatorname{sgn}\big(\log X - X \log X - c\big)\Big] &\approx -0.8368.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich die Matrix V als:

$$
V = \begin{pmatrix} -0.6931\,\beta/\lambda & 0.2541/\beta \\ -0.0354\,\beta/\lambda & -0.8368/\beta \end{pmatrix}. \tag{4.34}
$$

Berechnung der Inversen der Matrix V ergibt:

$$
V^{-1} = \begin{pmatrix} -1.4207\,\lambda/\beta & 0.0601\,\lambda/\beta \\ -0.4314\,\beta & -1.1767\,\beta \end{pmatrix}. \tag{4.35}
$$

Die Einflussfunktion der Methode der Mediane-Schätzung der Weibull-Parameter ist:

$$IF(y;\theta_{\text{MM}},P_{\lambda,\beta}) \;=\; \begin{pmatrix} 1.4207\,\dfrac{\lambda}{\beta} & -0.0601\,\dfrac{\lambda}{\beta} \\[2ex] 0.4314\,\beta & 1.1767\,\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta} - \log 2\right) \\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\left(1-\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\log\left(\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\beta}\right) - c\right) \end{pmatrix}.$$

Diese ist beschränkt für alle $y \in (0,\infty)$.

□

Satz 4.2.6 (vgl. He und Fung 1999)
Für den Bruchpunkt der Methode der Mediane-Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$*:*

$$\varepsilon_N^*(\hat{\theta}_{\text{MM}},y) \;=\; \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor. \tag{4.36}$$

Beweis:
Siehe He, X., Fung, W. K. (1999). Method of medians for lifetime data with Weibull models. *Statistics in Medicine 18,* 1993-2009.

□

Kapitel 5

Methode der Quantil-Schätzung

Dieses Kapitel befasst sich mit der Quantil-Schätzung der Weibull-Parameter. Dabei wird zunächst die Beziehung der Weibull-Verteilung zu der log-Weibull-Verteilung betrachtet und danach werden für das Quantil die Einflussfunktion und der Bruchpunkt hergeleitet.

Als Hauptresultat wird eines der Ergebnisse von Boudt et al. (2009) vorgestellt, nämlich dass die Einflussfunktionen der Methode der Quantil-Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung beschränkt sind und dass diese Schätzungen einen hohen Bruchpunkt besitzen.

5.1 Einführung

Für die Quantil-Schätzung der Weibull-Parameter λ und β wird die Logarithmische-Weibull-Verteilung (kurz log-Weibull) betrachtet. Die log-Weibull-Verteilung steht in engem Zusammenhang zur Weibull-Verteilung und ist wie folgt definiert: Wenn der Logarithmus einer Zufallsvariable Y Weibull-verteilt ist ($\log Y = Z$), so heißt Z log-Weibull-verteilt.

Die Dichtefunktion der log-Weibull-Verteilung ergibt sich aus dem Transformationssatz für Dichten mit $z = \log y$ (vgl. Müller 2007. Satz 4.12 Seite 50). Also

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\log Y \leq z) = \mathbb{P}\big(Y \leq \exp(z)\big) \\ &= F_Y\big(\exp(z)\big) = 1 - \exp\left[-\Big(\frac{\exp(z)}{\lambda}\Big)^{\beta}\right]. \end{aligned}$$

Sei Z eine Zufallsvariable, dann ist die log-Weibull-Verteilungsfunktion $G_{\lambda,\beta}(z)$ einer Lokations- und Skalen-Familie mit den Parametern $\mu = \log\lambda$ und $\sigma = 1/\beta$ gegeben durch

$$G_{\lambda,\beta}(z) \;=\; 1 - \exp\Big[-\exp\Big(\frac{z-\mu}{\sigma}\Big)\Big]. \tag{5.1}$$

Für die Dichtefunktion der log-Weibull-Verteilung gilt:

$$g_{\lambda,\beta}(z) \;=\; \frac{1}{\sigma}\exp\Big(\frac{z-\mu}{\sigma}\Big)\exp\Big[-\exp\Big(\frac{z-\mu}{\sigma}\Big)\Big], \tag{5.2}$$

wobei $z, \mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Bemerkung 5.1.1

Im Weiteren wird mit $G(z) := G_{1,1}(z)$ die Verteilungsfunktion der Standard-log-Weibull-Verteilung bezeichnet, d. h. eine log-Weibull-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 1$ und $\beta = 1$. Ebenfalls bezeichnet $g(z) := g_{1,1}(z)$ die Dichtefunktion der Standard-log-Weibull-Verteilung.

Satz 5.1.2

Gegeben sei die Zufallsvariable $Z = \log Y$, dann gilt für die log*-Weibull-Verteilung $G_{\lambda,\beta}$ von Z mit den Lokations-Skalen-Parametern $\mu = \log\lambda$ und $\sigma = 1/\beta$:*

$$G_{\lambda,\beta}(\log y) \;=\; F_{\lambda,\beta}(y) \;=\; G\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big), \tag{5.3}$$

für alle $y > 0$.

Beweis:

Sei $Z = \log Y$ eine log-Weibull-verteilte Zufallsvariable mit den Parametern λ und β. Weiterhin seien die Lokations-Skalen-Parameter durch $\mu = \log\lambda$ und $\sigma = 1/\beta$ gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned}
G_{\lambda,\beta}(\log y) &\overset{(5.1)}{=} 1 - \exp\Big[-\exp\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big)\Big] \\
&= 1 - \exp\Big[-\exp\Big(\frac{\log y - \log\lambda}{\beta^{-1}}\Big)\Big] \\
&= 1 - \exp\Big[-\exp\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}\Big] \\
&= 1 - \exp\Big[-\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}\Big] \\
&\overset{(3.2)}{=} F_{\lambda,\beta}(y).
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 1$ und $\beta = 1$ erhält man:

$$G_{\lambda,\beta}(\log y) \;=\; G\Big(\frac{\log y - \log \lambda}{\beta^{-1}}\Big) \;=\; G\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big).$$

□

Lemma 5.1.3

Das α-Quantil der log*-Weibull-verteilten Zufallsvariable Z mit den Parametern λ und β ist gegeben durch*

$$G^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) \;=\; \beta^{-1}\log\big[-\log(1-\alpha)\big] + \log\lambda. \tag{5.4}$$

*Weiterhin gilt der folgende lineare Zusammenhang zwischen dem α-Quantil der allgemeinen und der Standard-*log*-Weibull-Verteilung:*

$$G^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) \;=\; \beta^{-1}G^{-1}(\alpha) + \log\lambda. \tag{5.5}$$

Beweis:

Nach Lemma 4.1.5 gilt für das α-Quantil der Weibull-verteilten Zufallsvariable Y die folgende Beziehung $F^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) = \lambda\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}$. Das α-Quantil der log-Weibull-Verteilung erhält man nun, wenn man das α-Quantil der Weibull-Verteilung logarithmiert:

$$\begin{aligned} G^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha) &= \log\big(F^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha)\big) \\ &= \log\Big[\lambda\big(-\log(1-\alpha)\big)^{1/\beta}\Big] \\ &= \log\lambda + \log\big(-\log(1-\alpha)\big)^{1/\beta} \\ &= \beta^{-1}\log\big[-\log(1-\alpha)\big] + \log\lambda. \end{aligned}$$

Wenn man $\lambda = 1$ und $\beta = 1$ in der Gleichung (5.4) einsetzt, dann erhält man das Folgende:

$$G^{-1}_{1,1}(\alpha) \;=\; \log\big[-\log(1-\alpha)\big] \;=\; G^{-1}(\alpha). \tag{5.6}$$

Durch Einsetzen der Gleichung (5.6) in (5.4) erhält man den gewünschten linearen Zusammenhang.

□

Lemma 5.1.4 (vgl. Staudte und Sheather 1990)
Die Einflussfunktion des α-Quantil-Funktionals Q_α ist gegeben durch:

$$IF(y; Q_\alpha, P) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1}{f(F^{-1}(\alpha))}, & \text{für} \quad y < F^{-1}(\alpha), \\ \dfrac{\alpha}{f(F^{-1}(\alpha))}, & \text{für} \quad y > F^{-1}(\alpha), \end{cases} \tag{5.7}$$

wobei f die Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung P, $f(F^{-1}(\alpha)) \neq 0$ und $Q_\alpha(P) = F^{-1}(\alpha)$ das Quantil-Funktional von P bezeichnen.

Beweis:
Sei nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P mit Verteilungsfunktion F und mit stetiger und positiver Dichtefunktion f so gegeben, dass $Q_\alpha(P) = F^{-1}(\alpha)$ für festes $\alpha \in (0,1)$ gilt. Weiterhin sei $F_t = (1-t)F + t\delta_y$. Man betrachte nun $y \neq F^{-1}(\alpha)$ und $t < |\alpha - F(y)|$, dann gilt: $F_t \circ F_t^{-1}(\alpha) = F_t(F_t^{-1}(\alpha)) = \alpha$. Mit anderen Worten

$$(1-t)F(F_t^{-1}(\alpha)) + t\delta_y(F_t^{-1}(\alpha)) \;=\; \alpha.$$

Differentiation der beiden Seiten nach t

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)F(F_t^{-1}(\alpha)) + t\delta_y(F_t^{-1}(\alpha))\right] \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\alpha$$

liefert

$$-F(F_t^{-1}(\alpha)) + (1-t)f(F_t^{-1}(\alpha))\frac{\partial}{\partial t}F_t^{-1}(\alpha) + \delta_y(F_t^{-1}(\alpha)) + t\delta_y\frac{\partial}{\partial t}F_t^{-1}(\alpha) \;=\; 0.$$

Für $t = 0$ erhält man:

$$-\alpha + f(F^{-1}(\alpha))\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}(\alpha) + \delta_y(F^{-1}(\alpha)) \;=\; 0.$$

Für die Einflussfunktion des α-Quantil-Funktionals:

$$IF(y; Q_\alpha, P) \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial t}F_t^{-1}(\alpha)\right|_{t=0}$$

erhält man insgesamt für alle $y \neq F^{-1}(\alpha)$:

$$IF(y; Q_\alpha, P) \;=\; \frac{\alpha - 1_{\{y<F^{-1}(\alpha)\}}}{f(F^{-1}(\alpha))} \;=\; \frac{\alpha - I_{[y<Q_\alpha(P)]}}{f(Q_\alpha(P))}, \tag{5.8}$$

wobei $I_{[\,.\,]}$ die Indikatorfunktion bezeichnet.

□

Satz 5.1.5
Für den Bruchpunkt des α-Quantils gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\varepsilon_N^*(\tilde{y}_\alpha, y) \;=\; \frac{1}{N}\lceil \min(\alpha, 1-\alpha)N \rceil. \tag{5.9}$$

Beweis:
Hier wird der Bruchpunkt des α-Quantils nur für den Fall $\alpha \leq 0.5$ gezeigt. Für den anderen Fall $\alpha > 0.5$ geht der Beweis analog.

„ $\geq$ “ : Seien $y \in \mathbb{R}^N$ und $M := \lceil \alpha N \rceil - 1$. Zu zeigen: $\sup\limits_{\hat{y} \in \mathcal{Y}_M(y)} |\tilde{\hat{y}}_\alpha| \;<\; \infty$.

Sei $\hat{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$, d. h. $\hat{y}$ unterscheidet sich an höchstens M Stellen von y. Außerdem gilt: $\tilde{y}_\alpha \in [y_{(1)}, y_{(N)}] =: I$.

1. Fall: $\alpha N \in \mathbb{N}$

Für $M = \alpha N - 1$ gibt es höchstens $\alpha N - 1$ Beobachtungen, die kleiner als $y_{(1)}$ sind, also

$$\hat{y}_{(\alpha N)} \;\geq\; y_{(1)} \;=\; \min I$$

und höchstens $\alpha N - 1$ Beobachtungen, die größer als $y_{(N)}$ sind, d. h.

$$\hat{y}_{(\alpha N+1)} \;\leq\; y_{(N)} \;=\; \max I.$$

Somit gilt:

$$\tilde{\hat{y}}_\alpha \;\in\; [\hat{y}_{(\alpha N)}, \hat{y}_{(\alpha N+1)}] \;\in I.$$

2. Fall: $\alpha N \notin \mathbb{N}$

Für $M = \lceil \alpha N \rceil - 1 \;<\; \lceil \alpha N \rceil$ gibt es weniger als $\lceil \alpha N \rceil$ Beobachtungen, die kleiner als $y_{(1)}$ sind, also

$$\hat{y}_{(\lceil \alpha N \rceil)} \;\geq\; y_{(1)} \;=\; \min I$$

und weniger als $\lceil \alpha N \rceil$ Beobachtungen, die größer als $y_{(N)}$ sind, d. h.

$$\hat{y}_{(\lceil \alpha N \rceil)} \;\leq\; y_{(N)} \;=\; \max I.$$

Somit gilt:

$$\tilde{\hat{y}}_\alpha \;=\; \hat{y}_{(\lceil \alpha N \rceil)} \;\in I.$$

In beiden Fällen folgt:

$$|\tilde{\hat{y}}_\alpha| \;\leq\; \max(|y_{(1)}|, |y_{(N)}|) \;<\; \infty.$$

„ $\leq$ “ : Seien $y \in \mathbb{R}^N$ und $M := \lceil \alpha N \rceil$. Zu zeigen: $\sup\limits_{\hat{y} \in \mathcal{Y}_M(y)} |\tilde{\hat{y}}_\alpha| = \infty$.

1. Fall: $\alpha N \in \mathbb{N}$

Seien $M = \alpha N$ und $\tilde{y}_\alpha \in [y_{(\alpha N)}, y_{(\alpha N+1)}]$. Sind $y_{n_1}, \ldots, y_{n_M}$ die M kleinsten Beobachtungen und setzt man $\hat{y}_{n_i} = y_{n_i} - l$ für $i = 1, \ldots, M$, dann gilt:

$$|\tilde{\hat{y}}_\alpha| = |y_{(\alpha N)} - l| \overset{l \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

2. Fall: $\alpha N \notin \mathbb{N}$

Seien $M = \lceil \alpha N \rceil$ und $\tilde{y}_\alpha = y_{(M)}$. Sind $y_{n_1}, \ldots, y_{n_M}$ die M kleinsten Beobachtungen und setzt man $\hat{y}_{n_i} = y_{n_i} - l$ für $i = 1, \ldots, M$, dann gilt:

$$|\tilde{\hat{y}}_\alpha| = |y_{(\lceil \alpha N \rceil)} - l| \overset{l \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

$\square$

Bemerkung 5.1.6
Der asymptotische Bruchpunkt des α-Quantils ist gleich $\min(\alpha, 1-\alpha)$. Denn:

$$\varepsilon_A^*(\tilde{y}_\alpha, y) = \lim_{N \to \infty} \varepsilon_N^*(\tilde{y}_\alpha, y) \overset{(5.9)}{=} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \lceil \min(\alpha, 1-\alpha) N \rceil = \min(\alpha, 1-\alpha).$$

5.2 Schätzen mittels Quantilen

Sei nun $\hat{q}_\alpha$ das empirische α-Quantil der Beobachtungen $y_1, \ldots, y_N$ (vgl. Marks 2005). Aus der Gleichung (5.5) folgt, dass die Differenz zwischen den log's zweier Weibull-Quantilen q_{α_1} und q_{α_2} $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1)$ nur von dem Gestalts-Parameter β abhängt.

Wenn die theoretischen Quantile $G^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha_1)$ und $G^{-1}_{\lambda,\beta}(\alpha_2)$ in (5.5) durch die entsprechenden empirischen Quantile $\log \hat{q}_{\alpha_1}$ und $\log \hat{q}_{\alpha_2}$ ersetzt werden, dann erhält man $\hat{\beta}_Q$ den Quantil-Schätzer des Gestalts-Parameters β.

$$\begin{aligned} \log \hat{q}_{\alpha_1} &= \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_1) + \log \lambda. \\ \log \hat{q}_{\alpha_2} &= \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_2) + \log \lambda. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\log \lambda \;=\; \log \hat{q}_{\alpha_1} - \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_1). \tag{5.10}$$

$$\log \lambda \;=\; \log \hat{q}_{\alpha_2} - \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_2). \tag{5.11}$$

Gleichsetzen von (5.10) und (5.11) ergibt:

$$\begin{aligned}
& & \log \hat{q}_{\alpha_1} - \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_1) &= \log \hat{q}_{\alpha_2} - \hat{\beta}_Q^{-1} G^{-1}(\alpha_2) \\
\Leftrightarrow & & \hat{\beta}_Q^{-1}\big(G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)\big) &= \log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1} \\
\Leftrightarrow & & \hat{\beta}_Q &= \frac{G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)}{\log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1}}.
\end{aligned}$$

Den Quantil-Schätzer $\hat{\lambda}_Q$ des Skalen-Parameters λ erhält man nun wie folgt: Wieder Ersetzen der theoretischen Quantile durch die entsprechenden empirischen Quantile in der Gleichung (5.5).

$$\begin{aligned}
& & \log \hat{q}_\alpha &= \hat{\beta}_Q^{-1} \log\big[-\log(1-\alpha)\big] + \log \hat{\lambda}_Q \\
\Leftrightarrow & & \log \hat{q}_\alpha - \log \hat{\lambda}_Q &= \hat{\beta}_Q^{-1} \log\big[-\log(1-\alpha)\big] \\
\Leftrightarrow & & \log\Big(\frac{\hat{q}_\alpha}{\hat{\lambda}_Q}\Big) &= \log\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\hat{\beta}_Q} \\
\Leftrightarrow & & \frac{\hat{q}_\alpha}{\hat{\lambda}_Q} &= \big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\hat{\beta}_Q} \\
\Leftrightarrow & & \hat{\lambda}_Q &= \frac{\hat{q}_\alpha}{\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\hat{\beta}_Q}}.
\end{aligned}$$

Definition 5.2.1 (Quantil-Schätzer (vgl. Boudt et al. 2009))
Für $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ ist der Quantil-Schätzer des Gestalts-Parameters β gegeben durch:

$$\hat{\beta}_Q \;=\; \frac{G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)}{\log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1}}, \tag{5.12}$$

wobei $G^{-1}(\alpha_1)$ und $G^{-1}(\alpha_2)$ den theoretischen Quantilen der Standard-log-*Weibull-Verteilung und $\hat{q}_{\alpha_1}$ und $\hat{q}_{\alpha_2}$ den empirischen Quantilen entsprechen. Der Quantil-Schätzer des Skalen-Parameters λ ist gegeben durch:*

$$\hat{\lambda}_Q \;=\; \frac{\hat{q}_\alpha}{\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\hat{\beta}_Q}}, \tag{5.13}$$

dabei ist $\alpha \in (0,1)$.

Satz 5.2.2 (vgl. Boudt et al. 2009)
Die Einflussfunktion der Quantil-Schätzung des Gestalts-Parameters β der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ ist gegeben durch

$$IF(y;\beta_Q,P_{\lambda,\beta}) \;=\; \frac{-[G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)]}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})/Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})]\}^2}\left(\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{\lambda,\beta})}{Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})}-\frac{IF(y;Q_{\alpha_1},P_{\lambda,\beta})}{Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})}\right).$$

Beweis:
Sei $P_t=(1-t)P_{\lambda,\beta}+t\delta_y$, dann gilt nach Definition der Einflussfunktion:

$$IF(y;\beta_Q,P_{\lambda,\beta}) \;=\; \left.\frac{\partial\beta_Q(P_t)}{\partial t}\right|_{t=0} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\beta_Q((1-t)P_{\lambda,\beta}+t\delta_y)|_{t=0}.$$

Das zugehörige Funktional des Gestalts-Parameter-Schätzers $\hat\beta_Q$ (vgl. Definition 5.2.1) ist gegeben durch

$$\beta_Q(P) \;=\; \frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\log[Q_{\alpha_2}(P)/Q_{\alpha_1}(P)]}\;.$$

Damit erhält man für die Einflussfunktion:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\beta_Q(P_t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\log[Q_{\alpha_2}(P_t)/Q_{\alpha_1}(P_t)]}\right|_{t=0}\\
&= -\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_t)/Q_{\alpha_1}(P_t)]\}^2|_{t=0}}\partial/\partial t\{\log[Q_{\alpha_2}(P_t)/Q_{\alpha_1}(P_t)]\}|_{t=0}\\
&= -\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})/Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})]\}^2}\partial/\partial t\{\log[Q_{\alpha_2}(P_t)]-\log[Q_{\alpha_1}(P_t)]\}|_{t=0}\\
&= -\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})/Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})]\}^2}\left\{\frac{\partial/\partial t[Q_{\alpha_2}(P_t)]|_{t=0}}{Q_{\alpha_2}(P_t)|_{t=0}}-\frac{\partial/\partial t[Q_{\alpha_1}(P_t)]|_{t=0}}{Q_{\alpha_1}(P_t)|_{t=0}}\right\}\\
&= -\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})/Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})]\}^2}\left\{\frac{\partial/\partial t[Q_{\alpha_2}(P_t)]|_{t=0}}{Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})}-\frac{\partial/\partial t[Q_{\alpha_1}(P_t)]|_{t=0}}{Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})}\right\}\\
&= -\frac{G^{-1}(\alpha_2)-G^{-1}(\alpha_1)}{\{\log[Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})/Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})]\}^2}\left(\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{\lambda,\beta})}{Q_{\alpha_2}(P_{\lambda,\beta})}-\frac{IF(y;Q_{\alpha_1},P_{\lambda,\beta})}{Q_{\alpha_1}(P_{\lambda,\beta})}\right).
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

Satz 5.2.3 (vgl. Boudt et al. 2009)
Die Einflussfunktion der Quantil-Schätzung des Skalen-Parameters λ der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ lautet:

$$\begin{aligned} IF(y;\lambda_Q,P_{\lambda,\beta}) \;&=\; [-\log(1-\alpha)]^{-2/\beta}\Big[IF(y;Q_\alpha,P_{\lambda,\beta})\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta} \\ &\quad + \beta^{-2}Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})\big[\log(-\log(1-\alpha))\big]\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}IF(y;\beta_Q,P_{\lambda,\beta})\Big]. \end{aligned}$$

Beweis:
Das zugehörige Funktional des Skalen-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ (vgl. Definition 5.2.1) ist gegeben durch

$$\lambda_Q(P) \;=\; \frac{Q_\alpha(P)}{[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta_Q(P)}}\;.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &IF(y;\lambda_Q,P_{\lambda,\beta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\lambda_Q(P_t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{Q_\alpha(P_t)}{[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta_Q(P_t)}}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\partial/\partial t\; Q_\alpha(P_t)|_{t=0}\;[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta} - Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})\;\partial/\partial t\;[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta_Q(P_t)}|_{t=0}}{\{[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta_Q(P_t)}\}^2|_{t=0}} \\ &= [-\log(1-\alpha)]^{-2/\beta}\bigg[\frac{\partial}{\partial t}\;Q_\alpha(P_t)\Big|_{t=0}[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta} \\ &\qquad -\;Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})\frac{\partial}{\partial t}\;[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta_Q(P_t)}\Big|_{t=0}\bigg] \\ &= [-\log(1-\alpha)]^{-2/\beta}\Big[IF(y;Q_\alpha,P_{\lambda,\beta})[-\log(1-\alpha)]^{1/\beta} \\ &\qquad -\;Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\beta_Q(P_t)}\Big|_{t=0}\big[\log(-\log(1-\alpha))\big][-\log(1-\alpha)]^{1/\beta}\Big] \\ &= [-\log(1-\alpha)]^{-2/\beta}\Big[IF(y;Q_\alpha,P_{\lambda,\beta})\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta} \\ &\qquad +\;\beta^{-2}Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})\big[\log(-\log(1-\alpha))\big]\big[-\log(1-\alpha)\big]^{1/\beta}IF(y;\beta_Q,P_{\lambda,\beta})\Big]. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Satz 5.2.4 (vgl. Boudt et al. 2009)
Der asymptotische Bruchpunkt der Quantil-Schätzung $\hat{\beta}_Q$ des Gestalts-Parameters β ist gleich

$$\min(\alpha_2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \alpha_1). \tag{5.14}$$

Der höchstmögliche Bruchpunkt für diesen Schätzer ist 1/3 und wird erreicht für $\alpha_1 = 1/3$ und $\alpha_2 = 2/3$.

Beweis:
Sei $y \in \mathbb{R}^N$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit, gilt für die Quantile α_1 und α_2 das Folgende: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.
1. Behauptung: Für den Explosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^+(\hat{\beta}_Q, y) = \frac{1}{N}\lceil(\alpha_2 - \alpha_1)N\rceil$.

Beweis: Nach der Definition 5.2.1 gilt für den Quantil-Schätzer $\hat{\beta}_Q$ des Gestalts-Parameters β:

$$\hat{\beta}_Q = \frac{G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)}{\log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1}}.$$

Der Gestalts-Parameter-Schätzer $\hat{\beta}_Q$ explodiert, falls die empirischen Weibull-Quantile gleich sind, d. h. wenn $\hat{q}_{\alpha_2} = \hat{q}_{\alpha_1}$ gilt. Dies geschieht, falls ein Anteil $(\alpha_2 - \alpha_1)$ der Beobachtungen an der gleichen Stelle platziert wird, wie bei dem empirischen Quantil $\hat{q}_{\alpha_1}$. Also

$$\frac{G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)}{\log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1}} \quad \xrightarrow{\hat{q}_{\alpha_2} = \hat{q}_{\alpha_1}} \quad \infty.$$

2. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^-(\hat{\beta}_Q, y) = \frac{1}{N}\lceil\min(1-\alpha_2, \alpha_1)N\rceil$.

Beweis: Die Implosion des Gestalts-Parameter-Schätzers $\hat{\beta}_Q$ erfolgt, falls $\hat{q}_{\alpha_2} \to \infty$ und $\hat{q}_{\alpha_1}$ beschränkt bleibt oder falls $\hat{q}_{\alpha_1} \to 0$ und $\hat{q}_{\alpha_2}$ beschränkt bleibt. D. h.

$$\frac{G^{-1}(\alpha_2) - G^{-1}(\alpha_1)}{\log \hat{q}_{\alpha_2} - \log \hat{q}_{\alpha_1}} \to 0, \quad \text{falls} \quad \begin{cases} \hat{q}_{\alpha_2} \to \infty & \text{und} \quad |\hat{q}_{\alpha_1}| < \infty \quad \text{oder} \\ \hat{q}_{\alpha_1} \to 0 & \text{und} \quad |\hat{q}_{\alpha_2}| < \infty. \end{cases}$$

Es reicht also, den Anteil $(1 - \alpha_2)$ der Beobachtungen zu verändern oder den Anteil α_1 der Beobachtungen auf Null zu setzen (vgl. der Bruchpunkt des α-Quantils Satz 5.1.5).

Der Bruchpunkt des Gestalts-Parameter-Schätzers $\hat{\beta}_Q$ ist somit gleich:

$$\varepsilon_N^*(\hat{\beta}_Q, y) = \frac{1}{N}\lceil\min(\alpha_2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \alpha_1)N\rceil. \tag{5.15}$$

Der asymptotische Bruchpunkt der Quantil-Schätzung des Gestalts-Parameters $\hat{\beta}_Q$ ist gleich

$$\begin{aligned} \varepsilon_A^*(\hat{\beta}_Q, y) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \lceil \min(\alpha_2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \alpha_1) N \rceil \\ &= \min(\alpha_2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \alpha_1). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Sei ohne Einschränkung das α_1-Quantil gegeben, der höchstmögliche Bruchpunkt von $\hat{\beta}_Q$ liegt in dem Schnitt der Geraden $m_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ und $m_2 = 1 - \alpha_2$, d. h. für $\alpha_2 = (1 + \alpha_1)/2$.

Wenn man $\alpha_1 = 1/3$ und $\alpha_2 = (1 + \alpha_1)/2$ in der Gleichung (5.16) einsetzt, dann liegt das Maximum von $\varepsilon_A^*(\hat{\beta}_Q, y)$ bei $1/3$.

Da α_1 gegeben ist, erhält man den höchstmöglichen Bruchpunkt für $\alpha_2 = (1 + \alpha_1)/2$. Der Quantil-Schätzer des Gestalts-Parameters $\hat{\beta}_Q$ erreicht den maximalen Bruchpunkt von $1/3$ für $\alpha_1 = 1/3$ und $\alpha_2 = 2/3$.

□

Satz 5.2.5 (vgl. Boudt et al. 2009)
Ist die Gestalts-Parameter-Schätzung $\hat{\beta}_Q$ mit $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 1/3$ gegeben, dann ist der asymptotische Bruchpunkt der Quantil-Schätzung $\hat{\lambda}_Q$ des Skalen-Parameters λ gleich

$$\varepsilon_A^*(\hat{\lambda}_Q, y) = \begin{cases} \min(\alpha, 1 - \alpha, 1/3), & \text{für } \alpha \neq 1 - e^{-1}, \\ \min(\alpha, 1 - \alpha), & \text{für } \alpha = 1 - e^{-1}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Beweis:
Hier werden drei Fälle unterschieden. Zunächst wird angenommen, dass $0 < \alpha < 1 - e^{-1}$ gilt. Ferner hat man $-\log(1 - \alpha) < 1$ und schließlich bleibt der Nenner des Gestalts-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ in (5.13) endlich für jeden möglichen Wert von $\hat{\beta}_Q$.

Die Implosion des Skalen-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ ist nur dann möglich, wenn mehr als ein Anteil α der Beobachtungen durch Null ersetzt wird (vgl. auch der Bruchpunkt des α-Quantils Satz 5.1.5). D. h.

$$\frac{\hat{q}_\alpha}{[-\log(1 - \alpha)]^{1/\hat{\beta}_Q}} \xrightarrow{\hat{q}_\alpha \to 0} 0. \tag{5.18}$$

Ebenso kann die Explosion des Skalen-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ nur dann entstehen, wenn mehr als ein Anteil $(1-\alpha)$ der Beobachtungen durch unendlich ersetzt wird oder falls $\hat{\beta}_Q$ durch Null ersetzt wird (vgl. dazu der Bruchpunkt des α-Quantils Satz 5.1.5). D. h.

$$\frac{\hat{q}_\alpha}{[-\log(1-\alpha)]^{1/\hat{\beta}_Q}} \rightarrow \infty, \quad \text{falls} \quad \begin{cases} (1-\alpha)N \rightarrow \infty & \text{oder} \\ \hat{\beta}_Q \rightarrow 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Aus dem Beweis des vorherigen Satzes folgt, dass die Implosion von $\hat{\beta}_Q$ nur dann geschieht, wenn mehr als ein Anteil von $\min(\alpha_1, 1-\alpha_2)$ der Beobachtungen durch beliebige Werte ersetzt wird.

Für $\alpha < 1 - e^{-1}$ ist der asymptotische Bruchpunkt also gleich

$$\min(\alpha, 1-\alpha, \alpha_1, 1-\alpha_2). \tag{5.20}$$

Für den Fall $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 1/3$ ist es mehr als ein Drittel der Beobachtungen, das geändert werden muss, um die Schätzung unbrauchbar zu machen, somit ist der asymptotische Bruchpunkt des Skalen-Parameter-Schätzers gleich $\min(\alpha, 1-\alpha, 1/3)$.

Für den anderen Fall, in dem $1-e^{-1} < \alpha < 1$ gilt, ist die Implosion des Skalen-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ nur dann möglich, wenn mehr als ein Anteil α der Beobachtungen durch Null ersetzt wird oder falls $\hat{\beta}_Q$ durch unendlich ersetzt wird (vgl. der Bruchpunkt des α-Quantils Satz 5.1.5). D. h.

$$\frac{\hat{q}_\alpha}{[-\log(1-\alpha)]^{1/\hat{\beta}_Q}} \rightarrow 0, \quad \text{falls} \quad \begin{cases} \hat{q}_\alpha \rightarrow 0 & \text{oder} \\ \hat{\beta}_Q \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{5.21}$$

Die Explosion des Skalen-Parameter-Schätzers $\hat{\lambda}_Q$ ist nur dann möglich, wenn mehr als ein Anteil $(1-\alpha)$ der Beobachtungen durch unendlich ersetzt wird. D. h.

$$\frac{\hat{q}_\alpha}{[-\log(1-\alpha)]^{1/\hat{\beta}_Q}} \xrightarrow{\hat{q}_\alpha \rightarrow \infty} \infty. \tag{5.22}$$

Somit ist der asymptotische Bruchpunkt der Skalen-Parameter-Schätzung für $\alpha > 1-e^{-1}$ auch durch die Gleichung (5.20) gegeben.

Für $\alpha = 1 - e^{-1}$ ist der Skalen-Parameter-Schätzer $\hat{\lambda}$ gleich $\hat{q}_\alpha$, mit dem Satz 5.1.5 folgt die Behauptung unmittelbar.

□

Kapitel 6

Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung

In der Wirtschaft, in der Technik und im Alltag wird immer wieder danach gefragt, wie eine Größe, an der man speziell interessiert ist, von den anderen Größen abhängt. Diese grundlegende Frage behandelt die statistische Regression, die deshalb wohl (neben einfachen graphischen Darstellungen) die am meisten verwendete Methodik der Statistik darstellt.

In diesem Kapitel soll mittels Methoden der kleinsten Quadrate in die Problemstellung eingeführt werden, bevor ein Überblick über spezielle Regressionsschätzungen, insbesondere die Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung, geboten wird. Hier wird ein weiteres Resultat von Boudt et al. (2009) vorgestellt, nämlich dass die Einflussfunktionen dieser Schätzung für die Parameter der Weibull-Verteilung beschränkt sind und dass sie einen hohen Bruchpunkt besitzen.

6.1 Methode der kleinsten Quadrate

Es soll ohne Einschränkung der Allgemeinheit von einer linearen Regressionsfunktion f ausgegangen werden, d. h. für eine Funktion der Form $f(x) = b_0 + b_1 x, \quad x \in \mathbb{R}$. Die Parameter b_0 und b_1 sind unbekannt und müssen aus den Beobachtungen $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ möglichst gut geschätzt werden. Hat man nun Schätzungen $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ für $b = (b_0, b_1)^\top$, so schätzt man die Regressionsgerade durch $\hat{f}(x) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x$ und die Regressionswerte durch $\hat{y}_n = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_n, \;\; n = 1, \ldots, N$.

Definition 6.1.1 (Kleinste-Quadrate-Schätzung (vgl. Müller 2009a))
$\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ *heißt Kleinste-Quadrate-Schätzung* (**O**rdinary **L**east **S**quares OLS), *falls gilt:*

$$\hat{b} \;=\; (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top \;=\; \arg \min_{(b_0,b_1)^\top \in \mathbb{R}^2} \sum_{n=1}^{N} (y_n - b_0 - b_1 x_n)^2. \tag{6.1}$$

Bemerkung 6.1.2
Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate wird die Summe der quadratischen Abweichungen $(y_n - f(x_n))^2$ bzgl. der Parameter b_0 und b_1 minimiert, also die Summe der quadratischen Residuen wird minimal. Graphisch lässt sich diese Methode folgendermaßen veranschaulichen.

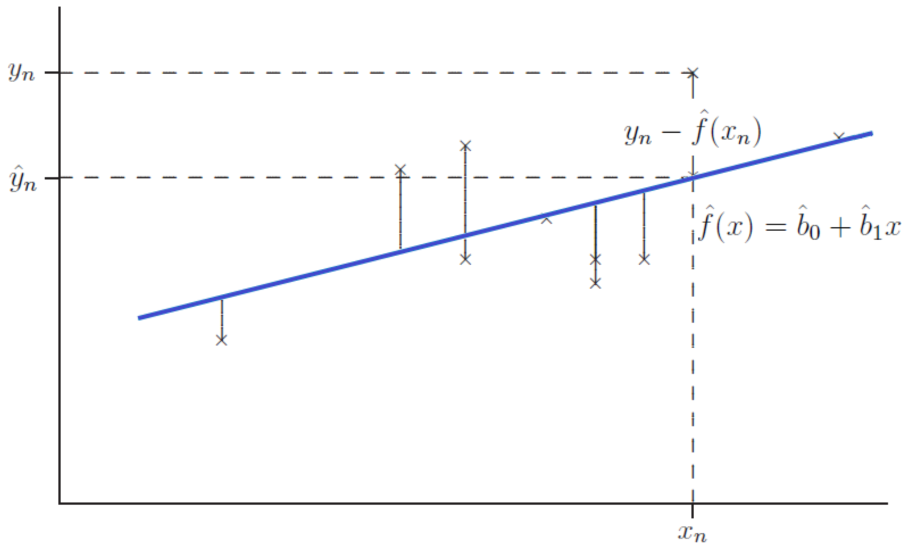

Abb. 6.1: Methode der kleinsten Quadrate.

Satz 6.1.3 (vgl. Fahrmeir et al. 2003)
Für die Kleinste-Quadrate-Schätzung $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ *gilt:*

$$\hat{b}_1 \;=\; \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n y_n - N\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n^2 - N\bar{x}^2} \;=\; \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n y_n - N \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} x_n \,\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} y_n}{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n^2 - N\left(\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} x_n\right)^2} \tag{6.2}$$

und

$$\hat{b}_0 \;=\; \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n - \hat{b}_1 \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{6.3}$$

Beweis:
Sei $g(b_0, b_1) = \sum_{n=1}^{N}(y_n - b_0 - b_1 x_n)^2$. Die Minimum-Stelle von g wird nun durch Differenzieren bestimmt. Man leitet also ab

$$\frac{\partial}{\partial b_0} g(b_0, b_1) = \frac{\partial}{\partial b_0}\sum_{n=1}^{N}(y_n - b_0 - b_1 x_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} 2(y_n - b_0 - b_1 x_n)(-1) \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1} g(b_0, b_1) = \frac{\partial}{\partial b_1}\sum_{n=1}^{N}(y_n - b_0 - b_1 x_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} 2(y_n - b_0 - b_1 x_n)(-x_n), \tag{6.5}$$

und setzt die Ableitung Null; man erhält

$$N b_0 = \sum_{n=1}^{N} y_n - b_1 \sum_{n=1}^{N} x_n, \tag{6.6}$$

$$b_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n - b_0 \sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{6.7}$$

Das kann man umformen zu:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

und

$$b_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n - N b_0 \bar{x} = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n - N\bar{y}\bar{x} + N b_1 \bar{x}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\Big(\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - N\bar{x}^2\Big) = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n - N\bar{y}\bar{x} = \sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - N\bar{x}^2} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2} \tag{6.8}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n y_n - N\bar{x}\bar{y}}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - N\bar{x}^2}.$$

Also hat g ein Extremum bei $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ gegeben durch (6.2) und (6.3). Um zu sehen, dass das Extremum ein Minimum ist, bildet man die zweiten partiellen Ableitungen bei $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial b_0 \partial b_0} g(b_0, b_1) &\overset{(6.4)}{=} \frac{\partial}{\partial b_0}\big(2N(b_0 - \bar{y} + b_1 \bar{x})\big) \;=\; 2N, \\
\frac{\partial^2}{\partial b_0 \partial b_1} g(b_0, b_1) &\overset{(6.4)}{=} \frac{\partial}{\partial b_1}\big(2N(b_0 - \bar{y} + b_1 \bar{x})\big) \;=\; 2\sum_{n=1}^{N} x_n \;=\; 2N\bar{x}, \\
\frac{\partial^2}{\partial b_1 \partial b_0} g(b_0, b_1) &\overset{(6.5)}{=} \frac{\partial}{\partial b_0}\big(2b_0 \sum_{n=1}^{N} x_n + 2b_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} y_n x_n\big) \;=\; 2\sum_{n=1}^{N} x_n \;=\; 2N\bar{x}, \\
\frac{\partial^2}{\partial b_1 \partial b_1} g(b_0, b_1) &\overset{(6.5)}{=} \frac{\partial}{\partial b_1}\big(2b_0 \sum_{n=1}^{N} x_n + 2b_1 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} y_n x_n\big) \;=\; 2\sum_{n=1}^{N} x_n^2.
\end{aligned}
$$

Da die Hauptabschnittsdeterminanten positiv sind

$$
\det\left(\frac{\partial^2}{\partial b_0 \partial b_0} g(b_0, b_1)\right) \;=\; \det(2N) \;=\; 2N \;\geq\; 0
$$

und

$$
\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial b^\top} g(b_0, b_1)\right) &= \det\begin{pmatrix} 2N & 2N\bar{x} \\ 2N\bar{x} & 2\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \end{pmatrix} \\
&= 4N\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 4N^2\bar{x}^2 \;=\; 4N\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2 \;\geq\; 0,
\end{aligned}
$$

ist das Extremum bei $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ ein Minimum.

□

6.2 Schätzen mittels der Methode der Quantil-Kleinste-Quadrate

Es wird versucht eine modifizierte Kleinste-Quadrate-Schätzung so zu berechnen, dass man die extremen Beobachtungen bei der Berechnung übergeht. Dazu ordnet man die Stichprobe entsprechend der Größe der Realisationen der erklärenden Variable und schneidet auf beiden Seiten jeweils den Anteil $\bar{\alpha}$ ab. Anschließend berechnet man mit der Methode der kleinsten Quadrate-Schätzung auf den verbleibenden Anteil $1 - 2\bar{\alpha}$ der Beobachtungen in der geordneten Stichprobe. Die auf diese Weise konstruierte Schätzung wird die Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung genannt.

Definition 6.2.1 (Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung (vgl. Boudt et al. 2009))
Die Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung (**Q**uantile **L**east **S**quares QLS) $\hat{b} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1)^\top$ *der Weibull-Parameter* λ *und* β *ist definiert durch:*

$$\hat{\lambda}_{\text{QLS}} = \exp\{\hat{b}_0\} \quad \textit{und} \quad \hat{\beta}_{\text{QLS}} = \frac{1}{\hat{b}_1}, \tag{6.9}$$

mit dem Steigungs-Parameter-Schätzer

$$\hat{b}_1 = \frac{\tilde{N} \sum\limits_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} x_n y_n - \sum\limits_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} x_n \sum\limits_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} y_n}{\tilde{N} \sum\limits_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} x_n^2 - \left(\sum\limits_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} x_n \right)^2} \tag{6.10}$$

und dem Achsenabschnitts-Parameter-Schätzer

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} y_n - \frac{1}{\tilde{N}} \hat{b}_1 \sum_{n=\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor+1}^{N-\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor} x_n. \tag{6.11}$$

Hierbei ist $0 < \bar{\alpha} < 1/2$ *und* $\tilde{N} = N - 2\lfloor \bar{\alpha} N \rfloor$.

Bemerkung 6.2.2

1. Die Quantil-Kleinste-Quadrate-Schätzung minimiert eine gewichtete Summe von Residuen. Hierbei erhalten diejenigen Beobachtungen das Gewicht Null, wenn deren Regressionswerte y_n auffälliger sind als die Werte der empirischen Quantile $\bar{\alpha}$ und $(1 - \bar{\alpha})$.
2. Je größer das $\bar{\alpha}$-Quantil ist, desto robuster wird der Schätzer gegen Ausreißer. Offensichtlich ist die OLS-Schätzung (QLS-Schätzung für $\bar{\alpha} = 0$) nicht robust (vgl. auch Rousseeuw und Leroy 2003).

Satz 6.2.3 (vgl. Boudt et al. 2009)
Der asymptotische Bruchpunkt der QLS-*Schätzung der Weibull-Parameter* λ *und* β *ist gleich*

$$\min(\bar{\alpha}, 1 - 2\bar{\alpha}).$$

Der höchstmögliche Bruchpunkt für diesen Schätzer ist $1/3$, *diesen erhält man für* $\bar{\alpha} = 1/3$.

Beweis:
Es ist leicht zu sehen, dass der Bruchpunkt der QLS-Schätzung gerade $\min(\bar{\alpha}, 1 - 2\bar{\alpha})$

beträgt. In der Tat, falls der Anteil $\min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})$ der Beobachtungen Ausreißer sind, dann schneidet die QLS-Schätzung den Anteil $2\bar{\alpha}$ der Beobachtungen ab; somit beträgt der Bruchpunkt dieser Schätzung gerade $\min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})$. Es muss nur noch gezeigt werden, dass die QLS-Schätzung angewandt auf den abgeschnittenen Anteil durch eine einzige Veränderung beliebig verfälscht werden kann.

1. Behauptung: Für den Bruchpunkt der QLS-Schätzung des Skalen-Parameters $\hat{\lambda}_{\text{QLS}}$ gilt für alle $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$: $\quad \varepsilon_N^*\big(\hat{\lambda}_{\text{QLS}}, (x_n, y_n)\big) \;=\; \frac{1}{N}\lceil \min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})N \rceil.$

Beweis: Der Skalen-Parameter-Schätzer $\hat{\lambda}$ (vgl. Definition 6.2.1) explodiert, falls $\hat{b}_0$ gegen $-\infty$ konvergiert. D. h.

$$\hat{\lambda}_{\text{QLS}} \;=\; \exp\{\hat{b}_0\} \;\to\; +\infty, \qquad \text{falls} \qquad \hat{b}_0 \;\to\; -\infty.$$

Für die Schätzung des Achsenabschnitts-Parameters $\hat{b}_0$ reicht es also, eine einzige Beobachtung zu verändern, um den Zusammenbruch zu erreichen. Dazu sei $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in \mathcal{Y}_1(x_n, y_n)$ der Datensatz, der durch das Ersetzen von (x_i, y_i) durch $(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})$ entstanden ist. Für die Beobachtung $(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} &\;\to\; +\infty \quad \text{und} \\
\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} &\;=\; -(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} + \ldots + y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} + y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} + \ldots + y_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor})
\end{aligned}$$

konvergiert $\hat{b}_0$ gegen $-\infty$. Also

$$\hat{b}_0 \;=\; \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} y_n - \frac{1}{\tilde{N}}\hat{b}_1 \sum_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} x_n \quad \xrightarrow{(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})} \quad -\infty.$$

Analog zeigt man die Implosion des Skalen-Parameter-Schätzers. Wenn man dieses Mal für $(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})$ Folgendes einsetzt:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} &\;=\; -(x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} + \ldots + x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} + x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} + \ldots + x_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor}) \quad \text{und} \\
\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} &\;=\; -(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} + \ldots + y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} + y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} + \ldots + y_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor}),
\end{aligned}$$

dann strebt $\hat{b}_0$ gegen Null. Somit wurde die Explosion und die Implosion des Skalen-Parameter-Schätzers gezeigt.

Ebenso zeigt man auch die Implosion des Gestalts-Parameter-Schätzers.

2. Behauptung: Für den Bruchpunkt der QLS-Schätzung des Gestalts-Parameters

$\hat{\beta}_{\text{QLS}}$ gilt für alle $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$: $\quad \varepsilon_N^*\big(\hat{\beta}_{\text{QLS}}, (x_n, y_n)\big) \;=\; \frac{1}{N}\lceil \min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})N \rceil.$

Beweis: Der Gestalts-Parameter-Schätzer (vgl. Definition 6.2.1) explodiert, falls $\hat{b}_1 \to 0$ konvergiert. D. h.

$$\hat{\beta}_{\text{QLS}} \;=\; \frac{1}{\hat{b}_1} \;\to\; \infty, \quad \text{falls} \quad \hat{b}_1 \;\to\; 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung (6.8) lässt sich die Schätzung des Steigungs-Parameters $\hat{b}_1$ nun wie folgt umschreiben:

$$\hat{b}_1 \;=\; \frac{\sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} (x_n - \bar{x})^2}.$$

Dazu sei $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in \mathcal{Y}_1(x_n, y_n)$ der Datensatz, der durch das Ersetzen von (x_i, y_i) durch $(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})$ entstanden ist. Für

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} \;=\;& \frac{-(x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} - \bar{\bar{y}}) - \ldots - (x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} - \bar{\bar{y}})}{(\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} - \bar{\bar{y}})} \\ &+ \frac{-(x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} - \bar{\bar{y}}) - \ldots - (x_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} - \bar{\bar{x}})(y_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} - \bar{\bar{y}})}{(\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} - \bar{\bar{y}})} + \bar{\bar{x}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} \;=\;& \frac{-(x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1} - \bar{\bar{y}}) - \ldots - (x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i-1} - \bar{\bar{y}})}{(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} - \bar{\bar{x}})} \\ &+ \frac{-(x_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} - \bar{\bar{x}})(y_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i+1} - \bar{\bar{y}}) - \ldots - (x_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} - \bar{\bar{x}})(y_{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} - \bar{\bar{y}})}{(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} - \bar{\bar{x}})} + \bar{\bar{y}}\end{aligned}$$

konvergiert $\hat{b}_1$ gegen 0, wobei hier $\tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} \neq \bar{\bar{y}}$, $\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i} \neq \bar{\bar{x}}$ und $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ die Mittelwerte der $N - 2\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor = \tilde{N}$ Beobachtungen sind. Also

$$\hat{b}_1 \;=\; \frac{\tilde{N} \sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} x_n y_n - \sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} x_n \sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} y_n}{\tilde{N} \sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} x_n^2 - \left(\sum\limits_{n=\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+1}^{N-\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor} x_n\right)^2} \quad \xrightarrow{(\tilde{x}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i}, \tilde{y}_{\lfloor\bar{\alpha}N\rfloor+i})} \quad 0.$$

Der asymptotische Bruchpunkt der QLS-Schätzung der Weibull-Parameter ist somit gleich

$$\varepsilon_A^*\big(\hat{\theta}_{\mathrm{QLS}}, (x_n, y_n)\big) \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\lceil \min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})N\rceil \;=\; \min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha}).$$

Falls $\bar{\alpha} = 1/3$ gilt, dann folgt daraus, dass der höchstmögliche Bruchpunkt für die QLS-Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters gleich $1/3$ ist.

□

Definition 6.2.4 (QLS-Funktionale (vgl. Boudt et al. 2009))
Mit Hilfe der QLS-*Schätzung* (vgl. Definition 6.2.1) *definiert man die* QLS-*Funktionale zur Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung wie folgt:*

$$\beta_{\mathrm{QLS}}(P_{\lambda,\beta}) \;=\; \frac{1}{b_1(P_{\lambda,\beta})} \;=\; \beta \tag{6.12}$$

und

$$\lambda_{\mathrm{QLS}}(P_{\lambda,\beta}) \;=\; \exp\{b_0(P_{\lambda,\beta})\} \;=\; \lambda. \tag{6.13}$$

Satz 6.2.5 (vgl. Boudt et al. 2009)
Für die Einflussfunktion der QLS-*Schätzung der Parameter λ und β der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ gilt:*

$$IF(y; \beta_{\mathrm{QLS}}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; -\beta^2\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) \tag{6.14}$$

und

$$IF(y; \lambda_{\mathrm{QLS}}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; \lambda\, IF(y; b_0, P_{\lambda,\beta}). \tag{6.15}$$

Beweis:
Mit Hilfe der QLS-Funktionale (vgl. Definition 6.2.4) lassen sich die Einflussfunktionen der QLS-Schätzung des Skalen-Parameters λ und des Gestalts-Parameters β der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ wie folgt berechnen:

Dazu sei $P_t \;=\; (1-t)P_{\lambda,\beta} + t\delta_y$, dann gilt für die Einflussfunktion:

$$\begin{aligned}
IF(y; \beta_{\mathrm{QLS}}, P_{\lambda,\beta}) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}\beta_{\mathrm{QLS}}(P_t)\Big|_{t=0} \\
&\overset{(6.12)}{=}\; \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{b_1(P_t)}\Big|_{t=0} \\
&=\; -\frac{\partial/\partial t b_1(P_t)|_{t=0}}{\{b_1(P_t)|_{t=0}\}^2} \\
&=\; -\frac{1}{\{b_1(P_{\lambda,\beta})\}^2}\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) \\
&\overset{(6.12)}{=}\; -\beta^2\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}).
\end{aligned}$$

Für die Einflussfunktion der QLS-Schätzung des Skalen-Funktionals gilt:

$$\begin{aligned}
IF(y;\lambda_{\text{QLS}},P_{\lambda,\beta}) &= \frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\text{QLS}}(P_t)\bigg|_{t=0} \\
&\overset{(6.13)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\exp\{b_0(P_t)\}\bigg|_{t=0} \\
&= \exp\{b_0(P_t)|_{t=0}\}\frac{\partial}{\partial t}b_0(P_t)\bigg|_{t=0} \\
&= \exp\{b_0(P_{\lambda,\beta})\}\, IF(y;b_0,P_{\lambda,\beta}) \\
&\overset{(6.13)}{=} \lambda\, IF(y;b_0,P_{\lambda,\beta}).
\end{aligned}$$

□

Definition 6.2.6 (Kovarianz (vgl. Müller 2007))
Sind X und Y Zufallsgrößen mit existierendem Erwartungswert, so heißt

$$\text{Cov}(X,Y) \;:=\; \text{E}\big((X-\text{E}(X))(Y-\text{E}(Y))\big) \tag{6.16}$$

Kovarianz von X und Y (sofern der Erwartungswert existiert).

Lemma 6.2.7 (vgl. Müller 2007)
Seien die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Wenn man von der Existenz der Erwartungswerte von X und Y ausgeht, dann gilt für die Kovarianz von X und Y:

$$\text{Cov}(X,Y) \;=\; \text{E}(XY)-\text{E}(X)\,\text{E}(Y). \tag{6.17}$$

Beweis:
Nach der Definition der Kovarianz (vgl. Definition 6.2.6) und mit Hilfe der Eigenschaften des Erwartungswertes erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,Y) &\overset{(6.16)}{=} \text{E}((X-\text{E}(X))(Y-\text{E}(Y))) \\
&= \text{E}(XY-X\,\text{E}(Y)-\text{E}(X)Y+\text{E}(X)\,\text{E}(Y)) \\
&= \text{E}(XY)-\text{E}(X)\,\text{E}(Y)-\text{E}(X)\,\text{E}(Y)+\text{E}(X)\,\text{E}(Y) \\
&= \text{E}(XY)-\text{E}(X)\,\text{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

Lemma 6.2.8 (vgl. Boudt et al. 2009)
*Sei α eine auf das Intervall $[\bar{\alpha}, 1-\bar{\alpha}]$ gleichverteilte Zufallsvariable und $u(\alpha)$ ihre Dichtefunktion, sei G eine Standard-*log*-Weibull-Verteilung, man definiere nun für G Folgendes:*

$$g_\alpha := G^{-1}(\alpha) = \log Q_\alpha(P_{1,1}), \qquad c_1 := \mathrm{E}(g_\alpha) \qquad \textit{und} \qquad c_2 := \mathrm{Var}(g_\alpha). \tag{6.18}$$

Dann lassen sich die Einflussfunktionen der QLS*-Schätzung des Steigungs- und des Achsenabschnitts-Parameters der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ explizit berechnen als*

$$IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) = c_2^{-1} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})} (g_\alpha - c_1)\, IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta}) u(\alpha) d\alpha \tag{6.19}$$

und

$$IF(y; b_0, P_{\lambda,\beta}) = \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})} IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta}) u(\alpha) d\alpha - c_1\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}). \tag{6.20}$$

Beweis: Der Beweis folgt dem Beweis in Boudt et al. (2009).
Die Dichtefunktion der auf das Intervall $[\bar{\alpha}, 1-\bar{\alpha}]$ gleichverteilten Zufallsvariable α ist gegeben durch

$$u(\alpha) = \frac{1}{1-2\bar{\alpha}}. \tag{6.21}$$

Für die Standard-log-Weibull-Verteilung G wird Folgendes definiert:

$$g_\alpha := G^{-1}(\alpha) = \log Q_\alpha(P_{1,1}), \qquad c_1 := \mathrm{E}(g_\alpha) \qquad \text{und} \qquad c_2 := \mathrm{Var}(g_\alpha).$$

Das zugehörige Funktional des QLS-Steigungs-Parameter-Schätzers (vgl. Definition 6.2.1) ist gleich der Kovarianz zwischen $\log Q_\alpha(.)$ und g_α dividiert durch die Varianz von g_α.

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P erhält man mit Hilfe von Lemma 6.2.7 für das Funktional des QLS-Steigungs-Parameter-Schätzers Folgendes:

$$b_1(P) = \frac{\mathrm{E}[g_\alpha \log Q_\alpha(P)] - c_1\, \mathrm{E}[\log Q_\alpha(P)]}{c_2}. \tag{6.22}$$

Das zugehörige Funktional des Achsenabschnitts-Parameter-Schätzers eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P ist gegeben durch:

$$b_0(P) = \mathrm{E}[\log Q_\alpha(P)] - c_1 b_1(P). \tag{6.23}$$

Sei $P_t = (1-t)P_{\lambda,\beta} + t\delta_y$. Unter geeigneten Regularitätsbedingungen (vgl. Anhang A.1) lassen sich die Einflussfunktionen der Funktionale des Steigungs- und des Achsenabschnitts-Parameter-Schätzers b_0 und b_1 der Weibull-Verteilung $P_{\lambda,\beta}$ wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) &= \frac{\partial}{\partial t} b_1(P_t)\Big|_{t=0} \\
&\overset{(6.22)}{=} \frac{\partial}{\partial t} c_2^{-1}\{\mathrm{E}[g_\alpha \log Q_\alpha(P_t)] \;-\; c_1\,\mathrm{E}[\log Q_\alpha(P_t)]\}\Big|_{t=0} \\
&= c_2^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathrm{E}[g_\alpha \log Q_\alpha(P_t)]\}\Big|_{t=0} - c_2^{-1}c_1\frac{\partial}{\partial t}\{\mathrm{E}[\log Q_\alpha(P_t)]\}\Big|_{t=0} \\
&= c_2^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} g_\alpha \log Q_\alpha(P_t) u(\alpha) d\alpha\Big|_{t=0} \\
&\qquad - c_2^{-1}c_1\frac{\partial}{\partial t}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \log Q_\alpha(P_t) u(\alpha) d\alpha\Big|_{t=0} \\
&\overset{\mathit{Reg.\,Bed.}}{=} c_2^{-1}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t}\log Q_\alpha(P_t)\Big|_{t=0} g_\alpha u(\alpha) d\alpha \\
&\qquad - c_2^{-1}c_1\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t}\log Q_\alpha(P_t)\Big|_{t=0} u(\alpha) d\alpha \\
&= c_2^{-1}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\partial/\partial t[Q_\alpha(P_t)]|_{t=0}}{Q_\alpha(P_t)|_{t=0}} g_\alpha u(\alpha) d\alpha \\
&\qquad - c_2^{-1}c_1\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\partial/\partial t[Q_\alpha(P_t)]|_{t=0}}{Q_\alpha(P_t)|_{t=0}} u(\alpha) d\alpha \\
&= c_2^{-1}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta})}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})} g_\alpha u(\alpha) d\alpha \\
&\qquad - c_2^{-1}c_1\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta})}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})} u(\alpha) d\alpha \\
&= c_2^{-1}\int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})}(g_\alpha - c_1) IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta}) u(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}
$$

Für die Einflussfunktion des Achsenabschnitts-Funktionals gilt:

$$\begin{aligned}
IF(y; b_0, P_{\lambda,\beta}) &= \frac{\partial}{\partial t} b_0(P_t)\Big|_{t=0} \\
&\overset{(6.23)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\{\mathrm{E}[\log Q_\alpha(P_t)] \;-\; c_1 b_1(P_t)\}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\{\mathrm{E}[\log Q_\alpha(P_t)]\}\Big|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial t}\{c_1 b_1(P_t)\}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} \log Q_\alpha(P_t) u(\alpha) d\alpha\Big|_{t=0} - c_1 \frac{\partial}{\partial t} b_1(P_t)\Big|_{t=0} \\
&\overset{Reg.\,Bed.}{=} \int_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \log Q_\alpha(P_t)\Big|_{t=0} u(\alpha) d\alpha \;-\; c_1\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) \\
&= \int_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} \frac{\partial/\partial t[Q_\alpha(P_t)]|_{t=0}}{Q_\alpha(P_t)|_{t=0}} u(\alpha) d\alpha \;-\; c_1\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) \\
&= \int_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} \frac{1}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})} IF(y; Q_\alpha, P_{\lambda,\beta}) u(\alpha) d\alpha \;-\; c_1\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}).
\end{aligned}$$

□

Satz 6.2.9 (vgl. Boudt et al. 2009)
Mit Hilfe von Lemma 6.2.8 *erhält man für die Einflussfunktion des Steigungs-Parameter-Schätzers der Standard-Weibull-Verteilung* $P_{1,1}$

$$\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{1,1}) \;=\; \frac{1}{2c_2(1-2\bar\alpha)}\Big[&\psi(\max(y, Q_{\bar\alpha}(P_{1,1}))) \;-\; c_2(1-2\bar\alpha) \\
&- \bar\alpha\psi(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) \;-\; \bar\alpha\psi(Q_{\bar\alpha}(P_{1,1}))\Big]. \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\psi(y) := (\log y - c_1)^2$.

Beweis: Der Beweis basiert auf dem Beweis in Boudt et al. (2009)
Es wird nach einer expliziten Lösung des Integrals in (6.19) gesucht. Durch einfaches Nachrechnen erhält man für $\lambda = \beta = 1$ mit Hilfe von (6.18) und $Q_\alpha(P) = F^{-1}(\alpha)$ zunächst:

$$Q_\alpha(P_{1,1}) f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1})) \;=\; g(\log Q_\alpha(P_{1,1})) \;=\; g(g_\alpha). \qquad (6.25)$$

Insbesondere erhält man mit Hilfe von Lemma 5.1.4 bzw. der Gleichung (5.8) die Einflussfunktion des Steigungs-Parameter-Schätzers der Standard-Weibull-Verteilung $P_{1,1}$ wie folgt:

$$IF(y; b_1, P_{1,1}) \;=\; c_2^{-1} \int_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} (g_\alpha - c_1) \frac{\alpha - I_{[\log y < g_\alpha]}}{g(g_\alpha)} u(\alpha) d\alpha. \qquad (6.26)$$

Denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{1,1}) &\overset{(6.19)}{=} c_2^{-1} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{1,1})} (g_\alpha - c_1) IF(y; Q_\alpha, P_{1,1}) u(\alpha) d\alpha \\
&\overset{(5.8)}{=} c_2^{-1} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{1,1})} (g_\alpha - c_1) \frac{\alpha - I_{[\log y < \log Q_\alpha(P_{1,1})]}}{f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1}))} u(\alpha) d\alpha \\
&= c_2^{-1} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{(g_\alpha - c_1)}{Q_\alpha(P_{1,1}) f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1}))} (\alpha - I_{[\log y < \log Q_\alpha(P_{1,1})]}) u(\alpha) d\alpha \\
&\overset{(6.25)}{=} c_2^{-1} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} (g_\alpha - c_1) \frac{\alpha - I_{[\log y < g_\alpha]}}{g(g_\alpha)} u(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}
$$

Wenn man α durch $G(z)$ in (6.26) substituiert, also

$$
\alpha = G(z), \quad \text{d. h.} \quad d\alpha = g(z) dz,
$$

erhält man für die Einflussfunktion der QLS-Schätzung des Steigungs-Parameters b_1:

$$
\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{1,1}) &\overset{(6.21)}{=} \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \int_{G^{-1}(\bar{\alpha})}^{G^{-1}(1-\bar{\alpha})} (g_{(G(z))} - c_1) \frac{G(z) - I_{[\log y < g_{(G(z))}]}}{g(g_{(G(z))})} \, g(z) dz \\
&= \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (G^{-1}(G(z)) - c_1) \frac{G(z) - I_{[\log y < G^{-1}(G(z))]}}{g(G^{-1}(G(z)))} \, g(z) dz \\
&= \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z - c_1) \frac{G(z) - I_{[\log y < z]}}{g(z)} \, g(z) dz \\
&= \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z - c_1) \left(G(z) - I_{[\log y < z]}\right) dz \\
&= \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \left\{ \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z - c_1) G(z) dz - \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z - c_1) I_{[\log y < z]} dz \right\} \qquad (6.27) \\
&= \frac{1}{c_2(1-2\bar{\alpha})} \left\{ \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z) d\frac{(z - c_1)^2}{2} - \int_{\max(\log y, g_{\bar{\alpha}})}^{g_{1-\bar{\alpha}}} d\frac{(z - c_1)^2}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{2c_2(1-2\bar{\alpha})} \left\{ \underbrace{\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z) d(z - c_1)^2}_{=: \, \eta} - \underbrace{\int_{\max(\log y, g_{\bar{\alpha}})}^{g_{1-\bar{\alpha}}} d(z - c_1)^2}_{=: \, \gamma} \right\}.
\end{aligned}
$$

Für η erhält man mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z)d(z-c_1)^2 = \underbrace{(z-c_1)^2 G(z)\Big|_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}}}_{=:\ \tau} - \underbrace{\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z-c_1)^2 d(G(z))}_{=:\ \kappa}.$$

Wenn man mit $z = G^{-1}(\alpha)$ rücksubstituiert, dann erhält man für κ Folgendes:

$$\begin{aligned}
\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} (z-c_1)^2 d(G(z)) &= \int_{G^{-1}(g_{\bar{\alpha}})}^{G^{-1}(g_{1-\bar{\alpha}})} (G^{-1}(\alpha)-c_1)^2 d(G(G^{-1}(\alpha))) \\
&= \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} (g_\alpha - c_1)^2 d\alpha \\
&\overset{(*)}{=} (1-2\bar{\alpha}) \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} (g_\alpha - c_1)^2 \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} d\alpha \\
&= (1-2\bar{\alpha}) \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} (g_\alpha - c_1)^2 u(\alpha) d\alpha \\
&= (1-2\bar{\alpha})\, \mathrm{E}((g_\alpha - c_1)^2) \\
&\overset{(6.18)}{=} (1-2\bar{\alpha})\, \mathrm{E}((g_\alpha - \mathrm{E}(g_\alpha))^2) \\
&= (1-2\bar{\alpha})\, \mathrm{Var}(g_\alpha) \\
&\overset{(6.18)}{=} c_2(1-2\bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

In $(*)$ wird mit dem Term $(1-2\bar{\alpha})$ erweitert.

Rücksubstitution für τ liefert:

$$\begin{aligned}
(z-c_1)^2 G(z)\Big|_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} &= (G^{-1}(\alpha)-c_1)^2 G(G^{-1}(\alpha))\Big|_{G^{-1}(g_{\bar{\alpha}})}^{G^{-1}(g_{1-\bar{\alpha}})} \\
&= (G^{-1}(\alpha)-c_1)^2 \alpha\Big|_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \\
&= (g_\alpha - c_1)^2 \alpha\Big|_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \\
&\overset{(6.18)}{=} (1-\bar{\alpha})(\log(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) - c_1)^2 \;-\; \bar{\alpha}(\log(Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1})) - c_1)^2.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution für γ ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_{\max(\log y, g_{\bar{\alpha}})}^{g_{1-\bar{\alpha}}} d(z-c_1)^2 &= \int_{G^{-1}(\max(\log y, g_{\bar{\alpha}}))}^{G^{-1}(g_{1-\bar{\alpha}})} d(G^{-1}(\alpha)-c_1)^2 \\
&= \int_{\max(y,\bar{\alpha})}^{1-\bar{\alpha}} d(g_\alpha - c_1)^2 \\
&= \int_{\max(y,\bar{\alpha})}^{1-\bar{\alpha}} d(\log(Q_\alpha(P_{1,1})) - c_1)^2 \\
&= (\log(Q_\alpha(P_{1,1})) - c_1)^2 \Big|_{\max(y,\bar{\alpha})}^{1-\bar{\alpha}} .
\end{aligned}$$

Falls man die Funktion ψ durch $\psi(y) := (\log y - c_1)^2$ definiert und wenn man die bis dahin ermittelten Ergebnisse einsetzt, so erhält man die Einflussfunktion der QLS-Schätzung des Steigungs-Parameters $IF(y; b_1, P_{1,1})$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{1,1}) &= \frac{1}{2c_2(1-2\bar{\alpha})} \Bigg[(1-\bar{\alpha})(\log(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) - c_1)^2 \\
&\qquad - \bar{\alpha}(\log(Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1})) - c_1)^2 \\
&\qquad - c_2(1-2\bar{\alpha}) \; - \; (\log(Q_\alpha(P_{1,1})) - c_1)^2 \Big|_{\max(y,\bar{\alpha})}^{1-\bar{\alpha}} \Bigg] \\
&= \frac{1}{2c_2(1-2\bar{\alpha})} \Bigg[(1-\bar{\alpha})\, \psi(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) \; - \; \bar{\alpha}\psi(Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1})) \; - \; c_2(1-2\bar{\alpha}) \\
&\qquad - \psi(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) \; + \; \psi(\max(y, Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1}))) \Bigg] \\
&= \frac{1}{2c_2(1-2\bar{\alpha})} \Bigg[\psi(\max(y, Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1}))) \; - \; c_2(1-2\bar{\alpha}) \\
&\qquad - \bar{\alpha}\psi(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) \; - \; \bar{\alpha}\psi(Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1})) \Bigg].
\end{aligned}$$

□

Satz 6.2.10 (vgl. Boudt et al. 2009)
Für die Einflussfunktion des Achsenabschnitts-Parameter-Schätzers der Standard-Weibull-Verteilung $P_{1,1}$ gilt:

$$IF(y; b_0, P_{1,1}) = \frac{1}{1-2\bar{\alpha}}\Big[\log(\max(y, Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1}))) - c_1(1-2\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}\log(Q_{1-\bar{\alpha}}(P_{1,1})) - \bar{\alpha}\log(Q_{\bar{\alpha}}(P_{1,1}))\Big] - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}). \quad (6.28)$$

Beweis:
Gesucht wird eine explizite Lösung des Integrals in (6.20) und man geht nun wie folgt vor: Mit Hilfe von (6.18) und $Q_\alpha(P) = F^{-1}(\alpha)$ erhält man wieder für $\lambda = \beta = 1$:

$$Q_\alpha(P_{1,1}) f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1})) = g(\log Q_\alpha(P_{1,1})) = g(g_\alpha).$$

Insbesondere erhält man mit Hilfe von Lemma 5.1.4 bzw. der Gleichung (5.8) die Einflussfunktion des Steigungs-Parameter-Schätzers der Standard-Weibull-Verteilung $P_{1,1}$ wie folgt:

$$IF(y; b_0, P_{1,1}) = \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\alpha - I_{[\log y < g_\alpha]}}{g(g_\alpha)} u(\alpha) d\alpha - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}). \quad (6.29)$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
IF(y; b_0, P_{1,1}) &\overset{(6.20)}{=} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{1,1})} IF(y; Q_\alpha, P_{1,1}) u(\alpha) d\alpha - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&\overset{(5.8)}{=} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{1}{Q_\alpha(P_{1,1})} \frac{\alpha - I_{[\log y < \log Q_\alpha(P_{1,1})]}}{f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1}))} u(\alpha) d\alpha - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\alpha - I_{[\log y < \log Q_\alpha(P_{1,1})]}}{Q_\alpha(P_{1,1}) f_{1,1}(Q_\alpha(P_{1,1}))} u(\alpha) d\alpha - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&\overset{(6.2)}{=} \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{\alpha - I_{[\log y < g_\alpha]}}{g(g_\alpha)} u(\alpha) d\alpha - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}).
\end{aligned}$$

Wenn man α durch $G(z)$ in (6.29) substituiert, dann erhält man die Einflussfunktion der QLS-Schätzung des Achsensbschnitts-Parameters b_1 wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&\overset{(6.21)}{=} \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \int_{G^{-1}(\bar{\alpha})}^{G^{-1}(1-\bar{\alpha})} \frac{G(z) - I_{[\log y < g(G(z))]}}{g(g(G(z)))}\, g(z)dz \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} \frac{G(z) - I_{[\log y < G^{-1}(G(z))]}}{g(G^{-1}(G(z)))}\, g(z)dz \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} \frac{G(z) - I_{[\log y < z]}}{g(z)}\, g(z)dz \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} \left(G(z) - I_{[\log y < z]}\right) dz \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \left\{ \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z)dz - \int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} I_{[\log y < z]} dz \right\} \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \qquad (6.30) \\
&= \quad \frac{1}{1-2\bar{\alpha}} \left\{ \underbrace{\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z)dz}_{=:\ \eta} - \underbrace{\int_{\max(\log y, g_{\bar{\alpha}})}^{g_{1-\bar{\alpha}}} dz}_{=:\ \gamma} \right\} \; - \; c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}).
\end{aligned}
$$

Partielle Integration liefert für η:

$$
\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} G(z)dz \quad = \quad \underbrace{G(z)z\Big|_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}}}_{=:\ \tau} - \underbrace{\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} z d(G(z))}_{=:\ \kappa}.
$$

Rücksubstitution mit $z = G^{-1}(\alpha)$ ergibt für κ:

$$
\begin{aligned}
\int_{g_{\bar{\alpha}}}^{g_{1-\bar{\alpha}}} z d(G(z)) \quad &= \quad \int_{G^{-1}(g_{\bar{\alpha}})}^{G^{-1}(g_{1-\bar{\alpha}})} G^{-1}(\alpha) d(G(G^{-1}(\alpha))) \\
&= \quad \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} g_\alpha d\alpha \quad = \quad (1-2\bar{\alpha}) \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} \frac{g_\alpha}{1-2\bar{\alpha}} d\alpha \\
&= \quad (1-2\bar{\alpha}) \int_{\bar{\alpha}}^{1-\bar{\alpha}} g_\alpha u(\alpha) d\alpha \\
&= \quad (1-2\bar{\alpha}) \,\mathrm{E}(g_\alpha) \quad \overset{(6.18)}{=} \quad c_1(1-2\bar{\alpha}).
\end{aligned}
$$

Für τ erhält man:

$$\begin{aligned} G(z)z\Big|_{g_{\bar\alpha}}^{g_{1-\bar\alpha}} &= G^{-1}(\alpha)G(G^{-1}(\alpha))\Big|_{G^{-1}(g_{\bar\alpha})}^{G^{-1}(g_{1-\bar\alpha})} = g_\alpha\alpha\Big|_{\bar\alpha}^{1-\bar\alpha} \\ &= (1-\bar\alpha)\log(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) - \bar\alpha\log(Q_{\bar\alpha}(P_{1,1})). \end{aligned}$$

Für γ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\max(\log y, g_{\bar\alpha})}^{g_{1-\bar\alpha}} dz &= \int_{G^{-1}(\max(\log y, g_{\bar\alpha}))}^{G^{-1}(g_{1-\bar\alpha})} d(G^{-1}(\alpha)) \\ &= \int_{\max(y,\bar\alpha)}^{1-\bar\alpha} d(\log(Q_\alpha(P_{1,1}))) \\ &= \log(Q_\alpha(P_{1,1}))\Big|_{\max(y,\bar\alpha)}^{1-\bar\alpha} \\ &= \log(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) - \log(\max(y, Q_{\bar\alpha}(P_{1,1}))). \end{aligned}$$

Wenn man die bis dahin ermittelten Ergebnisse einsetzt, dann erhält man die gesuchte Einflussfunktion der QLS-Schätzung des Achsenabschnitts-Parameters $IF(y; b_1, P_{1,1})$:

$$\begin{aligned} IF(y; b_0, P_{1,1}) &= \frac{1}{1-2\bar\alpha}\Big[(1-\bar\alpha)\log(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) - \bar\alpha\log(Q_{\bar\alpha}(P_{1,1})) - c_1(1-2\bar\alpha) \\ &\qquad - \log(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) + \log(\max(y, Q_{\bar\alpha}(P_{1,1})))\Big] \\ &\qquad - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}) \\ &= \frac{1}{1-2\bar\alpha}\Big[\log(\max(y, Q_{\bar\alpha}(P_{1,1}))) - c_1(1-2\bar\alpha) - \bar\alpha\log(Q_{1-\bar\alpha}(P_{1,1})) \\ &\qquad - \bar\alpha\log(Q_{\bar\alpha}(P_{1,1}))\Big] - c_1 IF(y; b_1, P_{1,1}). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.2.11

In der Original-Arbeit von Boudt et al. (2009) wurden die Einflussfunktionen (6.24) und (6.28) falsch berechnet, da die oberen Grenzen bei der Integration der Indikatorfunktionen in den Gleichungen (6.27) und (6.30) nicht richtig eingesetzt wurden.

Bemerkung 6.2.12
Die Einflussfunktionen der Methode der Kleinste-Quadrate-Schätzung (OLS-Schätzung) des Skalen- und des Gestalts-Parameters der Standard-Weibull-Verteilung sind Spezialfälle von (6.24) und (6.28). Insbesondere erhält man für $\bar{\alpha} = 0$ und $\lambda = \beta = 1$:

$$\begin{aligned}
IF(y; \beta_{\text{OLS}}, P_{1,1}) &\overset{(6.14)}{=} -IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&\overset{(6.24)}{=} -\frac{1}{2c_2(1-2\cdot 0)}\Big[\psi(\max(y, Q_0(P_{1,1}))) \;-\; c_2(1-2\cdot 0) \\
&\qquad\qquad -\; 0\cdot\psi(Q_{1-0}(P_{1,1})) \;-\; 0\cdot\psi(Q_0(P_{1,1}))\Big] \\
&= -\frac{1}{2c_2}\Big[\big(\log(y) - c_1\big)^2 \;-\; c_2\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\big(\log(y) - c_1\big)^2}{c_2} \;-\; 1\right]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
IF(y; \lambda_{\text{OLS}}, P_{1,1}) &\overset{(6.15)}{=} IF(y; b_0, P_{1,1}) \\
&\overset{(6.28)}{=} \frac{1}{1-2\cdot 0}\Big[\log(\max(y, Q_0(P_{1,1}))) \;-\; c_1(1-2\cdot 0) \\
&\qquad -\; 0\cdot\log(Q_{1-0}(P_{1,1})) \;-\; 0\cdot\log(Q_0(P_{1,1}))\Big] \;-\; c_1\, IF(y; b_1, P_{1,1}) \\
&= \log(y) \;-\; c_1 \;+\; c_1\, IF(y; \beta_{\text{OLS}}, P_{1,1}).
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.2.13
Boudt et al. (2009) haben mittels numerischer Integration für c_1 und c_2 (vgl. Lemma 6.2.8) die folgenden Konstanten erhalten. Für $\bar{\alpha} = 0$ (Im Fall der OLS-Schätzung): $c_1 \approx -0.5772$ und $c_2 \approx 1.6449$, und für $\bar{\alpha} = \frac{1}{3}$ (Im Fall der QLS-Schätzung mit hohem Bruchpunkt vgl. Satz 6.2.3): $c_1 \approx -0.3788$ und $c_2 \approx 0.0806$.

Definition 6.2.14 (Affine-Äquivarianz bzgl. einer affinen Transformation)
Ist ein Funktional T skalen-äquivariant und lokations-invariant, dann wird dieses affin-äquivariant genannt. D. h. für ein Funktional T bzgl. einer affinen Transformation h auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß P gilt:

$$T(P^h) \;=\; h\big(T(P)\big) \tag{6.31}$$

und

$$T(P^h) \;=\; T(P). \tag{6.32}$$

Satz 6.2.15

Sei T ein Funktional, das äquivariant bzgl. der Transformation h ist, dann gilt für die Einflussfunktion:

$$IF\big(h(y);T,P^h\big) \;=\; h'\big(T(P)\big)IF(y;T,P), \tag{6.33}$$

hierbei entspricht h' die Ableitung von h.

Sei T ein Funktional, das invariant bzgl. der Transformation h ist, dann ist die Einflussfunktion wie folgt gegeben

$$IF\big(h(y);T,P^h\big) \;=\; IF(y;T,P). \tag{6.34}$$

Beweis:

Zunächst zeigt man die Auswirkung einer Transformation h auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P_{t,y} = (1-t)P + t\delta_y$. Dazu sei B eine beliebige Menge aus der Borel-σ-Algebra. Dann gilt nach Definition von Bildmaßen (vgl. Müller 2007, Seite 9):

$$\begin{aligned}
(P_{t,y})^h(B) &= P_{t,y}\big(h^{-1}(B)\big) \\
&= (1-t)P\big(h^{-1}(B)\big) + t\delta_y\big(h^{-1}(B)\big) \\
&= (1-t)P^h(B) + t\delta_{h(y)}(B) \\
&= (P^h)_{t,h(y)}(B).
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$(P_{t,y})^h \;=\; \big((1-t)P + t\delta_y\big)^h \;=\; (1-t)P^h + t\delta_{h(y)} \;=\; (P^h)_{t,h(y)}. \tag{6.35}$$

Sei T ein äquivariantes Funktional, dann gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
IF\big(h(y);T,P^h\big) &= \frac{\partial}{\partial t}T\big((P^h)_{t,h(y)}\big)\big|_{t=0} \\
&\overset{(6.35)}{=} \frac{\partial}{\partial t}T\big((P_{t,y})^h\big)\big|_{t=0} \\
&\overset{(6.31)}{=} \frac{\partial}{\partial t}h\big(T(P_{t,y})\big)\big|_{t=0} \\
&= h'\big(T(P_{0,y})\big)IF(y;T,P).
\end{aligned}$$

Sei nun T ein invariantes Funktional bzgl. der Transformation h dann gilt für die Einflussfunktion:

$$\begin{aligned} IF\big(h(y);T,P^h\big) &= \frac{\partial}{\partial t}T\big((P^h)_{t,h(y)}\big)\big|_{t=0} \\ &\overset{(6.35)}{=} \frac{\partial}{\partial t}T\big((P_{t,y})^h\big)\big|_{t=0} \\ &\overset{(6.32)}{=} \frac{\partial}{\partial t}h\big(T(P_{t,y})\big)\big|_{t=0} \\ &= IF(y;T,P). \end{aligned}$$

□

Satz 6.2.16

Seien λ und β affin-äquivariante Funktionale bzgl. der Transformation h. Dann lassen sich die Einflussfunktionen der allgemeinen Weibull-Verteilung wie folgt berechnen:

$$IF(y;\lambda,P_{\lambda,\beta}) = \beta\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta;\lambda,P_{1,1}\Big) \tag{6.36}$$

und

$$IF(y;\beta,P_{\lambda,\beta}) = \beta\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^\beta;\beta,P_{1,1}\Big). \tag{6.37}$$

Beweis:

Mit Hilfe der log-Weibull-Verteilung $G_{\lambda,\beta}$ und ihrer Zugehörigkeit zu einer Lokations- und Skalen-Familie mit den Parametern $\mu = \log\lambda$ und $\sigma = 1/\beta$ können die bis dahin gewonnenen Resultate der Einflussfunktionen der Standard-Weibull-Verteilung zu der allgemeinen Weibull-Verteilung wie folgt erweitert werden: Dazu betrachtet man die folgenden Transformationen

$$h_1(y) = \log y \tag{6.38}$$

$$h_2(y) = y - \log\lambda \tag{6.39}$$

$$h_3(y) = \beta y, \tag{6.40}$$

hierbei gilt $y,\lambda,\beta > 0$.

Sei nun λ ein affin-äquivariantes Funktional (vgl. Definition 6.2.14). Sei h_1 eine affine Transformation mit $h_1(y) = \log y$. Dann gilt nach dem Satz 6.2.15 bzgl. dieser Transformation zunächst:

$$IF(\log y;\lambda,G_{\lambda,\beta}) \overset{(6.33)}{=} \frac{1}{\lambda(P_{\lambda,\beta})}\,IF(y;\lambda,P_{\lambda,\beta}).$$

D. h.

$$IF(y;\lambda,P_{\lambda,\beta}) \overset{(6.13)}{=} \lambda\, IF(\log y;\lambda,G_{\lambda,\beta}). \tag{6.41}$$

Man wendet nun die Transformation h_2 mit $h_2(y) = y - \log\lambda$ auf die log-Weibull-Verteilung an, unter der Annahme, dass das Funktional λ bzgl. dieser Transformation invariant ist. Dann erhält man wieder mit dem Satz 6.2.15 für das Wahrscheinlichkeitsmaß $G_{\lambda,\beta} = (1-t)G_{1,1} + t\delta_{\log y}$ die folgende Einflussfunktion

$$\begin{aligned} IF(\log y;\lambda,G_{\lambda,\beta}) &\overset{(6.34)}{=} IF\big((\log y - \log\lambda);\lambda,G_{1,1}\big) \\ &= IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big);\lambda,G_{1,1}\Big). \end{aligned} \tag{6.42}$$

Anschließend wendet man die Transformation h_3 mit $h_3(y) = \beta y$ auf die Standard-log-Weibull-Verteilung an. Dann gilt:

$$\begin{aligned} IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big);\lambda,G_{1,1}\Big) &\overset{(6.34)}{=} IF\Big(\beta\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big);\lambda,G_{1,1}\Big) \\ &= IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta};\lambda,G_{1,1}\Big) \\ &\overset{(6.33)}{=} \frac{\beta}{\lambda(G_{1,1})}\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta};\lambda,P_{1,1}\Big) \\ &\overset{(6.13)}{=} \frac{\beta}{\lambda}\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta};\lambda,P_{1,1}\Big). \end{aligned} \tag{6.43}$$

Insgesamt erhält man für das affin-äquivariante Funktional λ bzgl. der Transformationen h_1, h_2 und h_3 Folgendes:

$$\begin{aligned} IF(y;\lambda,P_{\lambda,\beta}) &\overset{(6.41)}{=} \lambda\, IF(\log y;\lambda,G_{\lambda,\beta}) \\ &\overset{(6.42)}{=} \lambda\, IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big);\lambda,G_{1,1}\Big) \\ &\overset{(6.43)}{=} \beta\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta};\lambda,P_{1,1}\Big). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Einflussfunktion für das Funktional β für die allgemeine Weibull-Verteilung. Dazu sei β affin-äquivariant bzgl. der Transformationen h_1, h_2 und h_3. Also

$$\begin{aligned} IF(y;\beta,P_{\lambda,\beta}) &\overset{(6.33)}{=} \frac{1}{1/\beta(P_{\lambda,\beta})}\, IF(\log y;\beta,G_{\lambda,\beta}) \\ &\overset{(6.12)}{=} \beta\, IF(\log y;\beta,G_{\lambda,\beta}). \end{aligned}$$

Da das Funktional β invariant bzgl. der Transformation h_2 ist, gilt:

$$\begin{aligned}\beta\, IF(\log y; \beta, G_{\lambda,\beta}) &= \beta\, IF\big((\log y - \log \lambda); \beta, G_{1,1}\big) \\ &= \beta\, IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big); \beta, G_{1,1}\Big).\end{aligned}$$

Anwendung der Transformation h_3 ergibt:

$$\begin{aligned}\beta\, IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big); \beta, G_{1,1}\Big) &= \beta\, IF\Big(\log\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}; \beta, G_{1,1}\Big) \\ &\overset{(6.33)}{=} \beta\, \frac{\beta}{\beta(G_{1,1})}\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}; \beta, P_{1,1}\Big) \\ &\overset{(6.12)}{=} \beta\, IF\Big(\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{\beta}; \beta, P_{1,1}\Big).\end{aligned}$$

Somit ist der Satz bewiesen.

$\square$

Kapitel 7

Repeated Median

In diesem Kapitel wird eine weitere Regressionsschätzung vorgestellt. Siegel (1982) hat die Repeated-Median- (RM)-Schätzung vorgeschlagen. Diese Schätzung ist robust und besitzt einen Bruchpunkt von 1/2.

Danach wird gezeigt, dass die Einflussfunktionen der RM-Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters der Weibull-Verteilung explizit gegeben sind und dass diese auch beschränkt sind.

7.1 Motivation

Definition 7.1.1 (Repeated Median (vgl. Siegel 1982))
Gegeben sei ein bivariater Datensatz $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$*, wobei* $x_i \neq x_j$ *für* $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ *und der Median* $\mathrm{med}_i(x_i) = \mathrm{med}(x_1, \ldots, x_N)$*. Die Repeated-Median-*(RM)*-Schätzung des Steigungs-Parameters* $\hat{b}_1$ *und des Achsenabschnitts-Parameters* $\hat{b}_0$ *ist definiert durch*

$$\hat{b}_1 = \mathrm{med}_j \ \mathrm{med}_{i \neq j} \ \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \tag{7.1}$$

und

$$\hat{b}_0 = \mathrm{med}_j \ \mathrm{med}_{i \neq j} \ \frac{x_j y_i - x_i y_j}{x_j - x_i}. \tag{7.2}$$

Beachte, dass die Steigungen $(y_j - y_i)/(x_j - x_i)$ *beim Vorliegen eines Weibull-Datensatzes immer positiv sind.*

Satz 7.1.2 (vgl. Siegel 1982)
Für den Bruchpunkt der RM-*Schätzung des Steigungs-Parameters* $\hat{b}_1$ *und des Achsenabschnitts-Parameters* $\hat{b}_0$ *gilt für alle* $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$\varepsilon_N^*(\hat{\theta}_{\mathrm{RM}}, (x_n, y_n)) \;=\; \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor. \tag{7.3}$$

Beweis:
Siehe Siegel, A. F. (1982). Robust regression using repeated medians. *Biometrika 69,* 242-244.

□

7.2 Schätzen mit dem Repeated Median

Satz 7.2.1 (vgl. Boudt et al. 2009)
Die Einflussfunktionen der RM-*Schätzung des Steigungs-Parameters* b_1 *und des Achsenabschnitts-Parameters* b_0 *der Standard-Weibull-Verteilung* $P_{1,1}$ *sind gegeben durch:*

$$IF(y; b_1, P_{1,1}) \;=\; \mathrm{med}_{\alpha_1}\left(\mathrm{med}_{\alpha_2}\frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} - \mathrm{med}_{\alpha_2}\frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}\right)$$

und

$$IF(y; b_0, P_{1,1}) \;=\; \mathrm{med}_{\alpha_1}\left(\mathrm{med}_{\alpha_2}\frac{g_{\alpha_1} IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} - \mathrm{med}_{\alpha_2}\frac{g_{\alpha_2} IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\right),$$

wobei hier wieder $g_{\alpha_i} \;=\; G^{-1}(\alpha_i)$ *für* $i = 1, 2$ *gilt.*

Beweis: Der Beweis basiert auf dem Beweis in Boudt et al. (2009).
Seien die RM-Funktionale wie folgt gegeben:

$$\beta_{\mathrm{RM}}(P_{\lambda,\beta}) \;=\; \frac{1}{b_1(P_{\lambda,\beta})} \;=\; \beta \tag{7.4}$$

und

$$\lambda_{\mathrm{RM}}(P_{\lambda,\beta}) \;=\; \exp\{b_0(P_{\lambda,\beta})\} \;=\; \lambda. \tag{7.5}$$

Weiterhin seien α_1 und α_2 gleichverteilte Zufallsvariablen auf das Intervall $[0, 1]$. Es wird nochmal daran erinnert, dass für die log-Weibull-Verteilung Folgendes gilt:

$$g_\alpha = \log Q_\alpha(P_{1,1}) \qquad \text{bzw.} \qquad g_{\alpha_i} = \log Q_{\alpha_i}(P_{1,1}) \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2.$$

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert man die zugehörigen Funktionale der RM-Schätzung des Steigungs-Parameters $\hat{b}_1$ und des Achsenabschnitts-Parameters $\hat{b}_0$ wie folgt:

$$b_1(P) = \text{med}_{\alpha_1} H_P(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P)) \tag{7.6}$$

und
$$b_0(P) = \text{med}_{\alpha_1} K_P(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P)), \tag{7.7}$$

wobei

$$H_P(y,z) = \text{med}_{\alpha_2}\left(\frac{z - \log Q_{\alpha_2}(P)}{y - g_{\alpha_2}}\right) \tag{7.8}$$

und
$$K_P(y,z) = \text{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y \log Q_{\alpha_2}(P)}{g_{\alpha_2} - y}\right). \tag{7.9}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda = 1$ und $\beta = 1$. Weiterhin sei $P_t = (1-t)P_{1,1} + t\delta_y$ für alle $t \geq 0$. Die Auswertung der RM-Funktionale (vgl. (7.4) und (7.5)) für $\lambda = \beta = 1$ liefert

$$b_0(P_{1,1}) = 0 \qquad \text{und} \qquad b_1(P_{1,1}) = 1. \tag{7.10}$$

Aus der Taylor-Entwicklung erster Ordnung (vgl. Anhang A.2) von $H_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t))$ folgt:

$$\begin{aligned}
&H_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t)) \\
&= H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) + t\Bigg(\frac{\partial}{\partial z} g_{\alpha_1}\bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{\partial H_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t))}{\partial t}\bigg|_{t=0} \\
&\qquad + \frac{\partial H_{P_t}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial t} \log Q_{\alpha_1}(P_t)\bigg|_{t=0}\Bigg) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) + t\Bigg(\frac{\partial H_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1}))}{\partial t}\bigg|_{t=0} \\
&\qquad + \frac{\partial H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{(\partial/\partial t) Q_{\alpha_1}(P_t)|_{t=0}}{Q_{\alpha_1}(P_t)|_{t=0}}\Bigg) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) + t\Bigg(\frac{\partial H_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})}{\partial t}\bigg|_{t=0} \\
&\qquad + \frac{\partial H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\Bigg) + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Wegen

$$\begin{aligned} H_{P_{1,1}}(y,z) &= \operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{z-\overbrace{\log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}^{=g_{\alpha_2}}+\overbrace{y-y}^{=0}}{y-g_{\alpha_2}}\right) \\ &\overset{\text{Lemma 4.1.9}}{=} 1+(z-y)\operatorname{med}_{\alpha_2}\frac{1}{(y-g_{\alpha_2})} \end{aligned} \tag{7.12}$$

ist

$$\frac{\partial}{\partial z}H_{P_{1,1}}(y,z) = \operatorname{med}_{\alpha_2}\frac{1}{(y-g_{\alpha_2})}. \tag{7.13}$$

Aus der Taylor-Entwicklung (vgl. Anhang A.2) von $\log Q_{\alpha_2}(P_t)$ folgt:

$$\begin{aligned} \log Q_{\alpha_2}(P_t) &= \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})+t\,\frac{\partial}{\partial t}\log Q_{\alpha_2}(P_t)\bigg|_{t=0}+\mathcal{O}(t^2) \\ &= \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})+t\,\frac{(\partial/\partial t)Q_{\alpha_2}(P_t)|_{t=0}}{Q_{\alpha_2}(P_t)|_{t=0}}+\mathcal{O}(t^2) \\ &= \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})+t\,\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}+\mathcal{O}(t^2). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} H_{P_t}(y,z) &\overset{(7.8)}{=} \operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{z-\log Q_{\alpha_2}(P_t)}{y-g_{\alpha_2}}\right) \\ &\overset{(7.14)}{=} \operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{z-\log Q_{\alpha_2}(P_{1,1}) \;-\; t\,\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}+\mathcal{O}(t^2)}{y-g_{\alpha_2}}\right) \\ &= \operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{z-\log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}{y-g_{\alpha_2}} \;-\; t\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(y-g_{\alpha_2})}\right)+\mathcal{O}(t^2). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Die Ableitung von $H_{P_t}(g_{\alpha_1},g_{\alpha_1})$ nach t ausgewertet an der Stelle $t=0$ liefert:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}H_{P_t}(g_{\alpha_1},g_{\alpha_1})\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_1}\;-\;\log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}{g_{\alpha_1}-g_{\alpha_2}}-t\,\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_1}-g_{\alpha_2})}\right)+\mathcal{O}(t^2)\right\}\bigg|_{t=0} \\ &= -\operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{IF(y;Q_{\alpha_2},P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_1}-g_{\alpha_2})}\right). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Setzt man die bis dahin gewonnenen Ergebnisse ein, so erhält man die RM-Schätzung des Steigungs-Parameters wie folgt:

$$
\begin{aligned}
b_1(P_t) &= \operatorname{med}_{\alpha_1} H_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t)) \\
&\overset{(7.11)}{=} \operatorname{med}_{\alpha_1} \Bigg[H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) \\
&\quad + t \left(\frac{\partial H_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})}{\partial t}\Bigg|_{t=0} + \frac{\partial H_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\Bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} \right) + \mathcal{O}(t^2) \Bigg] \\
&\overset{(7.13)\,(7.16)\,(7.12)}{=} \operatorname{med}_{\alpha_1} \Bigg[1 + (g_{\alpha_1} - \underbrace{\log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}_{= g_{\alpha_1}}) \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{1}{g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}} + \\
&\quad + t \left(- \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})} + \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{1}{g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} \right) \Bigg] + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \operatorname{med}_{\alpha_1} \Bigg[1 + t \Bigg(- \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})} \\
&\quad + \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} \Bigg) \Bigg] + \mathcal{O}(t^2) \\
&= 1 + t \operatorname{med}_{\alpha_1} \left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} \right) + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die Gleichheit in der letzten Gleichung wegen Lemma 4.1.9 bzw. wegen der Lokations- und der Skalen-Äquivarianz des Medians.

Die Einflussfunktion der RM-Schätzung des Steigungs-Parameters ist somit gleich

$$
\begin{aligned}
IF(y; b_1, P_{1,1}) &= \frac{\partial}{\partial t} b_1(P_t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 1 + t \operatorname{med}_{\alpha_1} \left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} \right) + \mathcal{O}(t^2) \right\}\Bigg|_{t=0} \\
&= \operatorname{med}_{\alpha_1} \left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} \right).
\end{aligned}
$$

Ganz analog beweist man den anderen Fall der RM-Schätzung des Achsenabschnitts-Parameters.

Die Taylor-Entwicklung erster Ordnung von $K_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t))$ (vgl. Gleichung (7.9)) liefert wiederum:

$$\begin{aligned} K_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t)) \quad &= \quad K_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) + \; t\Bigg(\frac{\partial K_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})}{\partial t}\Bigg|_{t=0} \\ &+ \; \frac{\partial K_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\Bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\Bigg) + \mathcal{O}(t^2). \qquad (7.17) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} K_{P_{1,1}}(y, z) \quad &\stackrel{(7.9)}{=} \quad \mathrm{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}{g_{\alpha_2} - y}\right) \\ &= \quad \mathrm{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y g_{\alpha_2}}{g_{\alpha_2} - y}\right) \\ &\stackrel{\text{Lemma } 4.1.9}{=} \quad (z - y)\, \mathrm{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}}{(g_{\alpha_2} - y)} \end{aligned} \qquad (7.18)$$

gilt für

$$\frac{\partial}{\partial z} K_{P_{1,1}}(y, z) \;=\; \mathrm{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}}{(g_{\alpha_2} - y)}. \qquad (7.19)$$

Für K_{P_t} erhält man mit Hilfe der Taylor-Entwicklung erster Ordnung von $\log Q_{\alpha_2}(P_t)$ (vgl. Gleichung (7.14)):

$$\begin{aligned} &K_{P_t}(y, z) \\ &\stackrel{(7.9)}{=} \quad \mathrm{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y \log Q_{\alpha_2}(P_t)}{g_{\alpha_2} - y}\right) \\ &\stackrel{(7.14)}{=} \quad \mathrm{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1}) \; - \; y\, t \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} + \mathcal{O}(t^2)}{g_{\alpha_2} - y}\right) \\ &= \quad \mathrm{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} z - y \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}{g_{\alpha_2} - y} \; - \; y\, t \frac{IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_2} - y)}\right) + \mathcal{O}(t^2). \qquad (7.20) \end{aligned}$$

Die Ableitung von $K_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})$ nach t ausgewertet an der Stelle $t = 0$ ist somit:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} K_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_2} g_{\alpha_1} \;-\; g_{\alpha_1} \log Q_{\alpha_2}(P_{1,1})}{g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1}} - t\frac{g_{\alpha_1} IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1})}\right) + \mathcal{O}(t^2)\right\}\bigg|_{t=0} \\
&= -\operatorname{med}_{\alpha_2}\left(\frac{g_{\alpha_1} IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1})}\right). \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

Kombination der bis dahin ermittelten Resultate liefert:

$$
\begin{aligned}
b_0(P_t) \;&=\; \operatorname{med}_{\alpha_1} K_{P_t}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_t)) \\
&\overset{(7.17)}{=} \operatorname{med}_{\alpha_1}\Bigg[K_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, \log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})) \\
&\qquad + t\left(\frac{\partial K_{P_t}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_1})}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \frac{\partial K_{P_{1,1}}(g_{\alpha_1}, z)}{\partial z}\bigg|_{z=g_{\alpha_1}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\right) + \mathcal{O}(t^2)\Bigg] \\
&\overset{\substack{(7.19)\\(7.21)\\(7.18)}}{=} \operatorname{med}_{\alpha_1}\Bigg[(g_{\alpha_1} - \underbrace{\log Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}_{= g_{\alpha_1}}) \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}}{g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1}} + \\
&\qquad + t\left(-\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_1} IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1})} + \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}}{g_{\alpha_2} - g_{\alpha_1}} \frac{IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\right)\Bigg] + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \operatorname{med}_{\alpha_1}\left[t\left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_1}\, IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{Q_{\alpha_2}(P_{1,1})(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}\, IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\right)\right] + \mathcal{O}(t^2) \\
&= t\ \operatorname{med}_{\alpha_1}\left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_1}\, IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}\, IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})}\right) + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die Gleichheit in der letzten Gleichung wegen der Skalen-Äquivarianz des Medians.

Die Einflussfunktion der RM-Schätzung des Achsenabschnitts-Parameters ist somit gleich

$$\begin{aligned}
IF(y; b_0, P_{1,1}) &= \frac{\partial}{\partial t} b_0(P_t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{ t \operatorname{med}_{\alpha_1}\left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_1}\, IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}\, IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} \right) + \mathcal{O}(t^2) \right\}\Big|_{t=0} \\
&= \operatorname{med}_{\alpha_1}\left(\operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_1}\, IF(y; Q_{\alpha_2}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_2}(P_{1,1})} - \operatorname{med}_{\alpha_2} \frac{g_{\alpha_2}\, IF(y; Q_{\alpha_1}, P_{1,1})}{(g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}) Q_{\alpha_1}(P_{1,1})} \right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2
Da die RM-Funktionale mit den QLS-Funktionalen gleich sind, erhält man mit Hilfe von Satz 6.2.5 für die Einflussfunktionen der RM-Schätzung des Gestalts- und des Skalen-Parameters Folgendes:

$$IF(y; \beta_{\mathrm{RM}}, P_{\lambda,\beta}) = -\beta^2\, IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta}) \tag{7.22}$$

und

$$IF(y; \lambda_{\mathrm{RM}}, P_{\lambda,\beta}) = \lambda\, IF(y; b_0, P_{\lambda,\beta}), \tag{7.23}$$

hierbei ist $IF(y; b_1, P_{\lambda,\beta})$ die Einflussfunktion der RM-Schätzung des Steigungs-Parameters und $IF(y; b_0, P_{\lambda,\beta})$ die Einflussfunktion der RM-Schätzung des Achsenabschnitts-Parameters (vgl. Satz 7.2.1).

Bemerkung 7.2.3
Mit Hilfe von Satz 6.2.16 erhält man für beliebige Werte von λ und β die zugehörigen Einflussfunktionen.

Kapitel 8

Median/MAD- und Median/Q_N-Schätzung

Das folgende Kapitel befasst sich mit zwei weiteren robusten Schätzungen. Zunächst wird mit der von Olive (2006) vorgeschlagenen Schätzung anhand der Median und der Median der absoluten Abweichungen untersucht und anschließend wird die Untersuchung mit dem Median und mittels der von Rousseeuw und Croux (1993) eingeführte Q_N-Schätzung fortgesetzt.

8.1 Median/MAD-Schätzung

Da der Median gegenüber Ausreißern unempfindlich ist (vgl. Satz 4.1.11), ist der Median der absoluten Abweichungen von Median auch ein robustes Streuungsmaß und wird nun wie folgt definiert.

Definition 8.1.1 (Median der absoluten Abweichungen MAD (vgl. Müller 2009a))
Seien $y_1, \ldots, y_N$ Beobachtungen eines Merkmals Y. Dann heißt der Median der absoluten Abweichungen kurz MAD

$$\mathrm{MAD}(y) \;=\; \text{Median von } (|y_1 - \tilde{y}_{\frac{1}{2}}|, \ldots, |y_N - \tilde{y}_{\frac{1}{2}}|), \tag{8.1}$$

wobei $\tilde{y}_{\frac{1}{2}}$ der Median ist.

Definition 8.1.2 (Populations-MAD (vgl. Olive 2006))
Seien $y_1, \ldots, y_N$ Beobachtungswerte eines Merkmals Y. Dann ist der Populationsmedian der absoluten Abweichungen gegeben durch:

$$\mathrm{MAD}(Y) \;=\; \mathrm{med}(|Y - \mathrm{med}(Y)|). \tag{8.2}$$

Bemerkung 8.1.3
Die log-Weibull-Verteilung gehört zu einer Lokations- und Skalen-Familie mit den Parametern $\mu = \log\lambda$ und $\sigma = 1/\beta$. Aus diesem Grund kann die Schätzung der Weibull-Parameter als Lokations- und Skalen-Schätz-Problem für $\hat{\lambda} = \exp(\hat{\mu})$ und $\hat{\beta} = 1/\hat{\sigma}$ der Beobachtungen $\log y_1, \ldots, \log y_N$ angesehen werden.

Definition 8.1.4 (Median/MAD-Schätzung (vgl. Olive 2006))
Seien $\log y_1, \ldots, \log y_N$ *Beobachtungen eines Merkmals* Y. *Dann ist die Median/*MAD-*Schätzung der Lokations- und Skalen-Familie kurz* med/MAD *gegeben durch:*

$$\hat{\sigma} \;=\; d\ \mathrm{med}_j\,|\log y_j - \mathrm{med}_i \log y_i| \tag{8.3}$$

und

$$\hat{\mu} \;=\; \mathrm{med}_i \log y_i - \hat{\sigma}\ \log\log 2, \tag{8.4}$$

dabei ist d *ein Konsistenzfaktor.*

Bemerkung 8.1.5
Olive hat den Konsistenzfaktor d für eine nicht kontaminierte log-Weibull-Verteilung berechnet und $d = 1.3037$ erhalten (vgl. Olive 2006). Somit ergibt sich nach Definition 8.1.4 für die med/MAD-Schätzung der log-Weibull-Verteilung Folgendes:

$$\hat{\sigma} \;=\; 1.3037\ \mathrm{med}_j\,|\log y_j - \mathrm{med}_i \log y_i| \tag{8.5}$$

und

$$\hat{\mu} \;=\; \mathrm{med}_i \log y_i - \hat{\sigma}\ \log\log 2. \tag{8.6}$$

Satz 8.1.6 (vgl. Boudt et al. 2009)
Die Einflussfunktionen der med/MAD-*Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters der Weibull-Verteilung* $P_{\lambda,\beta}$ *sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} IF(y;\beta_{\mathrm{med/MAD}},P_{\lambda,\beta}) &= -1.3037\,\beta^2\,IF(\log y;\mathrm{MAD},G_{\lambda,\beta}),\\ IF(y;\lambda_{\mathrm{med/MAD}},P_{\lambda,\beta}) &= \lambda\,[IF(\log y;Q_{\frac{1}{2}},G_{\lambda,\beta}) + 0.4778\,IF(\log y;\mathrm{MAD},G_{\lambda,\beta})]. \end{aligned}$$

Hierbei gilt die folgende Beziehung:

$$IF(\log y;Q_{\frac{1}{2}},G_{\lambda,\beta}) \;=\; \frac{IF(y;Q_{\frac{1}{2}},P_{\lambda,\beta})}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})}. \tag{8.7}$$

Beweis:
Nach der Definition des Medians der absoluten Abweichungen lassen sich für $Y := \log y$

die med/MAD-Schätzungen (8.5) und (8.6) wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= 1.3037\,\mathrm{med}(|Y - \mathrm{med}(Y)|) \\ &= 1.3037\,\mathrm{MAD}(Y) \end{aligned} \tag{8.8}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \mathrm{med}(Y) + 0.4778\,\mathrm{med}(|Y - \mathrm{med}(Y)|) \\ &= \mathrm{med}(Y) + 0.4778\,\mathrm{MAD}(Y). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Wenn man die Schätzungen von $\hat{\sigma}$ und $\hat{\mu}$ in Satz 6.2.5 für $\hat{\lambda} = \exp\{\hat{\mu}\}$ und $\hat{\beta} = \hat{\sigma}^{-1}$ einsetzt, dann erhält man die gewünschten Einflussfunktionen:

$$\begin{aligned} IF(y; \beta_{\mathrm{med/MAD}}, P_{\lambda,\beta}) &= IF(\log y; \hat{\sigma}^{-1}, G_{\lambda,\beta}) \\ &\overset{(6.14)}{=} -\beta^2\, IF(\log y; \hat{\sigma}, G_{\lambda,\beta}) \\ &\overset{(8.8)}{=} -1.3037\,\beta^2\, IF(\log y; \mathrm{MAD}, G_{\lambda,\beta}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} IF(y; \lambda_{\mathrm{med/MAD}}, P_{\lambda,\beta}) &= IF(\log y; \exp\hat{\mu}, G_{\lambda,\beta}) \\ &\overset{(6.15)}{=} \lambda\, IF(\log y; \hat{\mu}, G_{\lambda,\beta}) \\ &= \lambda\,[IF(\log y; \mathrm{med}, G_{\lambda,\beta}) + IF(\log y; 0.4778\hat{\sigma}, G_{\lambda,\beta})] \\ &\overset{(8.9)}{=} \lambda\,[IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G_{\lambda,\beta}) + 0.4778\, IF(\log y; \mathrm{MAD}, G_{\lambda,\beta})], \end{aligned}$$

wobei für die Einflussfunktion des Medians der log-Weibull-Verteilung gilt:

$$IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G_{\lambda,\beta}) \overset{(6.33)}{=} \frac{IF(y; Q_{\frac{1}{2}}, P_{\lambda,\beta})}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})}.$$

□

Beispiel 8.1.7 (Median/MAD-Schätzung)
Nach dem Satz 3.3.8 erhält man für

$$\psi(y) = \mathrm{sgn}(y) \tag{8.10}$$

und

$$\chi(y) = \mathrm{sgn}(|y| - 1) \tag{8.11}$$

den Median als Schätzung für den Lage-Parameter und den Median der absoluten Abweichungen als Schätzung für die Streuung.

Eine formale Auswertung der Gleichungen (3.41) und (3.42) liefert (vgl. Huber 1981):

$$IF(y;T,P) = \frac{\operatorname{sgn}(y - T(P))}{2f(T(P))} \tag{8.12}$$

und

$$IF(y;S,P) = \frac{\operatorname{sgn}(|y-T| - S) - \dfrac{f(T+S) - f(T-S)}{f(T)} \operatorname{sgn}(y-T)}{2[f(T+S) + f(T-S)]}. \tag{8.13}$$

Korollar 8.1.8 (vgl. Boudt et al. 2009)
*Die Einflussfunktion des Medians der absoluten Abweichungen der Standard-*log*-Weibull-Verteilung G ist gegeben durch:*

$$IF(\log y; \mathrm{MAD}, G) =$$

$$\frac{\operatorname{sgn}(|\log y - g_{\frac{1}{2}}| - \mathrm{MAD}) - [g(g_{\frac{1}{2}} + \mathrm{MAD}) - g(g_{\frac{1}{2}} - \mathrm{MAD})] IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G)}{2[g(g_{\frac{1}{2}} + \mathrm{MAD}) + g(g_{\frac{1}{2}} - \mathrm{MAD})]}, \tag{8.14}$$

wobei $g_{\frac{1}{2}} = G^{-1}(\frac{1}{2})$, $g = G'$ und MAD *das Funktional des Medians der absoluten Abweichungen ausgewertet an der Stelle $G_{1,1}$.*

Beweis:
Durch einfaches Einsetzen in (8.13).

□

Satz 8.1.9 (vgl. Müller 2009a)
Für den Bruchpunkt des Medians der absoluten Abweichungen MAD *gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$, deren Komponenten paarweise verschieden sind:*

$$\varepsilon_N^*(\mathrm{MAD}, y) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor. \tag{8.15}$$

Beweis:
Zunächst seien $y \in \mathbb{R}^N$ mit paarweise verschiedenen Komponenten und $\operatorname{med}(y) := y_{(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor)}$ für $y \in \mathbb{R}^N$ gegeben.

1. Behauptung: Für den Explosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^+(\mathrm{MAD}, y) \geq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor.$

Beweis: Sei $M \leq \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$. Für jedes $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$ sind dann $N - M > \frac{N}{2}$ Beobachtungen $\tilde{y}_{i_1}, \ldots, \tilde{y}_{i_{N-M}}$ nicht verändert. Sie liegen somit in $I := [y_{(1)}, y_{(N)}]$. Daraus folgt $\mathrm{med}(\tilde{y}) \in I$ für alle $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$.

Für alle $j = 1, \ldots, N - M$ ist $|\tilde{y}_{i_j} - \mathrm{med}(\tilde{y})| = |y_{i_j} - \mathrm{med}(\tilde{y})| \leq y_{(N)} - y_{(1)}$. Daher liegen mehr als $\frac{N}{2}$ der Zahlen $|\tilde{y}_1 - \mathrm{med}(\tilde{y})|, \ldots, |\tilde{y}_N - \mathrm{med}(\tilde{y})|$ in $[0, y_{(N)} - y_{(1)}]$. Also ist $|\,\mathrm{med}(|\tilde{y}_1 - \mathrm{med}(\tilde{y})|, \ldots, |\tilde{y}_N - \mathrm{med}(\tilde{y})|)| \leq y_{(N)} - y_{(1)}$.

2. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^-(\mathrm{MAD}, y) \geq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor.$

Beweis: Sei $M \leq \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{N-3}{2} \rfloor$. Sei $B := \min\{\frac{1}{2}|y^{'} - y^{''}| : y^{'}, y^{''} \in \{y_1, \ldots, y_N\}$ und $y^{'} \neq y^{''}\}$. Damit ist B wohldefiniert und positiv.

Sei $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$. Für höchstens $M + 1 = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ der Beobachtungen: $|\tilde{y}_n - \mathrm{med}(\tilde{y})| < B$. Also ist $\mathrm{MAD}(\tilde{y}) = \mathrm{med}(|\tilde{y}_1 - \mathrm{med}(\tilde{y})|, \ldots, |\tilde{y}_N - \mathrm{med}(\tilde{y})|) \geq B$.

3. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^-(\mathrm{MAD}, y) \leq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor.$

Beweis: Sei $M := \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$. Ohne Einschränkung sei $y_1 \leq \ldots \leq y_N$. Sei $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$ mit $\tilde{y}_n = y_{M+1} = \mathrm{med}(y)$ für $n = 1, \ldots, M$. Für $n = 1, \ldots, M + 1$ gilt: $|\tilde{y}_n - \mathrm{med}(y)| = 0$. Daher sind $M + 1 = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ der Zahlen $|\tilde{y}_1 - \mathrm{med}(\tilde{y})|, \ldots, |\tilde{y}_N - \mathrm{med}(\tilde{y})|$ gleich Null.
Also ist $\mathrm{MAD}(\tilde{y}) = \mathrm{med}(|\tilde{y}_1 - \mathrm{med}(\tilde{y})|, \ldots, |\tilde{y}_N - \mathrm{med}(\tilde{y})|) = 0$.

$\square$

8.2 Median/Q_N-Schätzung

Ein weiteres Maß für die Streuung ist die von Rousseeuw und Croux (1993) vorgeschlagene Q_N-Schätzung. Diese wird wie folgt definiert.

Definition 8.2.1 (Q_N-Schätzung (vgl. Rousseeuw und Croux 1993))
Die Q_N-Schätzung (Q von Quartil) $\hat{\sigma}_{Q_N}(y)$ basierend auf den Daten $y_1, \ldots, y_N$ ist definiert durch

$$\hat{\sigma}_{Q_N}(y) \;=\; H_{N,y}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \;:=\; \inf\Big\{x;\; H_{N,y}(x) \geq \frac{1}{4}\Big\}, \tag{8.16}$$

wobei

$$H_{N,y}(x) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} 1_{(-\infty,x]}(|y_n - y_m|) \tag{8.17}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1,m\neq n}^{N} 1_{(-\infty,x]}(|y_n - y_m|) \tag{8.18}$$

die Verteilungsfunktion der Abstände zwischen den Beobachtungen ist. Die Q_N-Schätzung ist also ein $\frac{1}{4}$-Quantil der Abstände.

Satz 8.2.2 (vgl. Rousseeuw und Croux 1993)
Für den Bruchpunkt der Q_N-Schätzfunktion $\hat{\sigma}_{Q_N}$ gilt für alle $y \in \mathbb{R}^N$, deren Komponenten paarweise verschieden sind:

$$\varepsilon_N^*(\hat{\sigma}_{Q_N}, y) = \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor. \tag{8.19}$$

Beweis: Der Beweis folgt dem Beweis in Müller (2009a).

Es gibt insgesamt $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ verschiedene Differenzen $|y_n - y_m|$, die vom Datensatz $y = (y_1, \ldots, y_N)^\top$ gebildet werden können.

1. Behauptung: Für den Explosionspunkt gilt: $\varepsilon_N^+(\hat{\sigma}_{Q_N}, y) \geq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$.

Beweis: Sei $M \leq \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$ und $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$ beliebig. Dann gibt es höchstens $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$ abgeänderte Komponenten, sodass $\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$ Komponenten unverändert sind. Damit gibt es mindestens

$$\begin{aligned}
\binom{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}{2} &= \frac{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil \left(\lceil \frac{N+1}{2} \rceil - 1 \right)}{2} \\
&\geq \frac{\frac{N+1}{2}\left(\frac{N+1}{2} - 1\right)}{2} \\
&= \frac{(N+1)(N-1)}{8}
\end{aligned}$$

unverfälschte Differenzen $|y_n - y_m|$.

Für diese Differenzen gilt: $|y_n - y_m| \leq \max\{|y_n - y_m|; n, m = 1, \ldots, N\} =: B$.
Da $\frac{(N+1)(N-1)}{8} > \frac{1}{4}\frac{N(N-1)}{8}$ gilt, sind mehr als ein Viertel aller möglichen Differenzen, die von $\tilde{y}$ gebildet werden können, unverfälscht. Es sind somit

$$H_{N,\tilde{y}}(B) \geq \frac{2}{N(N-1)} \frac{(N+1)(N-1)}{8} > \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt $\hat{\sigma}_{Q_N}(\tilde{y}) = H^{-1}_{N,\tilde{y}}(\frac{1}{4}) \leq B$ für alle $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$.

2. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon^-_N(\hat{\sigma}_{Q_N}, y) \geq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.

Beweis: Sei $B := \frac{1}{3}\min\{|y_n - y_m|; n, m \in 1, \ldots, N, n \neq m\}$. Da die Komponenten von y paarweise verschieden sind, folgt $B > 0$. Ist $M \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{N-2}{2} \right\rfloor$, dann können von $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$ höchstens $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ Komponenten Werte besitzen, die sich alle nicht mehr als B unterscheiden. Somit gibt es höchstens

$$\begin{aligned}\binom{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{2} &= \frac{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1\right)}{2} \\ &\leq \frac{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} - 1\right)}{2} \\ &= \frac{N(N-2)}{8}\end{aligned}$$

Differenzen, die kleiner als B sind. Für alle anderen Differenzen $|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m|$ gilt: $|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m| \geq B$. Damit gilt:

$$H_{N,\tilde{y}}(x) \leq \frac{2}{N(N-1)} \frac{N(N-2)}{8} < \frac{1}{4}$$

für alle $x \in [0, B)$ und somit $\hat{\sigma}_{Q_N}(\tilde{y}) = H^{-1}_{N,\tilde{y}}(\frac{1}{4}) \geq B$ für alle $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$.

3. Behauptung: Für den Implosionspunkt gilt: $\varepsilon^-_N(\hat{\sigma}_{Q_N}, y) \leq \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.

Beweis: Sei $M = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$. Setze $\tilde{y}_n = y_{M+1}$ für $n = 1, \ldots, M$ und $\tilde{y}_n = y_n$ für $n = M+1, \ldots, N$. Dann gilt: $\tilde{y} \in \mathcal{Y}_M(y)$ und $M + 1 = \left\lfloor \frac{N+2}{2} \right\rfloor$ Komponenten von $\tilde{y}$ nehmen den Wert y_{M+1} an. Dann gibt es

$$\begin{aligned}\binom{\lfloor \frac{N+2}{2} \rfloor}{2} &= \frac{\lfloor \frac{N+2}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{N+2}{2} \rfloor - 1\right)}{2} \\ &\geq \frac{\frac{N+1}{2}\left(\frac{N+1}{2} - 1\right)}{2} \\ &= \frac{(N+1)(N-1)}{8}\end{aligned}$$

Differenzen, die gleich Null sind. Es folgt

$$H_{N,\tilde{y}}(0) \geq \frac{2}{N(N-1)} \frac{(N+1)(N-1)}{8} > \frac{1}{4}.$$

Und somit $\hat{\sigma}_{Q_N}(\tilde{y}) = H^{-1}_{N,\tilde{y}}(\frac{1}{4}) = 0$.

$\square$

Definition 8.2.3 (Median/Q_N-Schätzung (vgl. Boudt et al. 2009))
Seien $\log y_1, \ldots, \log y_N$ *Beobachtungswerte eines Merkmals* Y. *Dann heißt die Median/*Q_N*-Schätzung kurz* med/Q_N

$$\hat{\mu} \;=\; \operatorname{med}_i \log y_i - \hat{\sigma}\, \log\log 2 \tag{8.20}$$

$$\hat{\sigma} \;=\; d\,\{|\log y_i - \log y_N|;\; 1 \le i \le j \le N\}_{(l)}, \tag{8.21}$$

wobei l *der* l*-te geordnete Wert über die Menge* $\binom{N}{2}$ *und* d *ein Konsistenzfaktor ist.*

Satz 8.2.4 (vgl. Boudt et al. 2009)
Für die Einflussfunktionen der med/Q_N*-Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters der Weibull-Verteilung* $P_{\lambda,\beta}$ *gilt:*

$$IF(y; \beta_{\operatorname{med}/Q_N}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; -\beta^2 d\, IF(\log y; Q_N, G_{\lambda,\beta}),$$

$$IF(y; \lambda_{\operatorname{med}/Q_N}, P_{\lambda,\beta}) \;=\; \lambda\,[IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G_{\lambda,\beta}) - d\, IF(\log y; Q_N, G_{\lambda,\beta}) \log\log 2],$$

hierbei ist $d = 1.9577$.

Beweis:
Für den Skalen-Parameter $\hat{\beta} = 1/\hat{\sigma}$ erhält man mit Hilfe der Definition der med/Q_N-Schätzung die folgende Einflussfunktion:

$$\begin{aligned}
IF(y; \beta_{\operatorname{med}/Q_N}, P_{\lambda,\beta}) &= IF(\log y; \hat{\sigma}^{-1}, G_{\lambda,\beta}) \\
&\overset{(6.14)}{=} -\beta^2\, IF(\log y; \hat{\sigma}, G_{\lambda,\beta}) \\
&\overset{(8.21)}{=} -\beta^2 d\, IF(\log y; Q_N, G_{\lambda,\beta}).
\end{aligned}$$

Analog erhält man für den Lokations-Parameter $\hat{\mu} = \log \hat{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
IF(y; \lambda_{\operatorname{med}/Q_N}, P_{\lambda,\beta}) &= IF(\log y; \exp \hat{\mu}, G_{\lambda,\beta}) \\
&\overset{(6.15)}{=} \lambda\, IF(\log y; \hat{\mu}, G_{\lambda,\beta}) \\
&= \lambda\,[IF(\log y; \operatorname{med}, G_{\lambda,\beta}) + IF(\log y; \hat{\sigma} \log\log 2, G_{\lambda,\beta})] \\
&\overset{(8.20)}{=} \lambda\,[IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G_{\lambda,\beta}) + d\, IF(\log y; Q_N, G_{\lambda,\beta}) \log\log 2],
\end{aligned}$$

wobei hier wieder das Folgende gilt:

$$IF(\log y; Q_{\frac{1}{2}}, G_{\lambda,\beta}) \;=\; \frac{IF(y; Q_{\frac{1}{2}}, P_{\lambda,\beta})}{Q_\alpha(P_{\lambda,\beta})}. \tag{8.22}$$

□

Satz 8.2.5 (vgl. Rousseeuw und Croux 1993)
Die Einflussfunktion der Q_N-Schätzung der Standard-log-*Weibull-Verteilung ist gegeben durch:*

$$IF(y; Q_N, G) \;=\; d\,\frac{\frac{1}{4} - G(y + d^{-1}) + G(y - d^{-1})}{\int g(x + d^{-1})g(x)dx},$$

wobei $d = 1.9577$.

Beweis:

Siehe Rousseeuw, P., Croux, C. (1993). Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical Association 88,* John Wiley, New York.

□

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zu Beginn mit der Einflussfunktion und dem Bruchpunkt Kriterien an die Hand gegeben, die es erlauben, die Robustheitseigenschaften eines Schätzers beurteilen zu können. In Bezug auf die M-Schätzungen insbesondere für die Maximum-Likelihood-Schätzung und die simultanen Lokations-Skalen-M-Schätzer wurden die Einflussfunktionen gezeigt. Darüber hinaus wurden die Probleme aufgezeigt, die sich ergeben, wenn man die Parameter der Weibull-Verteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode schätzt. Es hat sich ebenfalls gezeigt, dass die Methode der Mediane eine beschränkte Einflussfunktion und einen Bruchpunkt von 1/2 hat. Mit der Quantil-Schätzung wurde eine weitere einfache Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung zur Verfügung gestellt; diese Schätzung besitzt eine beschränkte Einflussfunktion und einen maximalen Bruchpunkt von 1/3.

Im Hinblick auf die Regressionsschätzungen hat sich gezeigt, dass die QLS-Schätzung, die auf der Überlegung basiert, die Daten vorher zu ordnen und dann einen Teil davon zu übergehen, eine beschränkte Einflussfunktion besitzt. Dagegen ist die OLS-Schätzung nicht robust. Ebenfalls wurde mit einer weiteren Regressionsschätzung, der sogenannten RM-Schätzung, eine attraktive Schätzung betrachtet, die eine beschränkte Einflussfunktion und einen Bruchpunkt von 1/2 besitzt.

Zum Schluss wurden die Median/MAD- und die Median/Q_N-Schätzungen betrachtet, die ebenso zur Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung beschränkte Einflussfunktionen und hohe Bruchpunkte geliefert haben.

Die Einflussfunktionen der betrachteten Schätzungen für die Standard-Weibull-Verteilung, also für $\lambda = 1$ und $\beta = 1$, werden im Folgenden graphisch dargestellt. Die

Einflussfunktionen der Maximum-Likelihood- (vgl. Abb. 9.1) und der Kleinste-Quadrate-Schätzung (vgl. Abb. 9.5) sind unbeschränkte Funktionen von y. Diese streben gegen $\pm\infty$, falls y gegen 0 oder $\pm\infty$ konvergiert. Die Einflussfunktionen der restlichen Schätzungen sind alle beschränkt. Insbesondere sind die Einflussfunktionen der Quantil- (vgl. Abb. 9.3), der Methode der Mediane- (vgl. Abb. 9.2) und der Median/MAD-Schätzung (vgl. Abb. 9.7) des Skalen- und des Gestalts-Parameters Treppenfunktionen. Die Einflussfunktionen der RM-Schätzung des Skalen- und des Gestalts-Parameters (vgl. Abb. 9.6) und der Median/Q_N-Schätzung des Gestalts-Parameters (vgl. Abb. 9.8 rechts) sind glatte und beschränkte Funktionen. Die Einflussfunktion der Median/Q_N-Schätzung des Skalen-Parameters (vgl. Abb. 9.8 links) ist nicht stetig, was daran liegt, dass die Einflussfunktion des Medians ebenfalls nicht stetig ist.

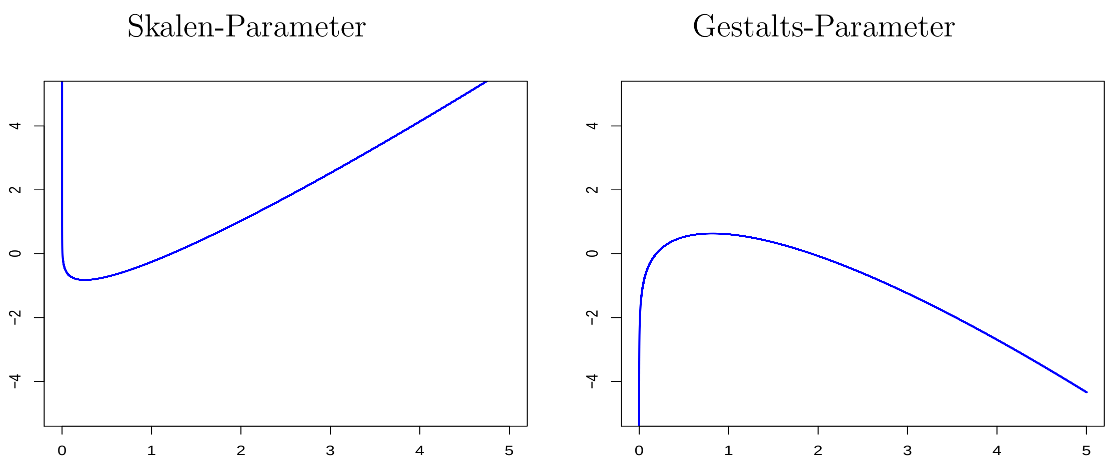

Abb. 9.1: Einflussfunktion der Maximum-Likelihood-Schätzung der Weibull-Parameter.

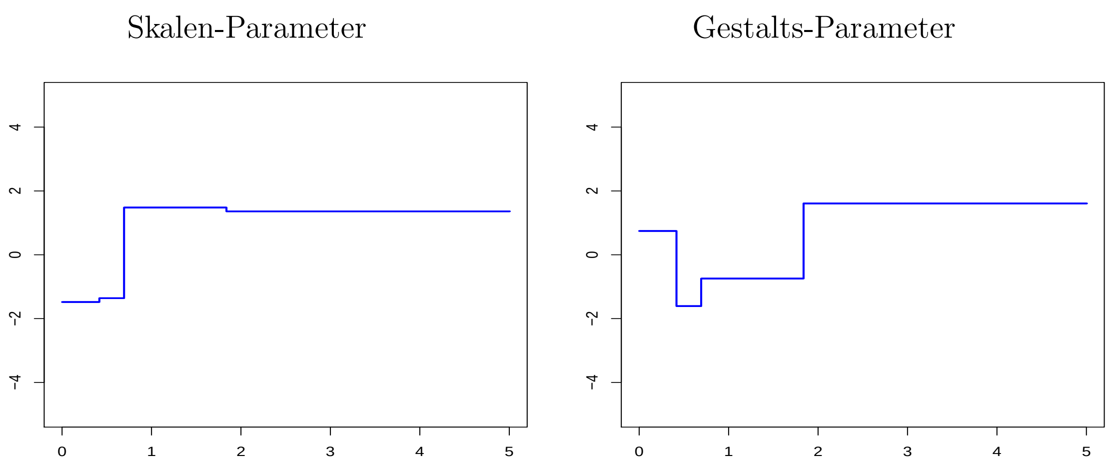

Abb. 9.2: Einflussfunktion der Methode der Mediane-Schätzung der Weibull-Parameter.

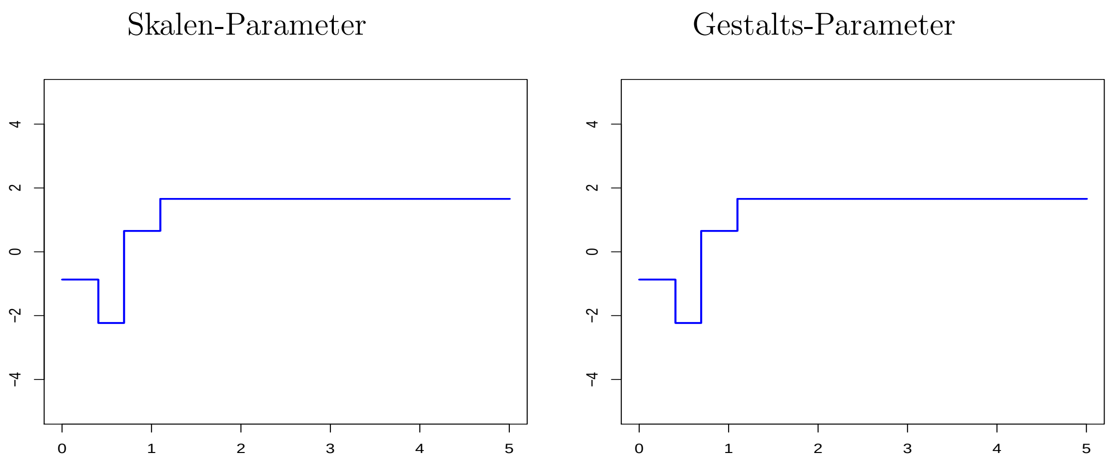

Abb. 9.3: Einflussfunktion der Quantil-Schätzung der Weibull-Parameter.

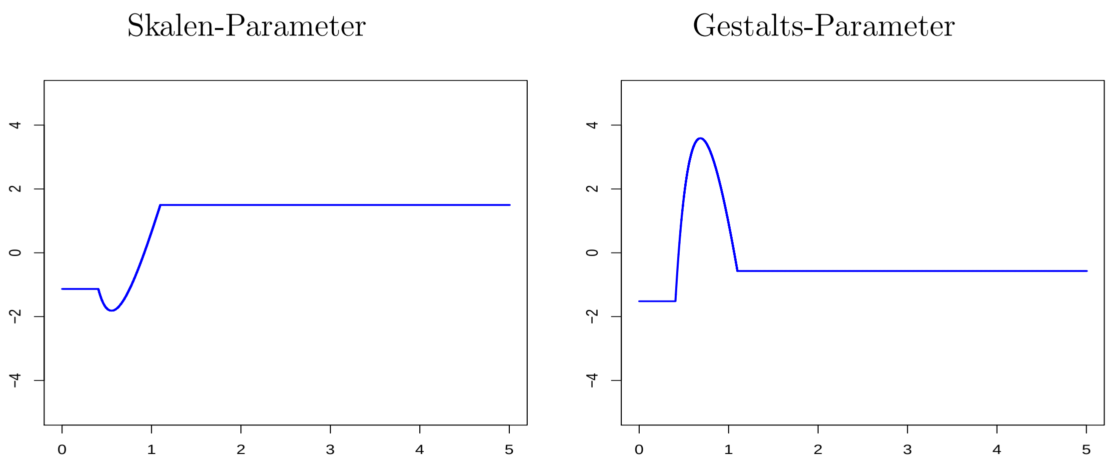

Abb. 9.4: Einflussfunktion der Methode der QLS-Schätzung der Weibull-Parameter.

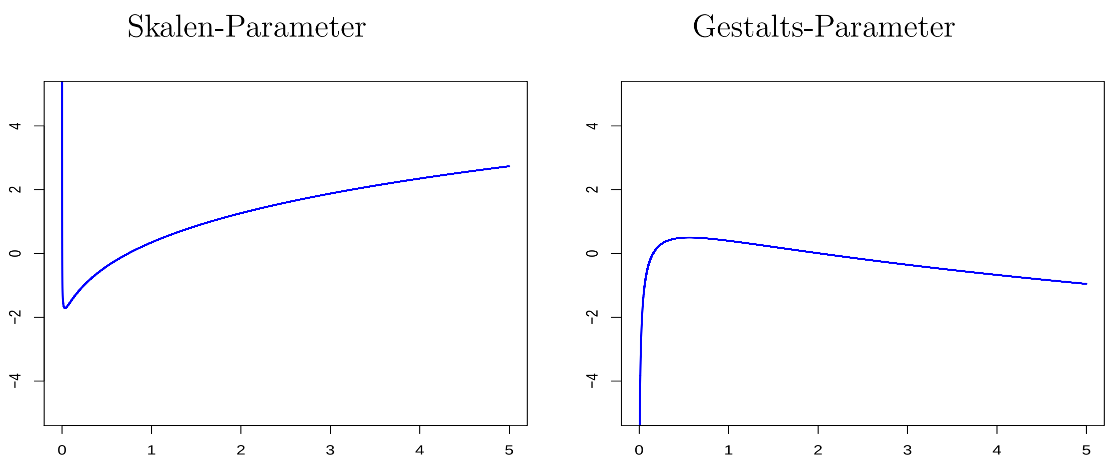

Abb. 9.5: Einflussfunktion der Methode der OLS-Schätzung der Weibull-Parameter.

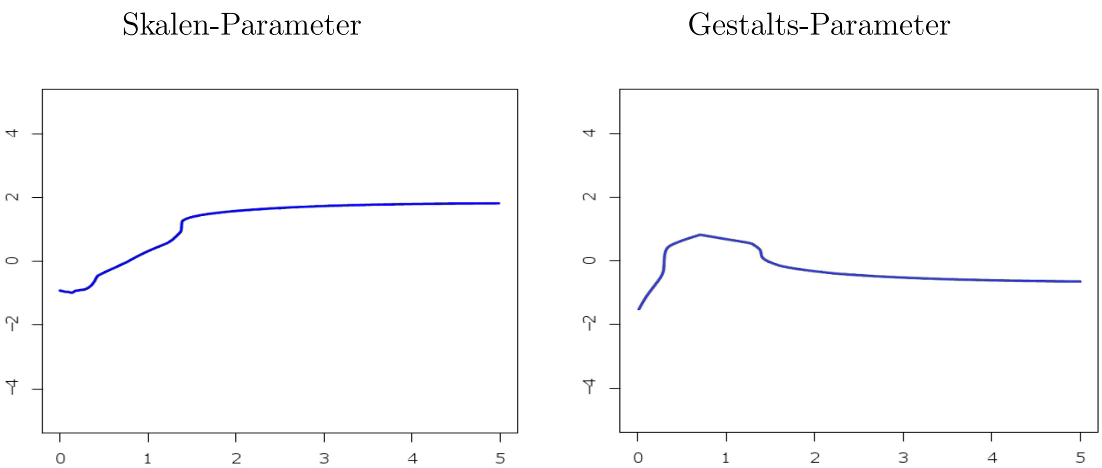

Abb. 9.6: Einflussfunktion der RM-Schätzung der Weibull-Parameter.

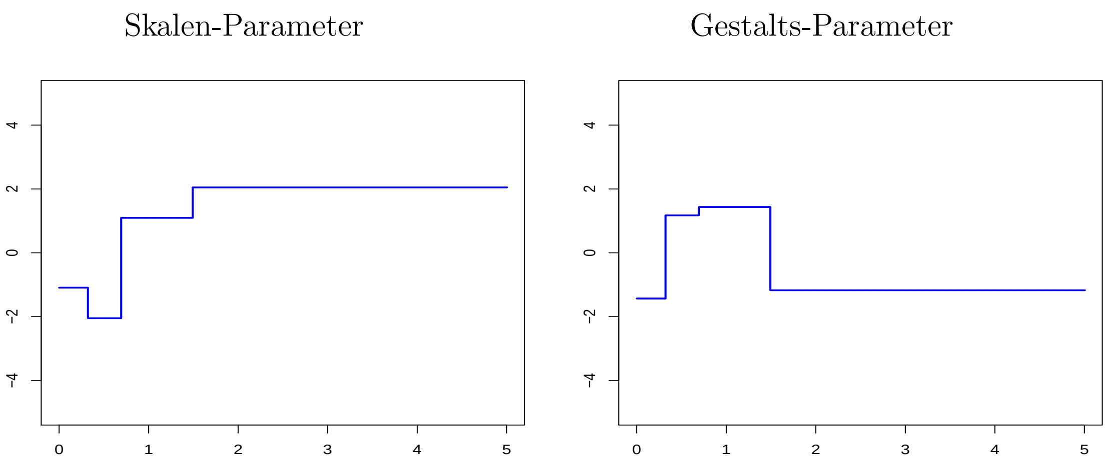

Abb. 9.7: Einflussfunktion der Median/MAD-Schätzung der Weibull-Parameter.

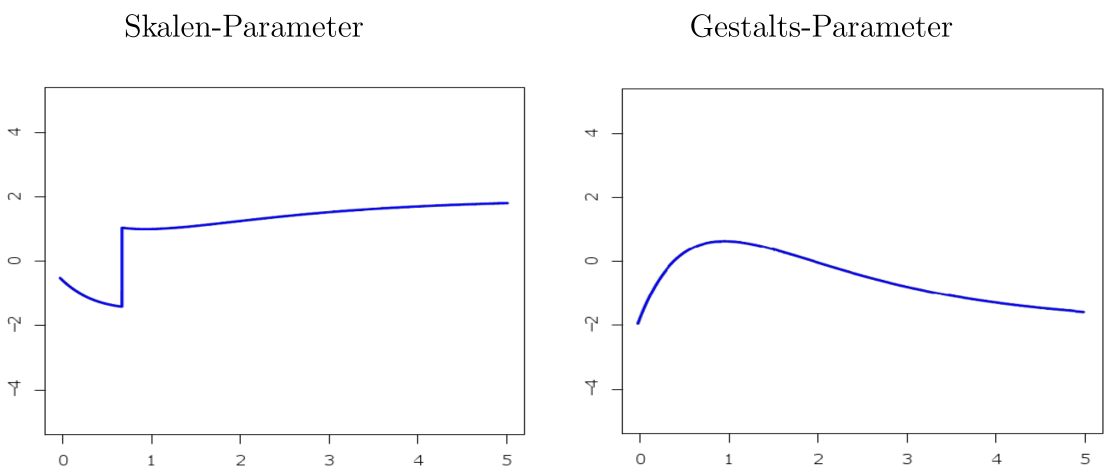

Abb. 9.8: Einflussfunktion der Median/Q_N-Schätzung der Weibull-Parameter.

Insgesamt kann man daher feststellen, dass die RM-Schätzung und die Median/Q_N-Gestalts-Parameter-Schätzung die besten und die effizientesten von allen betrachteten Schätzungen sind, weil sie beschränkte und glatte Einflussfunktionen besitzen.

Eine Übersicht der Bruchpunkte der betrachteten Schätzungen ist zusammengefasst in der folgenden Tabelle.

Schätzung	**Bruchpunkt**
ML-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}$
Mediane-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$
Quantil-Schätzung für λ	$\frac{1}{N}\lceil\min(\alpha_2-\alpha_1, 1-\alpha_2, \alpha_1)N\rceil$
Quantil-Schätzung für β	$\frac{1}{N}\lceil\min(\alpha, 1-\alpha, 1/3)N\rceil$
QLS-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}\lceil\min(\bar{\alpha}, 1-2\bar{\alpha})N\rceil$
OLS-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}$
RM-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil$
med / MAD-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor$
med /Q_N-Schätzung für λ, β	$\frac{1}{N}\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$

Tabelle 9.1: Bruchpunkte im Vergleich.

Anhang A

Grundlagen aus der Analysis

A.1 Regularitätsbedingungen

Definition A.1.1 (Regularitätsbedingungen (vgl. Genschel und Becker 2005))
Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable Y mit Verteilung aus der Familie $\mathcal{P}^Y = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ von Verteilungen mit Parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{P}^Y$ wird eine reguläre Familie von Verteilungen genannt, falls folgende Bedingungen gelten:

R1) Θ *ist ein offenes Intervall auf* $\mathbb{R}$.

R2) *Für alle $\theta \in \Theta$ existiert zu P_θ aus der Familie $\mathcal{P}^Y$ von Verteilungen die entsprechende Dichte $f^Y(y, \theta)$.*

R3) *Die Ableitung der logarithmierten Dichte nach θ: $\frac{\partial}{\partial\theta} \log f^Y(y, \theta)$ existiert und ist stetig in $\theta \in \Theta$ für alle $y \in \mathbb{R}$.*

R4) *Für alle $\theta \in \Theta$ gilt:* $\mathrm{E}_\theta\left[\frac{\partial \log f^Y(Y, \theta)}{\partial\theta}\right] = 0.$

Die Bedingungen R1) *bis* R4) *heißen Regularitätsbedingungen.*

Die Bedingung R4) ist im Allgemeinen erfüllt, wenn die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauschbar ist. D. h. wenn gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f^Y(y, \theta) dy = \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \log f^Y(y, \theta) dy. \tag{A.1}$$

A.2 Taylor-Entwicklung

Satz A.2.1 (Taylorsche Formel (vgl. Forster 2005))
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der art, dass die Strecke $x+t\xi$, $0 \leq t \leq 1$, ganz in U liegt. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\vartheta \in [0,1]$, sodass gilt:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha \;+\; \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha. \tag{A.2}$$

Beweis:
Siehe Forster, O. (2005). *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen.* 6. Auflage. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
□

Korollar A.2.2 (vgl. Forster 2005)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha \;+\; o(\|\xi^k\|) \qquad \textit{für } \xi \to 0. \tag{A.3}$$

Beweis:
Siehe Forster, O. (2005). *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen.* 6. Auflage. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
□

Bemerkung A.2.3
Aus dem Satz A.2.1 folgt die Aussage

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha \;+\; \mathcal{O}(\xi^{k+1}). \tag{A.4}$$

Diese Aussage ist präziser als (A.3), denn

$$\xi^{k+1} \;=\; o(\xi^k), \tag{A.5}$$

aber nicht umgekehrt. Man muss aber bedenken, dass (A.2) $(k+1)$-malige stetige Differenzierbarkeit von f verlangt, während (A.3) nur k-fache stetige Differenzierbarkeit voraussetzt.

Literaturverzeichnis

[1] Adatia, A., Chan, L. (1982). Robust procedures for estimating the scale parameter and predicting future order statistics of the Weibull distribution. *IEEE Tansactions on Reliability 31,* 491-498.

[2] Boudt, K., Caliskan, D., Croux, C. (2009). Robust and explicit estimators of Weibull parameters. *Metrika, published online 28 july 2009,* doi:10.1007/s00184-009-0272-1.

[3] Brüske, S., Cottin, C., Hiebing, A., Hille, B. (2010). Die Stochastische Modellierung von Großschäden für den Einsatz in internen Risikomodellen der Schadenversicherung. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 99,* 133-154.

[4] Dixit, U. J. (1994). Bayesian approach to prediction in the presence of outliers for Weibull distribution. *Metrika 41,* 127-136.

[5] Donoho, D., Huber, P. (1983). The notion of breakdown point. In Bickel, P. J., Doksum, K. A., Hodges, J. L. (Eds.): *A Festschrift for Erich Lehmann.* Wadsworth, Belmont, California, 157-184.

[6] Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I., Tutz, G. (2003). *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse.* 4. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg.

[7] Fahrmeir, L., Kneib, T., Lang, S. (2009). *Regression. Modelle, Methoden und Anwendungen.* 2. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg.

[8] Forster, O. (2005). *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen.* 6. Auflage. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.

[9] Genschel, U., Becker, C. (2005). *Schließende Statistik. Grundlegende Methoden.* Springer, Berlin-Heidelberg.

[10] Hampel. F. R. (1974). The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the American Statistical Association 69,* 383-393.

[11] Hampel. F. R. (1980). Robuste Schätzungen: Ein anwendungsorientierter Überblick. *Biometrical Journal 22,* 3-21.

[12] Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P., Stahel, W. (1986). *Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions.* John Wiley, New York.

[13] He, X., Fung, W. K. (1999). Method of medians for lifetime data with Weibull models. *Statistics in Medicine 18,* 1993-2009.

[14] Huber, P. (1981). *Robust Statistics.* John Wiley, New York.

[15] Jurečková, J., Picek, J. (2006). *Robust Statistical Methods with R.* Chapman and Hall/CRC.

[16] Lingappaiah, G. (1976). Effect of outliers on the estimation of parameters. *Metrika 23,* 27-30.

[17] Marks, N. (2005). Estimation of Weibull parameters from common percentiles. *Journal of Applied Statistics 32,* 17-24.

[18] Müller, C. (2007). *Einführung in die Stochastik.* Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2006/2007. Universität Kassel.

[19] Müller, C. (2009a). *Explorative Datenanalyse.* Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2009. Universität Kassel.

[20] Müller, C. (2009b). *Schließende Statistik.* Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2009. Universität Kassel.

[21] Olive, D. (2006). Robust estimators for transformed location scale families. *Mimeo.*

[22] Rousseeuw, P., Croux, C. (1993). Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical Association 88,* John Wiley, New York.

[23] Rousseeuw, P., Leroy, A. (2003). *Robust Regression and Outlier Detection.* John Wiley, New York.

[24] Seki, T., Yokoyama, S.-I. (1996). Robust parameter-estimation using the bootstrap method for the 2-parameter Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability 45,* 34-41.

[25] Shier, D., Lawrence, K. (1984). A comparison of robust regression techniques for the estimation fo Weibull parameters. *Communications in Statistics B-Simulation and Computation 13,* 743-750.

[26] Siegel, A. F. (1982). Robust regression using repeated medians. *Biometrika 69,* 242-244.

[27] Staudte, R., Sheather, S. (1990). *Robust Estimation and Testing.* John Wiley, New York.

[28] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers ASMA, Journal of Applied Mechanics 18,* 293-297.

[29] Werner, D. (2007). *Funktionalanalysis, 6. korrigierte Auflage.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Hannover, den 15. Januar 2011

Unterschrift