

**Analyse stochastischer
Differentialgleichungen mittels der
Residuen-Momenten-Methode und
der k-Vorzeichen-Tiefe**

Diplomarbeit

Dozent: Prof. Dr. Christine Müller

Autor: Marcel Gérard

29.03.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Datengrundlage	3
3	Statistische Methoden	6
3.1	Die Paris-Erdogan-Gleichung	6
3.2	Der Wiener-Prozess	11
3.3	Stochastische Differentialgleichungen	13
3.3.1	Interessierende Modelle	14
3.4	Auffinden von Lösungen	17
3.4.1	Stochastisches Integral	17
3.4.2	Euler-Approximation	20
3.5	Prognose zukünftiger Werte	25
3.5.1	Testbasierte Verfahren	26
3.6	Intervall-Score	31
4	Auswertung	32
4.1	Schätzung der Lösungsparameter	33
4.2	Bestimmung Konfidenzintervall	37
4.3	Prognose	38
4.4	Auswertung auffälliger Datenreihen	46
4.5	Gesamtergebnisse	58

5 Zusammenfassung	61
A Auflistung der Ergebnisse	63
B Literaturverzeichnis	69

Kapitel 1

Einleitung

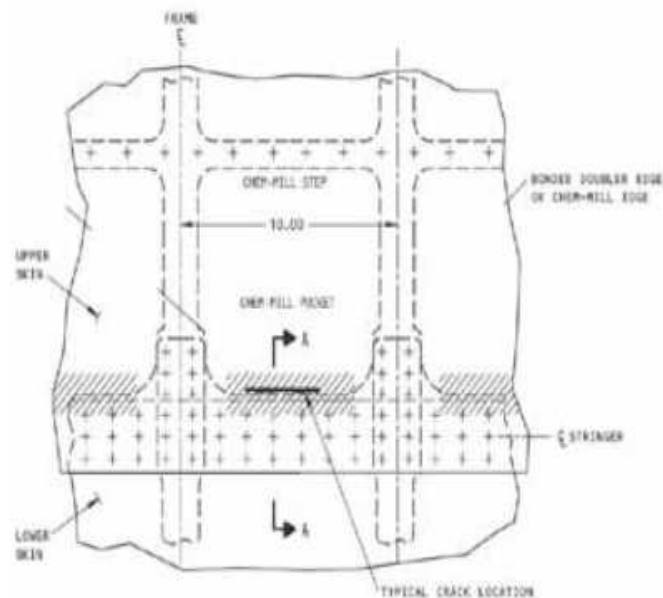


Abb. 1: Chem-Mill Pockets und Ort der Rissentstehung

Abbildung 1.1: Rissbildung in Flugzeughülle

In dieser Arbeit soll anhand verschiedener Methoden das Risswachstum in Aluminium-Prüfkörpern untersucht werden. Hauptziel dieser Untersuchungen wird sein, eine möglichst gute Prognose für das zukünftige Wachstum der Risse abzugeben. In der Praxis geht es dabei vorrangig um Sicherheitsaspekte, aber auch um die Einsparung von Kosten. Die obigen Abbildung ist entnommen aus Srajbr (2016) und zeigt den Bereich einer Flugzeughülle, in dem desöfteren Risse entstehen. Solange sie nur eine geringe Länge aufweisen, stellen sie für die Sicherheit des Flugzeugs kein Problem dar. Sollten sie aber eine kritische Länge erreichen, kann dies zum lokalen Versagen der Außenhaut führen. Während eines Fluges hätte dies den Verlust des

Kabinendrucks zur Folge, was schlimmstenfalls zum Absturz der Maschine führt. Die sofortige Beseitigung des Risses wäre nun aber mit hohem Aufwand, entsprechenden Kosten und dem zeitweiligen Ausfall der Maschine verbunden. Daher stellt sich die Frage, ob der Riss bis zur nächsten geplanten Wartung der Maschine innerhalb des sicheren Bereichs bleibt und das Flugzeug solange gefahrlos weiter eingesetzt werden kann. Derartige Überlegungen lassen sich direkt auf andere Situationen wie z.B. Brücken oder Gebäude übertragen.

Es wird nun zunächst die Datengrundlage beschrieben, bevor im folgenden größeren Abschnitt die verwendeten statistischen Methoden vorgestellt werden. Begonnen wird hier mit der Paris-Erdogan-Gleichung, auf der die später verwendete stochastische Differentialgleichung basiert. Danach wird kurz der Wiener-Prozess erläutert, der ein wesentlicher Baustein dieser Gleichungen ist. Es folgen nähere Erklärungen zu besagten Differentialgleichungen und zwei Verfahren, wie man Lösungen auffindet bzw. approximiert. Den Abschluss dieses Kapitels bildet dann die Vorstellung der eingangs erwähnten Methoden, die in der Auswertung Verwendung finden sollen. Hier sind dies die Residuen-Momenten-Methode und die k-Vorzeichen-Tiefe. In der Auswertung werden diese Methoden für die erste Datenreihe detailliert durchgeführt, bevor noch einige auffällige Datenreihen näher untersucht werden. Sie schließt mit der Vorstellung der gesammelten Ergebnisse aus allen 68 Datenreihen. In der abschließenden Zusammenfassung werden alle wichtigen Resultate noch einmal kurz erläutert und einige daraus resultierende Fragestellungen beleuchtet.

Kapitel 2

Datengrundlage

Die hier verwendeten Daten sind entnommen aus Virkler et al, 1979. Hierbei wurden 68 identische Versuchsreihen durchgeführt, in denen Aluminiumprüfkörper (Modell 2024-T3, Länge: 558.8 mm, Breite: 152.4 mm, Dicke: 2.54 mm) zyklischen Belastungen ausgesetzt wurden. Dabei wurde gemessen, wieviele Belastungszyklen benötigt werden, um eine vorgegebene Risslänge zu erreichen. Ausgehend von einer Startlänge von 9 mm wurde zunächst alle 0.2 mm eine Messung durchgeführt, ab 36.2 mm alle 0.4 mm und schließlich ab 44.2 mm alle 0.8 mm. Bis zur maximalen Risslänge von 49.8 mm ergeben sich somit 164 Datenpunkte pro Versuchsreihe. 10^4 Belastungszyklen entsprechen dabei einer Zeiteinheit. Es sind alle Datenpunkte vorhanden, so dass man sich hier keine Gedanken bezüglich fehlender Werte machen muss. Zusammengefasst sind die Daten in Abbildung 2.1 dargestellt.

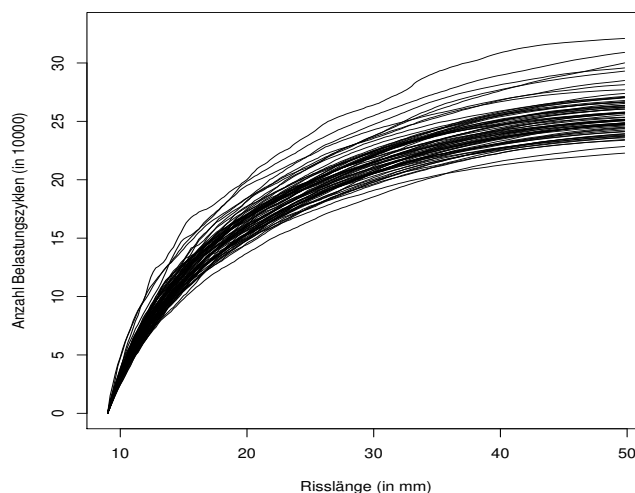


Abbildung 2.1: Virkler Daten

Wie man sieht, verlaufen die verschiedenen Versuchsreihen zunächst in einem recht schmalen Band, das sich bis zur maximalen Risslänge dann zunehmend verbreitert. Es ergibt sich hier eine Spannweite von 98204 Belastungszyklen (222792 Zyklen in Versuchsreihe 15, 320996 in Versuchsreihe 49). Optisch sieht es ebenfalls so aus, als würden die nötigen Zyklen gegen einen Grenzwert streben, also dass auch bei Weiterführung der Messung keine beliebig große Anzahl an Zyklen erreicht werden wird. Die meisten Versuchsreihen haben einen sehr glatten und auch ansonsten unauffälligen Verlauf, wie man nachfolgend in Versuchsreihe 1 sehen kann.

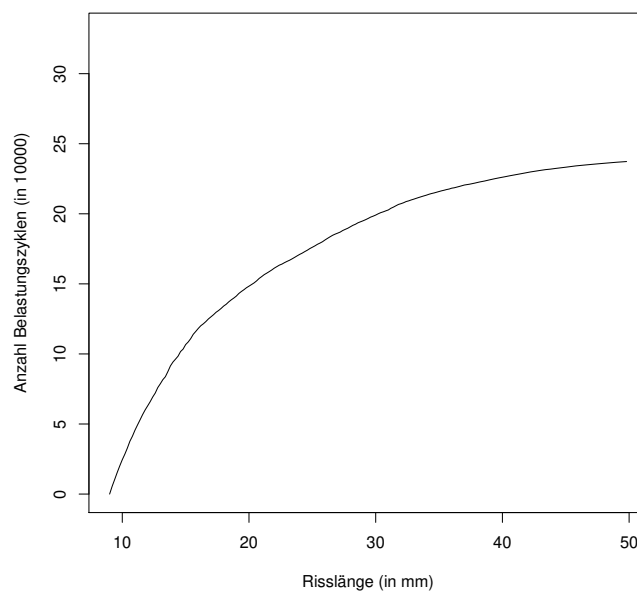


Abbildung 2.2: Virkler Daten, Versuchsreihe 1

Gravierende Ausreißer scheinen keine vorzuliegen, allerdings verlaufen einige Versuchsreihen deutlich weniger glatt. Am deutlichsten kann man dies in Versuchsreihe 49 erkennen, die, wie oben erwähnt, die maximale Anzahl benötigter Zyklen aufweist. Sie ist in Abbildung 2.3 auf der nächsten Seite dargestellt.

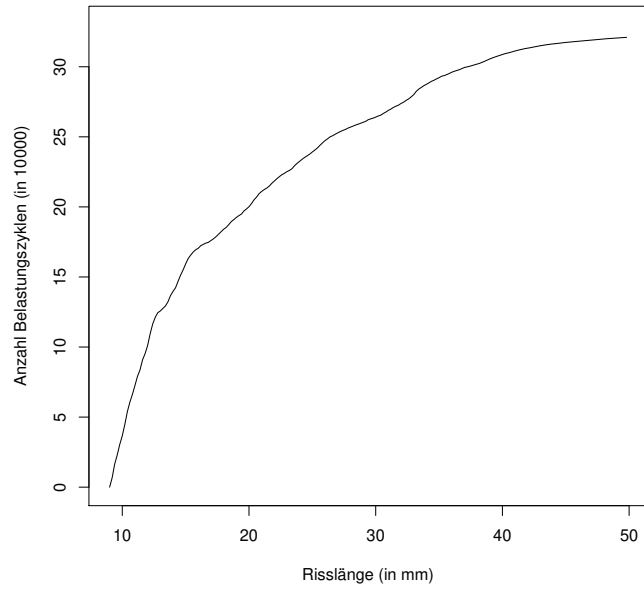


Abbildung 2.3: Virkler Daten, Versuchsreihe 49

Inwieweit dieser Verlauf zu Besonderheiten in der Auswertung führt und inwieweit sich noch andere auffällige Versuchsreihen ergeben, soll im entsprechenden Kapitel behandelt werden.

Kapitel 3

Statistische Methoden

Zur Ausführung der auf den folgenden Seiten beschriebenen Methoden wird ausschließlich das Programm R (R Development Core Team (2020)) verwendet.

3.1 Die Paris-Erdogan-Gleichung

Das später zu untersuchende Risswachstum fällt unter den Oberbegriff der dynamischen Systeme. Hier werden diese homogen bezüglich der Zeitvariablen sein, so dass die Änderung des Systems lediglich vom vorherrschenden Zustand des Systems abhängt und nicht vom konkreten Zeitpunkt. Beispiele für derartige Systeme lassen sich in verschiedensten Bereichen antreffen:

- Bei chemischen Reaktionen hängt die Menge eines Ausgangssubstrates davon ab, wieviel bereits im Vorfeld chemisch umgewandelt wurde.
- Ein Riss wächst umso schneller, je länger er ist.
- Die Ausbreitung von Krankheiten hängt davon ab, wie viele Erkrankte es bereits gibt.

...

In der Mathematik werden diese Systeme für gewöhnlich mit Differentialgleichungen beschrieben, also Gleichungen, bei denen die Ableitung einer Funktion in einem direkten, funktionalen Zusammenhang zum Wert der Funktion steht. Zur Veranschaulichung nehmen wir in der Folge an, dass die Länge eines Risses zum Zeitpunkt t

durch eine Funktion $l(t)$ beschrieben wird. Die einfachste Differentialgleichung, die man sich nun vorstellen kann, um das Risswachstum zu beschreiben, ist von der Form $l'(t) = \theta l(t)$ beziehungsweise in anderer Notation $\frac{dl}{dt} = \theta l$, mit $\theta > 0$.

Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich dann direkt $l(t) = e^{\theta t}x$, wobei $x \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest ist. Wird weiterhin ein Startwert l_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ festgesetzt (also $l(0) = l_0$), ändert sich die Lösung zu $l(t) = e^{\theta t}l_0$.

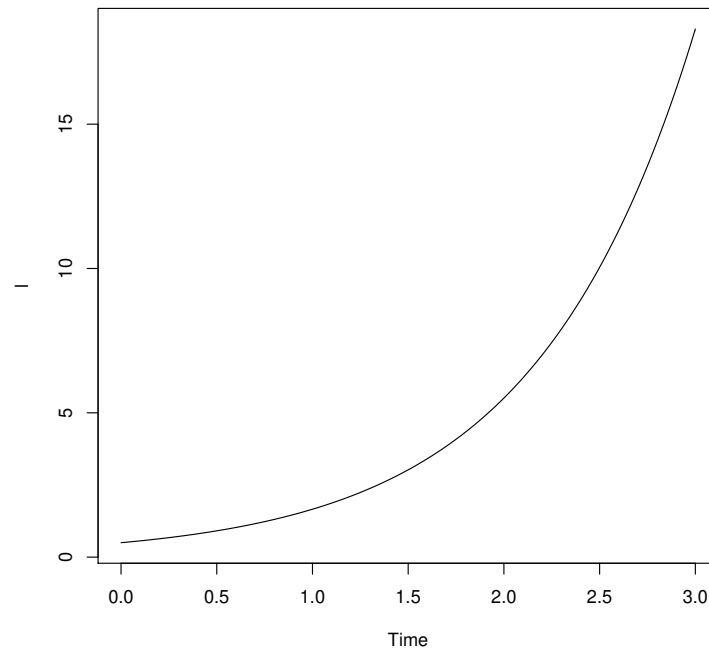


Abbildung 3.1: Risswachstum für $l_0=0.5$ und $\theta = 1.2$

Vergleiche hierzu auch Grüne und Junge (2009), S. 2,3.

Zurückgehend auf P.C.Paris und F.Erdogan wird häufig die folgende Differentialgleichung verwendet: $\frac{dl}{dt} = \theta_1 l^{\theta_2}$. Im Fall $\theta_2 = 1$ sind wir wieder im obigen Fall, für $\theta_2 \neq 1$ gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Sei die Paris Erdogan Gleichung gegeben mit $\theta_2 \neq 1$. Dann ergibt sich als Lösung:*

$$l = l(t) = \alpha_1 (s(t - \alpha_0))^{s\alpha_2},$$

wobei $s = \text{sign}(1 - \theta_2)$, $s\alpha_0 < st$, $\alpha_1 = (\theta_1 [s(1 - \theta_2)])^{\frac{1}{1-\theta_2}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{s(1-\theta_2)} > 0$.

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass für obiges l die Ableitung die gegebene Gleichung erfüllt, also dass gilt: $\frac{dl}{dt} = \theta_1 l^{\theta_2}$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll dies hier getrennt für $s = 1$ (also $\theta_2 < 1$) und $s = -1$ (also $\theta_2 > 1$) durchgeführt werden.

Sei $s = 1$. Dann gilt für die verwendeten Größen α_1 und α_2 , dass

$$\alpha_1 = (\theta_1(1 - \theta_2))^{\frac{1}{1-\theta_2}} \text{ und } \alpha_2 = \frac{1}{1-\theta_2}.$$

Somit ergibt sich als Ableitung von $l(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{d}{dt}(\alpha_1(t - \alpha_0)^{\alpha_2}) = \alpha_1 \alpha_2 (t - \alpha_0)^{\alpha_2 - 1} \quad | \text{ Einsetzen} \\ &= (\theta_1(1 - \theta_2))^{\frac{1}{1-\theta_2}} \frac{1}{(1-\theta_2)} (t - \alpha_0)^{\frac{1}{1-\theta_2} - 1} \\ &= \theta_1^{\frac{1}{1-\theta_2}} (1 - \theta_2)^{\frac{1}{1-\theta_2}} (1 - \theta_2)^{-1} (t - \alpha_0)^{\frac{1}{1-\theta_2} - 1} \\ &= \theta_1^{\frac{1-\theta_2+\theta_2}{1-\theta_2}} (1 - \theta_2)^{\frac{1}{1-\theta_2} - 1} (t - \alpha_0)^{\frac{1}{1-\theta_2} - 1} \\ &= \theta_1^{\frac{1-\theta_2}{1-\theta_2}} \theta_1^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} ((1 - \theta_2)(t - \alpha_0))^{\frac{1}{1-\theta_2} - 1} \\ &= \theta_1 \theta_1^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} ((1 - \theta_2)(t - \alpha_0))^{\frac{1-(1-\theta_2)}{1-\theta_2}} \\ &= \theta_1 \theta_1^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} ((1 - \theta_2)(t - \alpha_0))^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} \\ &= \theta_1 (\theta_1(1 - \theta_2)(t - \alpha_0))^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} \\ &= \theta_1 ((\theta_1(1 - \theta_2)(t - \alpha_0))^{\frac{1}{1-\theta_2}})^{\theta_2} \\ &= \theta_1 ((\theta_1(1 - \theta_2))^{\frac{1}{1-\theta_2}} (t - \alpha_0)^{\frac{1}{1-\theta_2}})^{\theta_2} \quad | \text{ Ersetzen} \\ &= \theta_1 (\alpha_1(t - \alpha_0)^{\alpha_2})^{\theta_2} \\ &= \theta_1 l^{\theta_2} \end{aligned}$$

Sei $s = -1$. Dann gilt für die verwendeten Größen α_1 und α_2 , dass

$$\alpha_1 = (\theta_1(\theta_2 - 1))^{\frac{1}{1-\theta_2}} \text{ und } \alpha_2 = \frac{1}{\theta_2 - 1}.$$

Somit ergibt sich als Ableitung von $l(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{d}{dt}(\alpha_1(\alpha_0 - t)^{-\alpha_2}) = -\alpha_1(-\alpha_2)(\alpha_0 - t)^{-\alpha_2 - 1} \quad | \text{ Einsetzen} \\ &= (\theta_1(\theta_2 - 1))^{\frac{1}{1-\theta_2}} \frac{1}{\theta_2 - 1} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1}{\theta_2 - 1} - 1} \\ &= (\theta_1(\theta_2 - 1))^{\frac{1}{1-\theta_2}} (\theta_2 - 1)^{-1} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1}{\theta_2 - 1} - 1} \\ &= \theta_1^{\frac{\theta_2 - 1 - \theta_2}{\theta_2 - 1}} (\theta_2 - 1)^{\frac{-1}{\theta_2 - 1} - 1} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1}{\theta_2 - 1} - 1} \\ &= \theta_1 \theta_1^{\frac{-\theta_2}{\theta_2 - 1}} (\theta_2 - 1)^{\frac{-1 - (\theta_2 - 1)}{\theta_2 - 1}} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1 - (\theta_2 - 1)}{\theta_2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta_1 \theta_1^{\frac{-\theta_2}{\theta_2-1}} (\theta_2 - 1)^{\frac{-\theta_2}{\theta_2-1}} (\alpha_0 - t)^{\frac{-\theta_2}{\theta_2-1}} \\
&= \theta_1 (\theta_1 (\theta_2 - 1) (\alpha_0 - t))^{\frac{-\theta_2}{\theta_2-1}} \\
&= \theta_1 ((\theta_1 (\theta_2 - 1))^{\frac{-1}{\theta_2-1}} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1}{\theta_2-1}})^{\theta_2} \\
&= \theta_1 ((\theta_1 (\theta_2 - 1))^{\frac{1}{1-\theta_2}} (\alpha_0 - t)^{\frac{-1}{\theta_2-1}})^{\theta_2} \quad | \text{ Ersetzen} \\
&= \theta_1 (\alpha_1 (\alpha_0 - t)^{-\alpha_2})^{\theta_2} \\
&= \theta_1 t^{\theta_2}
\end{aligned}$$

□

Mittels passender Wahl der Parameter lassen sich nun verschiedenste Ausprägungen des Risswachstums beschreiben. Siehe hierzu die folgende Abbildung.

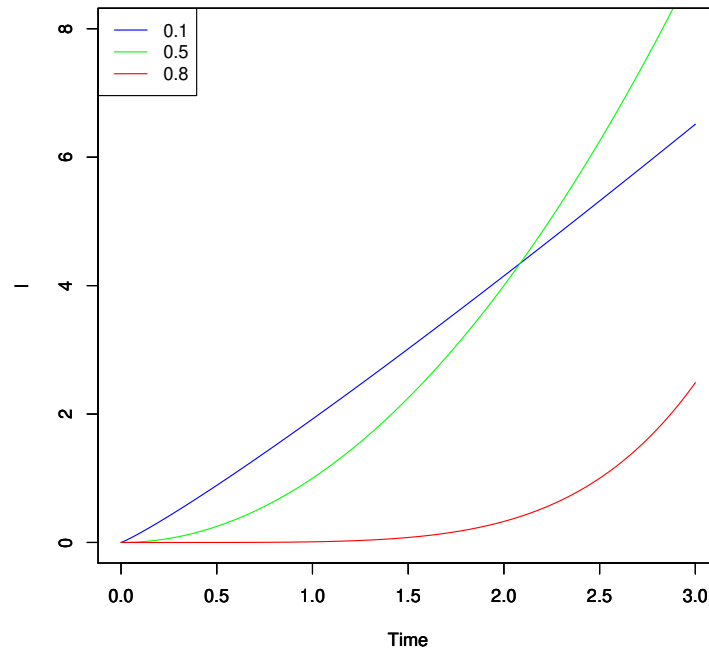


Abbildung 3.2: Risswachstum für $\alpha_0 = 0$, $\theta_1 = 2$ und verschiedene Werte von θ_2

Da in dem von Virkler et al durchgeführten Experiment nun eben nicht der zu erwartende funktionale Zusammenhang der Form Risslänge(Zeit) betrachtet wurde, sondern ein Zusammenhang der Form Zeit(Risslänge), muss man zur Modellierung die inverse Form der Lösung der Paris-Erdogan Gleichung heranziehen. Hierfür gilt der folgende Satz.

Satz 2. 1) Die inverse Form der Lösung der Paris-Erdogan Gleichung stellt sich dar als:

$$t = t(l) = \beta_0 + \beta_1 l^{\beta_2}.$$

Dabei gelten: $\beta_0 = \alpha_0$, $\beta_1 = s\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\frac{s}{\alpha_2}}$ und $\beta_2 = \frac{s}{\alpha_2}$.

2) Die Funktion t ist dann die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dl} = \theta_1(s(t - \theta_0))^{\theta_2},$$

mit $s = \text{sign}(\beta_1) = \text{sign}(\beta_2)$, $\theta_0 = \beta_0$, $\theta_1 = s\beta_2(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}} > 0$, $\theta_2 = 1 - \frac{1}{\beta_2}$.

Beweis. 1) Stelle die Lösung der Paris-Erdogan Gleichung nach t um:

$$\begin{aligned} l(t) = l &= \alpha_1(s(t - \alpha_0))^{s\alpha_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{l}{\alpha_1} = (s(t - \alpha_0))^{s\alpha_2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{l}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}} = s(t - \alpha_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{l}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}} = t - \alpha_0 \\ &\Leftrightarrow t = \alpha_0 + \frac{1}{s}\left(\frac{l}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}} \\ &\Leftrightarrow t = \alpha_0 + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}} l^{\frac{1}{s\alpha_2}} \\ &\Leftrightarrow t = \alpha_0 + \left(\frac{1}{s}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}}\right) l^{\frac{1}{s\alpha_2}} \\ &\Leftrightarrow t = t(l) = \beta_0 + \beta_1 l^{\beta_2} \quad \text{mit} \\ \beta_0 = \alpha_0, \beta_1 &= \left(\frac{1}{s}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{s\alpha_2}}\right) = s\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\frac{s}{\alpha_2}} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{1}{s\alpha_2} = \frac{s}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Da $s \in \{-1, 1\}$ sind s und $\frac{1}{s}$ identisch.

2) Betrachte $\frac{dt}{dl}$:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dl} &= \beta_1 \beta_2 l^{\beta_2-1} \\ &= \beta_2 \beta_1 \left((l^{\beta_2-1})^{\frac{\beta_2}{\beta_2-1}} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \quad |s^2 = 1 \\ &= (s\beta_2)(s\beta_1) (l^{\beta_2})^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \\ &= (s\beta_2) \left((s\beta_1)^{\frac{\beta_2}{\beta_2-1}} l^{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \\ &= (s\beta_2) \left((s\beta_1)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2-1}} l^{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \\ &= (s\beta_2)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}} \left((s\beta_1) l^{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \\ &= (s\beta_2)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}} (s(\beta_1 l^{\beta_2}))^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \\ &= (s\beta_2)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}} (s(\beta_1 l^{\beta_2} + \beta_0 - \beta_0))^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s\beta_2)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}}(s(t - \beta_0))^{1-\frac{1}{\beta_2}} \\
&= \theta_1(s(t - \theta_0))^{\theta_2} \quad \text{mit } \theta_0, \theta_1 \text{ und } \theta_2 \text{ wie oben gegeben.}
\end{aligned}$$

□

Zur Illustration wird in Abbildung 3.3 die inverse Form zu der in Abbildung 3.2 grün gefärbten Lösung gezeigt.

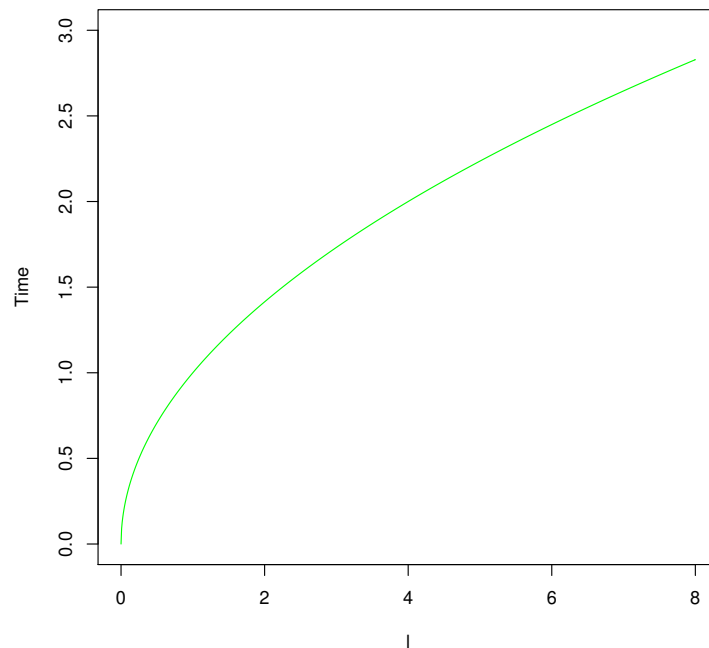


Abbildung 3.3: Inverse Lösungsform der Paris Erdogan Gleichung

3.2 Der Wiener-Prozess

Unter einem Wiener-Prozess versteht man einen stochastischen Prozess $\{W_t, t \geq 0\}$, der folgende Eigenschaften erfüllt:

- $W(0) = 0$ fast sicher, $P(W(0) = 0) = 1$.
- W hat für disjunkte Zeitabschnitte unabhängige Zuwächse:
 $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 : W(t_2) - W(t_1)$ und $W(t_4) - W(t_3)$ sind stochastisch unabhängig.

- Der Prozess besitzt normalverteilte Zuwächse:

$$\forall 0 \leq s < t : W(t)-W(s) \sim N(0, t-s).$$

In R lässt sich ein Pfad folgendermaßen simulieren:

```
set.seed(1)
T <- 1; N <- 100
Dt <- T/N
S <- cumsum(sqrt(Dt)*rnorm(N))
W <- c(0,S)
W <- ts(W, start=0, deltat=Dt)
plot(W)
```

Der set.seed-Befehl ist hier nicht erforderlich, dient allerdings dem Zweck der Reproduzierbarkeit.

Vergleiche hierzu auch Iacus (2008), S.18 ff.

Der oben generierte Pfad ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

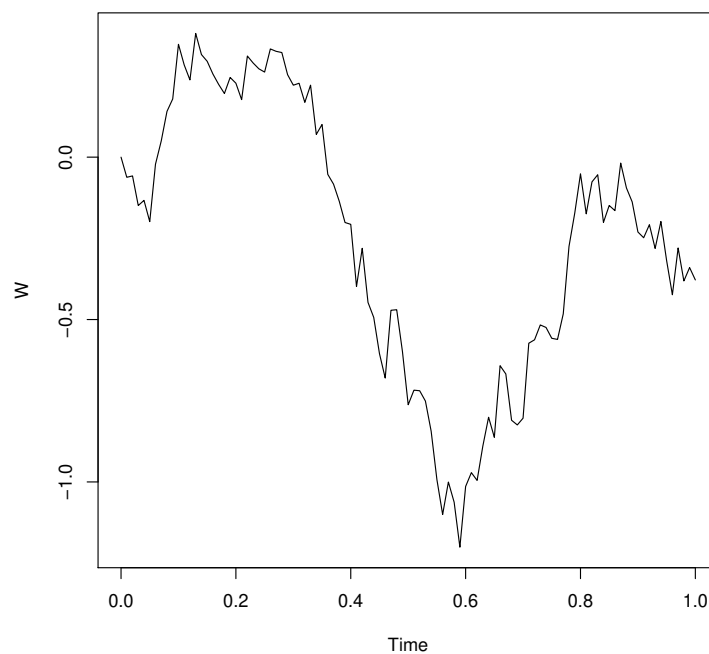


Abbildung 3.4: Möglicher Pfad des Wiener-Prozesses

3.3 Stochastische Differentialgleichungen

Erweitert man die deterministischen Differentialgleichungen der Form $x'(t) = b(t, x)$ um eine stochastische Komponente, führt dies zu den stochastischen Differentialgleichungen, die sich in der folgenden Form darstellen:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Die Änderung von X_t besteht also aus einer deterministischen Komponente $b(t, X_t)$ und einer stochastischen Komponente $\sigma(t, X_t)dW_t$. Der zugrunde liegende stochastische Prozess $\{W_t, t \geq 0\}$ kann aus verschiedenen Prozessen ausgewählt werden, wir verlegen uns hier aber ausschließlich auf den bereits vorgestellten Wiener Prozess. Der resultierende Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ ist dann ebenfalls ein stochastischer Prozess. Prozesse, die die obige Gleichung erfüllen, heißen auch Diffusionsprozesse mit Drift b , Diffusion σ und Anfangswert X_0 . Siehe hierzu auch Iacus, S. 33 ff.

Je nach Ausprägung des Wiener Prozesses können die realisierten Pfade dann auch durchaus unterschiedlich verlaufen. Beispielhaft soll dies einmal für den noch zu erläuternden Cox-Ingersoll-Ross Prozess (mit $b = 5 - 3X_t$, $\sigma = 2\sqrt{X_t}$ und $X_0 = 1$) dargestellt werden.

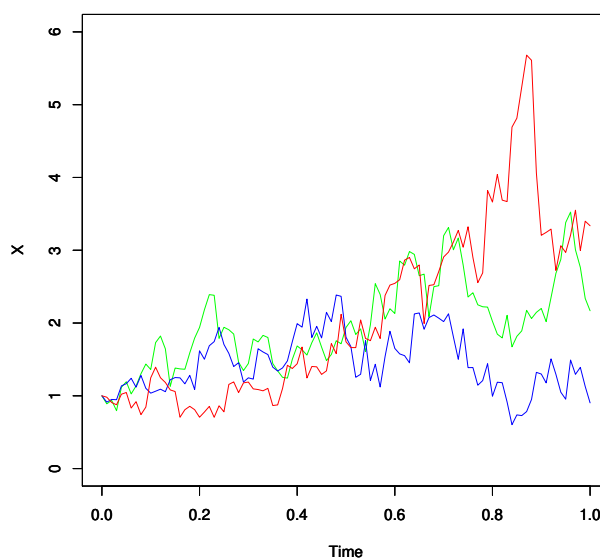


Abbildung 3.5: Mögliche Pfade eines CIR-Prozesses

Problematisch ist hierbei die Tatsache, dass der Wiener-Prozess in keinem Punkt differenzierbar ist. Daher wird die Gleichung auch oft in der Integralform angegeben:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u)du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u.$$

Die Berechnung des ersten Integrals erfolgt über das gewöhnliche Riemannintegral, das zweite Integral ist ein stochastisches Integral, das noch näher betrachtet werden muss. Dies soll im Abschnitt 3.4 geschehen, wenn das Auffinden von Lösungen behandelt wird. Zunächst sollen aber noch einige wichtige Modelle stochastischer Differentialgleichungen vorgestellt werden.

3.3.1 Interessierende Modelle

Im folgenden werden wir uns mit drei speziellen Modellen beschäftigen, bei denen sowohl Drift, als auch Diffusion nicht mehr vom konkreten Zeitpunkt t abhängen, so dass sich die stochastische Differentialgleichung vereinfacht zu

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

Siehe für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, den Black-Scholes-Merton-Prozess und den Cox-Ingersoll-Ross-Prozess auch Iacus, S. 43-48.

Ein Diffusionsprozess $\{X_t, t \geq 0\}$ heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (oder auch Vasicek-Prozess), wenn er eine Lösung der folgenden Gleichung ist

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dW_t,$$

wobei $\theta_3 \in \mathbb{R}^+$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ und $X_0 = x_0$. Für $\theta_2 > 0$, pendelt sich der Prozess bei einem bestimmten Zustand ein. Zwei mögliche Verläufe sind in Abbildung 3.6 auf der nächsten Seite dargestellt.

Für Erwartungswert und Varianz des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses gelten:

$$E_\theta(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t},$$

$$Var_\theta(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2(1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}.$$

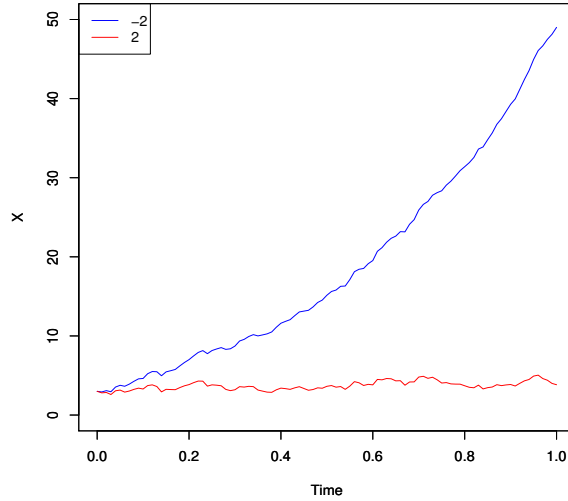


Abbildung 3.6: OU-Prozess mit $\theta_1 = 5$, $\theta_3 = 3$ und $X_0 = 3$ für zwei Werte von θ_2

Ein Diffusionsprozess $\{X_t, t \geq 0\}$ heißt Black-Scholes-Merton-Prozess (oder auch geometrische Brownsche Bewegung), wenn er eine Lösung der folgenden Gleichung ist

$$dX_t = \theta_2 X_t dt + \theta_3 X_t dW_t,$$

wobei $\theta_3 > 0$ und $X_0 = x_0$.

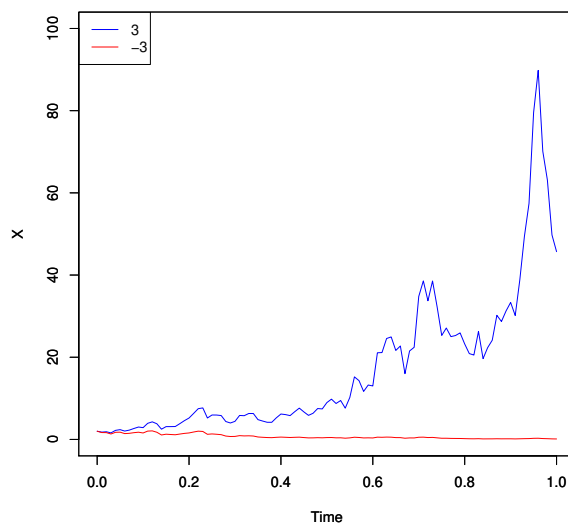


Abbildung 3.7: BSM-Prozess mit $\theta_3 = 2$, $X_0 = 2$ für zwei Werte von θ_2

Für Erwartungswert und Varianz gelten hier:

$$E_{\theta}(X_t|X_0 = x_0) = x_0 e^{\theta_2 t},$$

$$Var_{\theta}(X_t|X_0 = x_0) = x_0^2 e^{2\theta_2 t} (e^{\theta_3^2 t} - 1).$$

Ein Diffusionsprozess $\{X_t, t \geq 0\}$ heißt Cox-Ingersoll-Ross-Prozess, wenn er eine Lösung der folgenden Gleichung ist

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t,$$

wobei $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}^+$ und $X_0 = x_0 > 0$. Falls $2\theta_1 > \theta_3^2$ gilt, ist der Prozess strikt positiv. Andernfalls ist er nicht-negativ, in dem Sinne, dass er den Nullzustand erreichen kann. In der folgenden Grafik ist die genannte Bedingung einmal erfüllt (blau, $b(X_t) = 6 - 1.5X_t$) und einmal nicht (rot, $b(X_t) = 1 - 4X_t$).

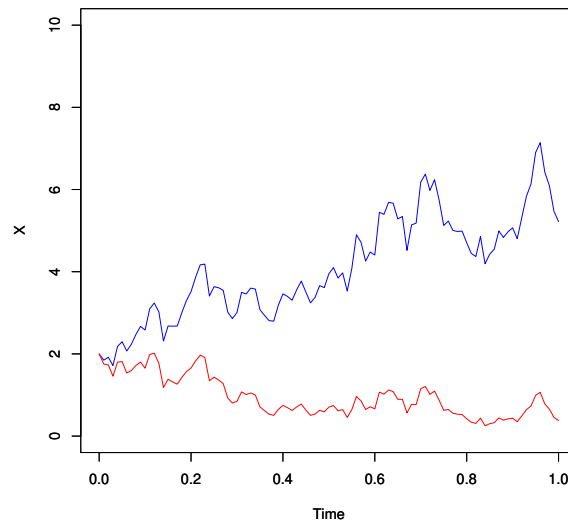


Abbildung 3.8: CIR-Prozess mit $\theta_3 = 2$, $X_0 = 1$ für zwei verschiedene Drifts

Für Erwartungswert und Varianz des CIR-Prozesses gelten:

$$E_{\theta}(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t},$$

$$Var_{\theta}(X_t|X_0 = x_0) = x_0 \frac{\theta_3^2 (e^{-\theta_2 t} - e^{-2\theta_2 t})}{\theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2^2}.$$

Da keines der oben erläuterten Standardmodelle geeignet erscheint, die Virkler Daten zu beschreiben, soll in der später folgenden Auswertung die inverse Lösungsform

zur Paris Erdogan Gleichung herangezogen werden. Durch Hinzufügen eines Diffusionsterms kann die zugrunde liegende deterministische Differentialgleichung zu einer stochastischen Differentialgleichung erweitert werden. Diese hat dann die folgende Form:

$$dX_t = \theta_1(s(X_t - \theta_0))^{\theta_2} dt + \sigma_{\theta_3}(X_t) dW_t.$$

3.4 Auffinden von Lösungen

Zum Auffinden von Lösungen bieten sich zwei verschiedene Methoden an. Zum einen die Ermittlung der expliziten Lösung über Berechnung des stochastischen Integrals und zum anderen die numerische Bestimmung einer Näherungslösung mittels der Euler-Approximation.

3.4.1 Stochastisches Integral

Wie im vorherigen Kapitel bereits erwähnt, lassen sich stochastische Differentialgleichungen auch in der Integralform

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u) du + \int_0^t \sigma(u, X_u) dW_u$$

darstellen, wobei noch nicht geklärt ist, wie sich das stochastische Integral berechnen lässt.

Das stochastische Integral $I(\sigma) := \int_0^t \sigma(u, X_u) dW_u$, auch Itô-Integral genannt, berechnet sich nun als Grenzwert einer Folge von Integralen $I(\sigma^{(n)})$. Ausgehend von einer Partition $\Pi_n([0, T])$, $[t_i, t_{i+1})$ mit i aus $\{0, \dots, n-1\}$ bildet $\sigma^{(n)}(t, X_t) := \sigma(t_i, X_{t_i})$ mit $t_i \leq t < t_{i+1}$ eine Treppenfunktion, die σ am Intervallbeginn auswertet. Die nachfolgende Grafik (entnommen aus Iacus (2008), S. 31) zeigt die Bildung einer solchen Treppenfunktion für $n=5$.

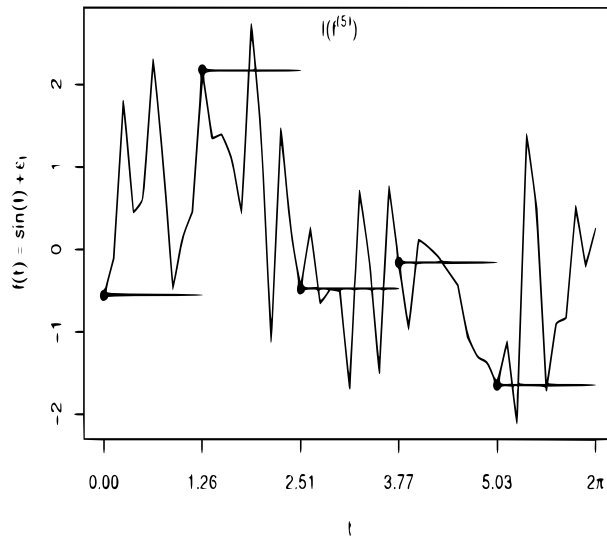


Abbildung 3.9: Treppenfunktion mit $n=5$

Dann gilt:

$$I(\sigma^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(i, X_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

und

$$I(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma^{(n)})$$

Gilt für die Zufallsvariablen $I(\sigma)$ und $I(\sigma^{(n)})$, dass $E([I(\sigma^{(n)}) - I(\sigma)]^2) \rightarrow 0$, so heißt der Prozess σ Itô-integrierbar. Hierfür muss gelten, dass $\int_0^T E(\sigma(u, X_u)^2) du < \infty$ und dass $\sigma(t_i)$ unabhängig ist von $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ für alle i und n .

Für Itô-integrierbare Prozesse $\sigma(t, X_t)$ und $\nu(t, Y_t)$, sowie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften:

- $E(\int_0^T \sigma(s, X_s) dW(s)) = 0$
- $Var(\int_0^T \sigma(s, X_s) dW(s)) = \int_0^T E\sigma^2(t, X_t) dt$ (Itô-Isometrie)
- $\int_0^T (a\sigma(t, X_t) + b\nu(t, Y_t)) dW(t) = a \int_0^T \sigma(t, X_t) dW(t) + b \int_0^T \nu(t, Y_t) dW(t)$
(Linearität)
- $\int_0^T a dW(t) = a \int_0^T dW(t) = aW(T)$
- $\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T$

Vergleiche hierzu auch Iacus (2008), S. 29 ff.

Zur Simulation des stochastischen Integrals in R und damit zur Bestimmung der expliziten Lösung soll hier der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess dienen. Dieser hat die folgende Lösung (s. Iacus (2008), S. 44):

$$X_t = \frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} \int_0^t e^{-\theta_2(u)} dW_u.$$

In R lässt sich diese Berechnung dann wie folgt umsetzen:

```
OUInt <- function(N){
set.seed(123)
T <- 1
x <- 10
theta <- c(0, 5, 3.5)
Dt <- T/N
Z <- rnorm(N)
t <- seq(0,T,by=Dt)
ito <- 0
Y <- numeric(N+1)
Y[1] <- x
for(i in 1:N){
ito <- ito + exp(-theta[2] * t[i]) * sqrt(Dt) * Z[i]
Y[i+1] <- (theta[1]/theta[2]) + (x - theta[1]/theta[2]) * exp(-theta[2]*t[i]) + theta[3]*exp(-
theta[2]*t[i])*ito
}
Y <- ts(Y, start=0, deltat=Dt)
return(Y)
}
```

Für das gesetzte $\theta = (0, 5, 3.5)$ kann hiermit die explizite Lösung für einen vorgegebenen Wert N (der die Feinheit der Diskretisierung festlegt) und einen über `set.seed` festgelegten Wiener-Prozess berechnet werden. Für zwei Werte von N ist die explizite Lösung in der folgenden Abbildung dargestellt.

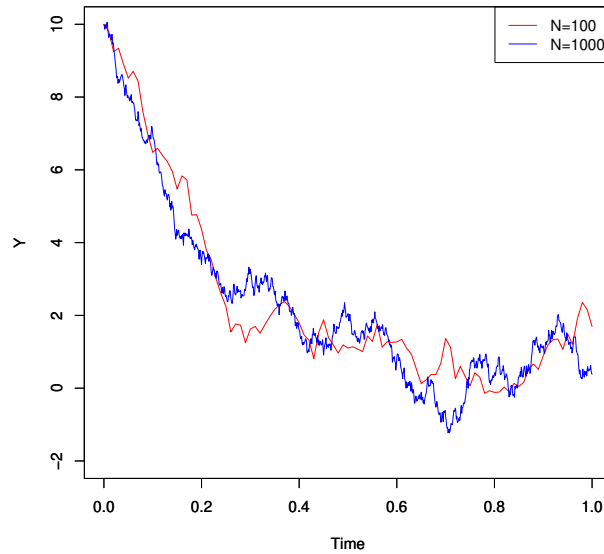


Abbildung 3.10: Explizite Lösungen des Orstein-Uhlenbeck-Prozesses

Die beiden anderen vorgestellten Prozesse haben die folgenden expliziten Lösungen (s. Iacus (2008), S.46,47):

$$X_t = x_0 e^{(\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^2)t + \theta_2 W_t} \quad (\text{Black-Scholes-Merton})$$

und

$$X_t = (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 e^{-\theta_2 t} \int_0^t e^{\theta_2 u} \sqrt{X_u} dW_u \quad (\text{Cox-Ingersoll-Ross})$$

3.4.2 Euler-Approximation

In der Praxis trifft man nun aber oft den Fall an, dass für den zu untersuchenden Prozess keine geschlossene Darstellung der expliziten Lösung vorliegt und damit keine Anwendung des stochastischen Integrals möglich ist. Um dennoch Lösungen zu erhalten, bedient man sich dann numerischer Verfahren, wobei die Euler-Approximation das am häufigsten verwendete darstellt.

Sei also ein stochastischer Prozess $\{X_t, 0 \leq t < T\}$ gegeben, der die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

darstellt. $X(t_0) = X_0$ sei dabei der deterministische Startwert und Π_N eine Diskretisierung des Intervalls $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.

Die Euler-Approximation von $\{X_t\}$ ist nun ein stetiger stochastischer Prozess $\{Y_t\}$, der das folgende iterative Schema erfüllt (zur Vereinfachung der Darstellung schreibe dabei Y_i bzw. W_i anstelle von $Y(t_i)$ bzw. $W(t_i)$):

$$Y_{i+1} = Y_i + b(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Als Startwert Y_0 wird der Startwert X_0 des Prozesses $\{X_t\}$ verwendet. Das zeitliche Inkrement $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$ wird als konstant (also $\Delta t = \frac{T}{N}$) angenommen. Zwischen zwei Zeitpunkten t_i und t_{i+1} wird linear interpoliert, so dass sich Y_t für t aus $[t_i, t_{i+1})$ schreiben lässt als

$$Y_t = Y_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(Y_{i+1} - Y_i) .$$

Aus obiger Darstellung der Euler-Approximation ist direkt ersichtlich, dass für die Simulation des Prozesses Y lediglich die Zuwächse eines Wiener Prozesses simuliert werden müssen. Siehe hierzu den Abschnitt zum Wiener Prozess.

Der Algorithmus lässt sich dann vereinfacht darstellen als

$$Y_{i+1} = Y_i + b(t_i, Y_i)\Delta t + \sigma(t_i, Y_i)\sqrt{\Delta t}Z_i, \quad Z_i \sim N(0, 1), i = 0, 1, \dots, N - 1$$

Siehe hierzu auch Iacus (2008), S. 62

Bevor auf die Programmierung der Euler-Approximation eingegangen wird, muss man sich die Frage stellen, ob der so generierte Prozess $\{Y_t\}$ eine Lösung der zugrunde gelegten stochastischen Differentialgleichung darstellt. Aus dem Iterationsschema lässt sich dazu direkt ableiten, dass für Y_t folgendes erfüllt ist:

$$Y_{i+1} - Y_i = b(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

oder anders formuliert

$$\Delta Y_t = b(t, Y_t)\Delta t + \sigma(t, Y_t)\Delta W_t.$$

Mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung (also $\Delta t \rightarrow 0$) erzielt man im Grenzwert das gewünschte Ergebnis.

Weiterhin kann man sich fragen, ob der mittels der Euler-Approximation generierte diskrete Prozess gegen den interessierenden stetigen Prozess konvergiert. Dazu gibt es hier die beiden Begriffe der starken beziehungsweise der schwachen Konvergenz. Sei Y_δ eine diskrete Approximation eines stetigen Prozesses Y , wobei δ das größte zeitliche Inkrement der Diskretisierung darstellt. Man spricht nun von starker Konvergenz (der Ordnung γ), wenn für alle festen T gilt, dass

$$E|Y_\delta(T) - Y(T)| \leq C\delta^\gamma, \quad \forall \delta < \delta_0.$$

Dabei ist $\delta_0 > 0$ und C eine von δ unabhängige Konstante.

Von schwacher Konvergenz (der Ordnung β) spricht man, wenn für alle festen T und jede $2(\beta + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion g von polynomialem Wachstum gilt, dass:

$$|Eg(Y(T)) - Eg(Y_\delta(T))| \leq C\delta^\beta, \quad \forall \delta < \delta_0$$

δ_0 und C dabei wie oben.

Vergleiche zu diesen Begriffen auch Iacus (2008), S. 61,62.

Für die Euler-Approximation gilt eine starke Konvergenz der Ordnung $\gamma = \frac{1}{2}$ und eine schwache Konvergenz der Ordnung $\beta = 1$.

In R ergibt sich nun eine einfache Programmierung des benötigten Algorithmus. Als Beispiel soll hierzu wieder der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess dienen. Hier sind also $b(t, x) = \theta_1 - \theta_2 x$ und $\sigma(t, x) = \theta_3$. Wählt man erneut $X_0 = 10$ und als Parametervektor $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 5, 3.5)$ lässt sich ein Pfad von X_t wie folgt simulieren:

```
set.seed(123)
N <- 100
T <- 1
x <- 10
theta <- c(0, 5, 3.5)
```

```

Dt <- T/N
Y <- numeric(N+1)
Y[1] <- x
Z <- rnorm(N)
for(i in 1:N)
Y[i+1] <- Y[i] + (theta[1] - theta[2] * Y[i]) * Dt + theta[3] * sqrt(Dt) * Z[i]
Y <- ts(Y, start=0, deltat=T/N)
plot(Y)

```

Die Ergebnisse, die sich für das gesetzte `set.seed` und zwei verschiedene `N` ergeben, sind in Abbildung 3.11 dargestellt.

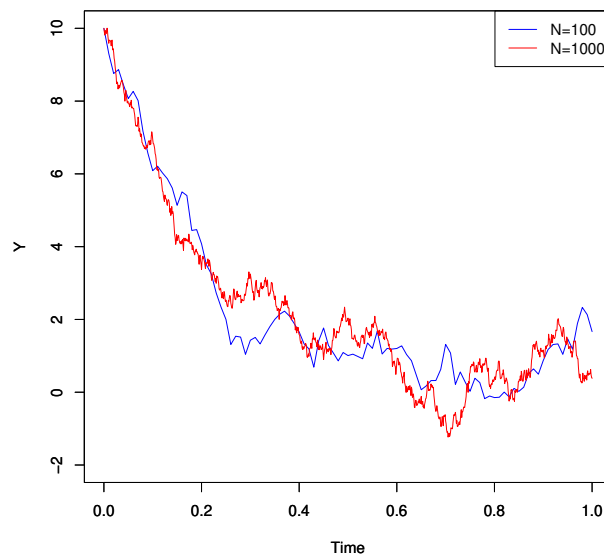


Abbildung 3.11: Approximation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

Weiterhin muss man sich die Frage stellen, wie groß `N` gewählt werden sollte, um eine gute Approximation zu erzielen. Hierzu bietet es sich an, für verschiedene `N` die Euler-Approximation mit der expliziten Lösung der stochastischen Differentialgleichung zu vergleichen. Tut man dies beim angegebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für `N=100` und `N=1000`, sieht man, dass für `N=100` noch einige Abweichungen (insbesondere für kleine `t`) vorliegen. Für `N=1000` lässt sich hingegen kein nennenswerter Unterschied mehr feststellen. Siehe hierzu die beiden folgenden Abbildungen.

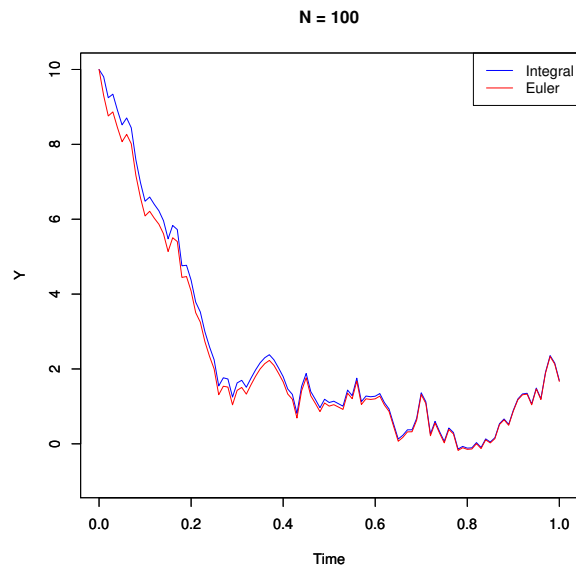


Abbildung 3.12: Vergleich Euler-Approximation mit expliziter Lösung, $N=100$

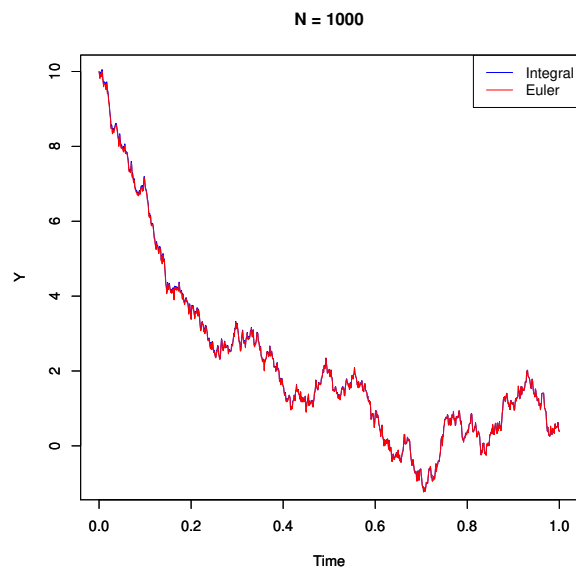


Abbildung 3.13: Vergleich Euler-Approximation mit expliziter Lösung, $N=1000$

Für eine sehr gute Näherung der expliziten Lösung genügt es also, die Euler-Approximation mit $N=1000$ durchzuführen.

In R ist die Euler-Approximation auch direkt über die Funktion `sde.sim()` aus dem Paket `sde` anwendbar. Hiermit ließe sich die Näherung aus Abbildung 3.13 wie folgt erzielen:

```

d <- expression(-5*x)
s <- expression(3.5)
set.seed(123)
X <- sde.sim(X0=10, drift=d, sigma=s, N=1000)
plot(X)

```

3.5 Prognose zukünftiger Werte

Wie so häufig in der Statistik sind wir hier nicht so sehr daran interessiert, eine vorliegende Datenreihe mittels einer stochastischen Differentialgleichung zu beschreiben, sondern ausgehend von dieser eine Prognose für zukünftige Werte abzugeben. Es seien also die Beobachtungen $X_0 = X_{t_0}, \dots, X_N = X_{t_N}$ eines Diffusionsprozesses $\{X_t, t \geq 0\}$ gegeben, mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Wir wollen aufgrund dieser Datenlage nun eine Vorhersage treffen für den Wert $X_F = X_{t_F}$, wobei $t_F > t_N$. Hierzu benötigen wir in erster Linie eine Schätzung für die unbekanntes Modellparameter. Für den Fall, dass der Diffusionsprozess eine explizite Lösung mit bekannten bedingten Verteilungen besitzt, lässt sich der Parametervektor θ über das Maximum-Likelihood-Prinzip schätzen. Es gilt dann:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{n=1}^N f_{\theta, X_n | X_{n-1} = x_{n-1}}(x_n),$$

wobei $f_{\theta, X_n | X_{n-1} = x_{n-1}}$ die Dichte der bedingten Verteilung von X_n gegeben X_{n-1} bezeichnet, $n = 1, \dots, N$.

Für die vorgestellten Prozesse lassen sich diese bedingten Verteilungen direkt angeben.

Beim Ornstein-Uhlenbeck-Prozess entspricht die bedingte Verteilung einer Normalverteilung mit

$$E_{\theta}(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + (x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2})e^{-\theta_2 t}$$

und

$$\text{Var}_\theta(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2(1-e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}.$$

Vergleiche hierzu auch Iacus, S. 45.

Für den Black-Scholes-Merton-Prozess ergibt sich eine Log-Normalverteilung mit

$$E_\theta(\ln(X_t)|X_0 = x_0) = \ln(x_0) + (\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^2)t$$

und

$$\text{Var}_\theta(\ln(X_t)|X_0 = x_0) = \theta_2^2 t.$$

Vergleiche hierzu auch Iacus, S. 46.

Auf die komplexere bedingte Dichte des Cox-Ingersoll-Ross-Prozesses soll hier verzichtet werden. Sie kann entnommen werden aus Iacus, S. 47,48.

Aus dem so gewonnenen Parametervektor $\hat{\theta}$ lässt sich dann ein Punktschätzer für $E_\theta(X_F|X_N)$ bestimmen mittels

$$E_{\hat{\theta}}(X_F|X_N) = \int x f_{\hat{\theta}, X_F|X_N=x_N}(x) dx.$$

In den meisten Fällen wird eine solche geschlossene Darstellung und insbesondere die bedingte Verteilung aber nicht vorliegen, so dass man sich dann auf andere Verfahren verlegen muss.

3.5.1 Testbasierte Verfahren

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, alternative Verfahren aufzuzeigen, falls für die zu untersuchende stochastische Differentialgleichung (kurz: SDG) keine explizite Lösung und damit auch keine bedingten Dichten vorliegen. Die zur Auswertung der Virkler-Daten gewählte SDG $dX_t = \theta_1(s(X_t - \theta_0))^{\theta_2} dt + \sigma_{\theta_3}(X_t)dW_t$ ist so ein Fall. Für Gleichungen der Form

$$dX_t = b(\theta, X_t)dt + \sigma\tilde{b}(\theta, X_t)dW_t, \quad \theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)^T$$

lässt sich dann das unten dargestellte mehrstufige Verfahren anwenden. Dabei ist der Fall $b(\theta, x) = \tilde{b}(\theta, x)$ zulässig. Dies würde Anwendung finden, falls die Volatilität eine direkt proportionale Beziehung zum Drift aufweist. Diese Annahme erscheint für die Virkler-Daten durchaus gerechtfertigt. Somit verbleiben hier vier interessierende Parameter, nämlich $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ und σ .

Dann lässt sich wie folgt vorgehen:

- Bestimmung eines $(1 - \alpha)$ -Konfidenintervalls K_{SDG} für den Parametervektor $\tau = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \sigma)^T$ mittels Gittersuche.
- Simulation einer größeren Anzahl Pfade $x(\tau, t_N) = x_N, x(\tau, t_{N+1}), \dots, x(\tau, t_F)$ für sämtliche $\tau \in K_{SDG}$.
- Prognose von X_F als Median der Menge $\{x(\tau, t_F) : \tau \in K_{SDG}\}$.

Ein Prognoseintervall ließe sich angeben über $PI_{SDG} = [q(\frac{\alpha}{2}), q(1 - \frac{\alpha}{2})]$, wobei $q(\alpha)$ das α -Quantil der Menge $\{x(\tau, t_F) : \tau \in K_{SDG}\}$ bezeichnet. Unter einem Prognoseintervall verstehen wir ein Intervall, dass den gesuchten Wert X_F mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ überdeckt. Der Simulationsschritt ließe sich wiederholen, allerdings ist die Wahl eines feineren Gitters vorzuziehen.

Zur Auffindung des gesuchten K_{SDG} soll der Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und statistischen Tests ausgenutzt werden. K_{SDG} setzt sich dann zusammen aus allen $\tau_* = (\theta_*, \sigma_*)$, für die ein Niveau- α -Test die Nullhypothese $H_0 : \tau = \tau_*$ nicht verwirft. Zur Durchführung solcher Test werden bestimmte Residuen und einige darauf basierende Summen benötigt. Definiere also zunächst die gesuchten Residuen als:

$$Res_n(\tau_*) = \frac{X_n - X_{n-1} - b(\theta_*, X_{n-1})(t_n - t_{n-1})}{\sqrt{(t_n - t_{n-1})\sigma_* \tilde{b}(\theta_*, X_{n-1})}}, \quad n = 2, \dots, N$$

und weiterhin die folgenden Summen:

$$S_1(\tau_*) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{n=2}^N Res_n(\tau_*),$$

$$S_2(\tau_*) = \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2}} \sum_{n=2}^N (Res_n(\tau_*)^2 - 1),$$

$$S_3(\tau_*) = \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{15}} \sum_{n=2}^N Res_n(\tau_*)^3,$$

$$S_4(\tau_*) = \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{96}} \sum_{n=2}^N (Res_n(\tau_*)^4 - 3).$$

Satz 3. Für den wahren Parametervektor τ_0 gilt:

- 1) Die Residuen $Res_n(\tau_0)$ sind approximativ standardnormalverteilt.
- 2) $S_1(\tau_0)$ ist approximativ standardnormalverteilt.
- 3) $S_2(\tau_0), S_3(\tau_0)$ und $S_4(\tau_0)$ sind asymptotisch standardnormalverteilt.

Beweis. 1) Mit dem Algorithmus aus der Euler-Approximation (vgl. S.20) gilt für $\Delta t = (t_n - t_{n-1})$:

$$Y_n = Y_{n-1} + b(\theta_0, Y_{n-1})\Delta t + \sigma_0 \tilde{b}(\theta_0, Y_{n-1})\sqrt{\Delta t}Z_n, \quad Z_n \sim N(0, 1), n = 2, \dots, N.$$

Mit der Konvergenz der Euler-Approximation gegen den eigentlichen Prozess (vgl. S.21) ergibt sich dann, dass

$$Res_n(\tau_0) = \frac{X_n - X_{n-1} - b(\theta_0, X_{n-1})\Delta t}{\sigma_0 \tilde{b}(\theta_0, X_{n-1})\sqrt{\Delta t}} \approx \frac{Y_n - Y_{n-1} - b(\theta_0, Y_{n-1})\Delta t}{\sigma_0 \tilde{b}(\theta_0, Y_{n-1})\sqrt{\Delta t}} = Z_n, \quad n = 2, \dots, N.$$

Anders formuliert ist $Res_n(\tau_0)$ approximativ standardnormalverteilt.

2) Mit der Unabhängigkeit der Residuen (Eigenschaften des Wiener Prozesses) folgt, dass $\sum_{n=2}^N Res_n(\tau_0)$ approximativ $N(0, N-1)$ -verteilt ist und somit, dass $S_1(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{n=2}^N Res_n(\tau_0)$ approximativ standardnormalverteilt ist.

3) Es gilt, dass $Z_n^2 \sim \chi_1^2$ mit $E(\chi_1^2) = 1$ und $Var(\chi_1^2) = 2$ (s. Hartung (2009), S.153) und somit, dass $(Z_n^2 - 1)$ Erwartungswert Null und Varianz 2 besitzt. Durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes folgt dann die Konvergenz von $S_2(\tau_0)$ gegen die Standardnormalverteilung.

Für Z_n gelten die Momente der Standardnormalverteilung (s. Hartung (2009), S.144): $E(Z_n) = 0, E(Z_n^2) = 1, E(Z_n^3) = 0, E(Z_n^4) = 3, E(Z_n^6) = 15$ und $E(Z_n^8) = 105$. Damit ergeben sich folgende Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(Z_n^3) &= E((Z_n^3 - E(Z_n^3))^2) = E((Z_n^3 - 0)^2) = E(Z_n^6) = 15, \\ Var(Z_n^4) &= E((Z_n^4 - E(Z_n^4))^2) = E((Z_n^4 - 3)^2) = E(Z_n^8) - 6E(Z_n^4) + 9 \\ &= 105 - 18 + 9 = 96. \end{aligned}$$

Durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes gilt dann für $S_3(\tau_0)$ und $S_4(\tau_0)$ die asymptotische Standardnormalverteilung. □

Aus den oben gebildeten Summen lässt sich dann der Residuen-Momenten-Test definieren, der $H_0 : \tau = \tau_*$ verwirft, falls ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ existiert, so dass $|S_j(\tau_*)| > q_{N(0,1), 1-\frac{\alpha}{8}}$.

Für den als Fehlerprozess gewählten Wiener-Prozess ist der Residuen-Momenten-Test ein asymptotischer Niveau- α -Test. Der Vergleich mit dem $1 - \frac{\alpha}{8}$ -Quantil resultiert aus der Bonferroni-Korrektur.

Alternativ zum Residuen-Momenten-Verfahren lässt sich ein Verfahren aufzeigen, dass auf der Datentiefe basiert und nur noch die Vorzeichen der Residuen betrachtet. Hierdurch wird unter anderem die Menge nötiger Teststatistiken reduziert. Definiere die zu betrachtenden Residuen dann wie folgt:

$$R_n(\theta) = X_n - X_{n-1} - b(\theta, X_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

Im Hinblick auf die obige stochastische Differentialgleichung lässt sich die Tiefe von θ in den Daten X_1, \dots, X_N berechnen als:

$$\begin{aligned} d_3(\theta, X_0, X_1, \dots, X_N) = & \\ \frac{1}{\binom{N}{3}} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq N} & (\mathbb{1}\{R_{n_1}(\theta) > 0, R_{n_2}(\theta) < 0, R_{n_3}(\theta) > 0\} \\ & + \mathbb{1}\{R_{n_1}(\theta) < 0, R_{n_2}(\theta) > 0, R_{n_3}(\theta) < 0\}), \end{aligned}$$

oder als

$$\begin{aligned} d_4(\theta, X_0, X_1, \dots, X_N) = & \\ \frac{1}{\binom{N}{4}} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \leq N} & (\mathbb{1}\{R_{n_1}(\theta) > 0, R_{n_2}(\theta) < 0, R_{n_3}(\theta) > 0, R_{n_4}(\theta) < 0\} \\ & + \mathbb{1}\{R_{n_1}(\theta) < 0, R_{n_2}(\theta) > 0, R_{n_3}(\theta) < 0, R_{n_4}(\theta) > 0\}). \end{aligned}$$

Nach Kustos, Müller und Wendler (2016) sollte eine Tiefe mit $k+1$ Residuen angewendet werden, wenn der zu untersuchende Parameter die Dimension k aufweist. Für ein dreidimensionales θ sollte also d_4 verwendet werden. Es hat sich allerdings gezeigt, dass d_3 ebenfalls sehr gute Resultate erzielt bei Parametern der Dimension

2 oder höher.

Zur Auffindung des gesuchten $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervalls sollen die folgenden Teststatistiken verwendet werden:

$$S_2^*(\tau_*) = S_2(\tau_*) = \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2}} \sum_{n=2}^N (Res_n(\tau_*)^2 - 1),$$

$$S_3^*(\theta_*) = N(d_3(\theta_*, X_0, X_1, \dots, X_N) - \frac{1}{4}),$$

$$S_4^*(\theta_*) = N(d_4(\theta_*, X_0, X_1, \dots, X_N) - \frac{1}{8}).$$

Hieraus ergeben sich dann der Tiefe-Test 1, der $H_0 : \tau = \tau_*$ verwirft, wenn entweder $|S_2^*(\tau_*)| > q_{N(0,1), 1-\frac{\alpha}{4}}$ oder $S_3^*(\theta_*) < q_{\frac{\alpha}{2}}^3$ und der Tiefe-Test 2, der $H_0 : \tau = \tau_*$ verwirft, wenn entweder $|S_2^*(\tau_*)| > q_{N(0,1), 1-\frac{\alpha}{4}}$ oder $S_4^*(\theta_*) < q_{\frac{\alpha}{2}}^4 \cdot q_{\alpha}^3$ bzw. q_{α}^4 bezeichnen dabei die α -quantile der asymptotischen Verteilungen von $S_3^*(\theta_*)$ bzw. $S_4^*(\theta_*)$. Wird für den Fehlerprozess der stochastischen Differentialgleichung der Wiener-Prozess verwendet, sind beide Tests asymptotische Niveau- α -Tests.

Die asymptotische Verteilung von $S_3^*(\theta_*)$ folgt aus einem Resultat von Kustosz, Leucht und Müller (2015), die asymptotische Verteilung von $S_4^*(\theta_*)$ aus einem Resultat von Malcherczyk, Leckey und Müller (2020). Die nötigen Quantile können für beide Verteilungen über die Funktion `qdepth(..)` aus dem R-Paket `GSignTest` (Melanie Horn (2020). `GSignTest: Robust Tests for Regression-Parameters via Sign Depth`. R package version 1.0.5. <https://github.com/melaniehorn/GSignTest>) bestimmt werden.

Ein $(1 - \alpha_1)$ -Konfidenzintervall kann dann gewonnen werden als

$$K = K(x_1, \dots, x_N) = \{\tau_* : H_0 : \tau = \tau_* \text{ wird zum Niveau } \alpha_1 \text{ nicht verworfen}\}.$$

Um ein Prognose-Intervall für das gesuchte X_F (zu einem Zeitpunkt $t_F > t_N$) zu konstruieren, sollen M Pfade aus den zuvor bestimmten $\tau \in K$ mittels Euler-Approximation simuliert werden. Die M Pfade sollten sich gleichmäßig auf alle τ verteilen und reichen von x_N bis zum gesuchten x_F (zum Zeitpunkt t_F). Für jedes τ ergeben sich somit $N = M/\text{Anzahl}(\tau)$ simulierte Werte für x_F aus denen ein $(1 - \alpha_2)$ -Konfidenzintervall berechnet werden kann als $KI_{\tau} = [q_{\eta_1}^N, q_{\eta_2}^N]$.

$q_{\eta_1}^N$ und $q_{\eta_2}^N$ bezeichnen dabei das η_1 - bzw. das η_2 -Quantil der Menge $\{x_F^1, \dots, x_F^N\}$, $0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq 1, \eta_2 - \eta_1 = 1 - \alpha_2$.

Aus diesen Konfidenzintervallen lässt sich dann das gesuchte Prognose-Intervall berechnen als $PI(x_1, \dots, x_N) := \cup_{\tau \in K} KI_\tau$. Das so bestimmte $PI(x_1, \dots, x_N)$ ist dann ein ungefähres $(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$ -Vorhersageintervall für X_F zum Zeitpunkt t_F . Um insgesamt ein $(1 - \alpha)$ -Prognoseintervall zu erhalten werden oft $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}, \eta_1 = \frac{\alpha}{4}$ und $\eta_2 = 1 - \frac{\alpha}{4}$ gewählt.

3.6 Intervall-Score

Im späteren Verlauf der Analyse sollen die gefundenen Prognose-Intervalle miteinander verglichen werden. Gneiting und Raftery (2007) haben dazu den folgenden Intervall-Score vorgeschlagen:

$$S(PI(x_1, \dots, x_N), x_F) := (u - l) + \frac{2}{\alpha}(l - x_F)\mathbb{1}\{x_F < l\} + \frac{2}{\alpha}(x_F - u)\mathbb{1}\{x_F > u\}.$$

Dabei bezeichnen $[l, u] = PI(x_1, \dots, x_N)$ ein $(1 - \alpha)$ -Prognose-Intervall für einen zukünftigen Wert X_F und x_F die zugehörige Beobachtung. Es wird bei Überdeckung des realisierten Wertes also die Breite des Intervalls gewertet, andernfalls kommt noch ein Strafterm hinzu, der abhängig ist vom gewählten Niveau α und vom Abstand der Realisierung zum Prognose-Intervall. Je größer der Intervall-Score ausfällt, desto schlechter muss das gefundene Intervall bewertet werden.

Kapitel 4

Auswertung

Bevor näher auf die einzelnen Analyseschritte eingegangen wird, sei hier darauf hingewiesen, dass in der Folge nicht alle zur Verfügung stehenden Daten verwendet werden, sondern nur die Daten bis zu einer Risslänge von 35mm. Aus diesen wird dann eine Prognose bzw ein Prognoseintervall für die verstrichene Zeit bis zur maximalen Risslänge von 49.8mm erstellt. Somit werden nur 131 Datenpunkte genutzt anstelle der vollen 164. Hintergrund hierfür ist der Umstand, dass ein Vergleich zwischen Prognose und Originaldaten möglich gemacht werden soll.

Zur Untersuchung der Virkler-Daten, in denen die Zeit (in Form von 10^4 Belastungszyklen) gemessen wird, die es braucht, um eine vorgegebene Risslänge zu erreichen, wird im folgenden diese stochastische Differentialgleichung verwendet:

$$dX_l = \theta_1(s(X_l - \theta_0))^{\theta_2} dl + \sigma\theta_1(s(X_l - \theta_0))^{\theta_2} dW_l.$$

Für die angedachten Analysen ist es nun von vorrangiger Bedeutung ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für den unbekannt Parameter $\tau = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \sigma)$ zu finden. Dies soll mit einer Gittersuche und allen drei vorgestellten statistischen Tests (Residuen-Momenten-Test, Tiefe-Test 1 und Tiefe-Test 2) durchgeführt werden. Dadurch können dann auch die Unterschiede zwischen den jeweiligen Prognosen betrachtet werden.

Da die Gittersuche nun nicht einfach in einem beliebigen Bereich durchgeführt werden kann (oder zumindestens nicht durchgeführt werden sollte), erscheint es sinnvoll, zunächst einen möglichst guten zentralen Parameter zu ermitteln, um den herum

dann die Gittersuche stattfindet. Hierfür stehen nun verschiedene Methoden zur Verfügung, aber im weiteren soll immer das folgende Verfahren genutzt werden:

- Bestimmung einer möglichst guten Schätzung $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ für die Lösungsparameter β_0, β_1 und β_2 durch Anpassung eines nichtlinearen Modells.
- Umrechnung der gefundenen Parameter $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ in die gesuchten Parameter $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.
- Ermittlung eines Startwertes für σ durch eine kleinere Gittersuche, in der $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ festgehalten werden und nur σ variiert wird. Falls mehrere Parameter gefunden werden, soll der mittlere Wert genommen werden.

Zur Veranschaulichung soll obiges Verfahren detailliert für die erste Virkler-Versuchsreihe durchgeführt werden.

4.1 Schätzung der Lösungsparameter

Zur Schätzung der Lösungsparameter $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ soll wie gesagt ein nichtlineares Modell angepasst werden, in dem dann die gewünschte Schätzung erfolgt. In R ist dies relativ schnell gemacht mit dem folgenden Befehl:

```
mod <- nls(Time1 ~ b0 + b1*l^b2,algorithm="port",
start=list(b0=0,b1=-2,b2=-1))
```

Time1 bezeichnet dabei die gemessenen Zeiten in der ersten Versuchsreihe (als Belastungszyklen/10000), l ist der Vektor der vorgegebenen Längen. Der Algorithmus benötigt eine halbwegs passable Angabe von Startwerten, da er ansonsten entweder gar nicht funktioniert, oder in einer vorgegebenen Anzahl von Durchläufen nicht zu einem Ergebnis kommt. Unterschiedliche (funktionierende) Startwerte kommen aber immer zum gleichen Resultat. Die obige Kombination ist dann auch mit einigen wenigen Versuchen gefunden und die gesuchten Schätzwerte kann man der Ausgabe des Modells (mit `summary(mod)`) unter Estimate entnehmen. Alternativ lassen sich diese aber auch ohne den `summary` Befehl direkt aus dem Modell herauslesen mittels `coef(mod)`.

Für die erste Versuchsreihe ergeben sich dann $\beta_0 = 36.17, \beta_1 = -154.35$ und $\beta_2 = -0.66$. Betrachtet man sich in der Abbildung 4.1 nun einmal die originalen Daten (schwarz) zusammen mit den angepassten Werten (rot), scheint die Schätzung gut gelungen zu sein. Für die optisch auffällige Versuchsreihe 49 sind die entsprechenden Ergebnisse in Abbildung 4.2 dargestellt. Hier ist die Anpassung ebenfalls gut gelungen, aufgrund der größeren Schwankung in den Daten gibt es aber deutlichere Abweichungen zwischen den Daten und den angepassten Werten. Dennoch scheinen in beiden Fällen gute Ausgangslagen für die Gittersuche gefunden worden zu sein.

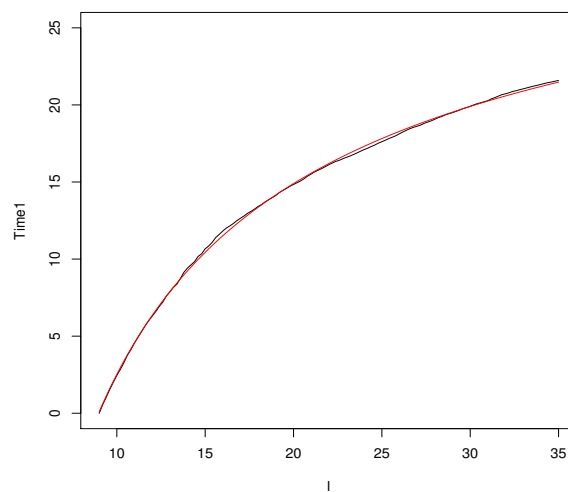


Abbildung 4.1: Vergleich Versuchsreihe 1 mit Modellanpassung

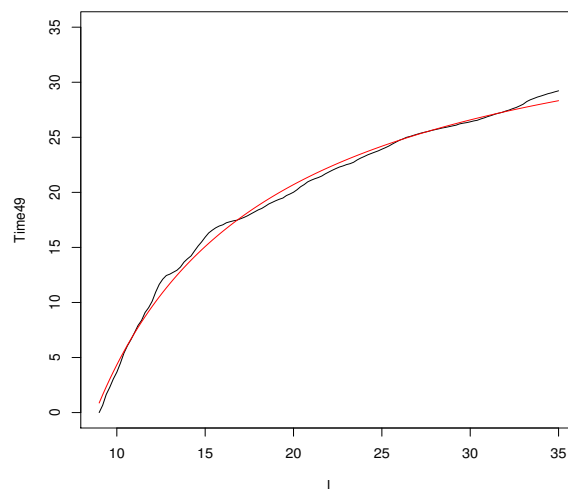


Abbildung 4.2: Vergleich Versuchsreihe 49 mit Modellanpassung

Fasst man die Schätzwerte für alle Datenreihen nun in Boxplots zusammen, erhält man das folgende Ergebnis. Dazu sei angemerkt, dass die gegebenen Startwerte aus dem oben erstellten nls-Modell nicht für alle 68 Datenreihen funktionieren. Es wurde daher eine Startvorgabe verwendet, die für alle Reihen ein Ergebnis liefert ($start = list(\beta_0 = 0, \beta_1 = -150, \beta_2 = -0.5)$).

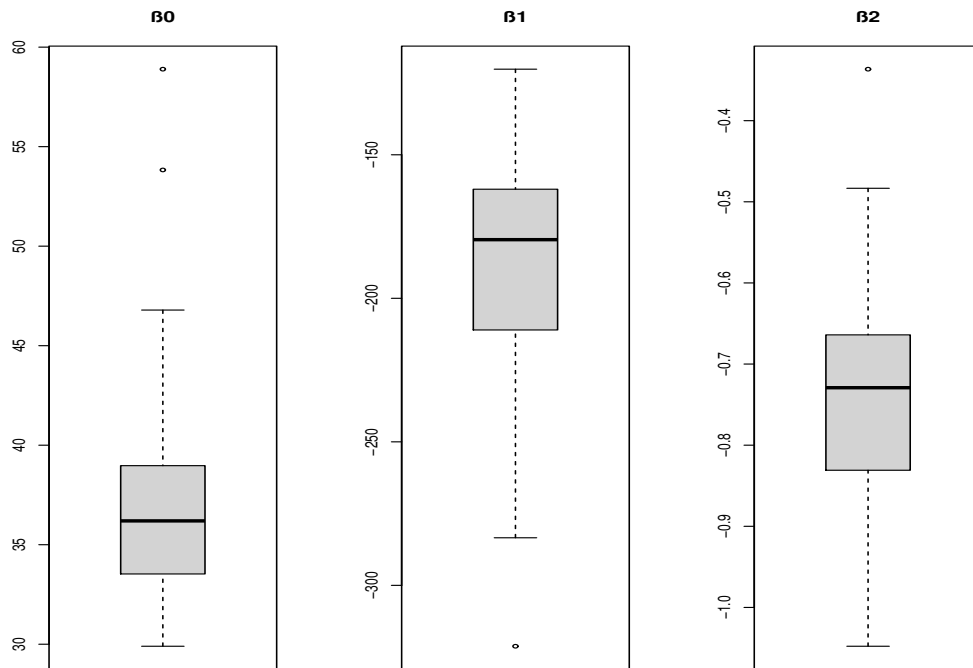


Abbildung 4.3: Zusammenfassung der geschätzten Lösungsparameter

Für die drei Parameter ergeben sich die Mediane 36.19, -179.57 und -0.73. Es fällt weiterhin auf, dass für alle drei Parameter Ausreißer in den Schätzungen vorliegen. Für β_0 sind dies die Versuchsreihen 44 und 47. Bei β_1 ist es Versuchsreihe 32 und für β_2 ist es wieder die Versuchsreihe 47. Diese drei Versuchsreihen sollten bei den folgenden Untersuchungen (insbesondere bei der Prognose) also nochmals gesondert betrachtet werden.

Aus den so gewonnenen Schätzungen für die Lösungsparameter lassen sich dann die gesuchten Start-Schätzungen für Parameter θ_0, θ_1 und θ_2 wie folgt umrechnen (siehe hierfür Satz 2 auf Seite 9):

$$s = sign(\beta_1) = sign(\beta_2),$$

$$\theta_0 = \beta_0,$$

$$\theta_1 = (s\beta_2)(s\beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}},$$

$$\theta_2 = 1 - \frac{1}{\beta_2}.$$

Führt man diese Umrechnung nun für die erste Datenreihe durch, ergeben sich als Ausgangsparameter: $\theta_0 = 36.17$, $\theta_1 = 0.0003$ und $\theta_2 = 2.512$. Die Umrechnung für alle Datenreihen ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

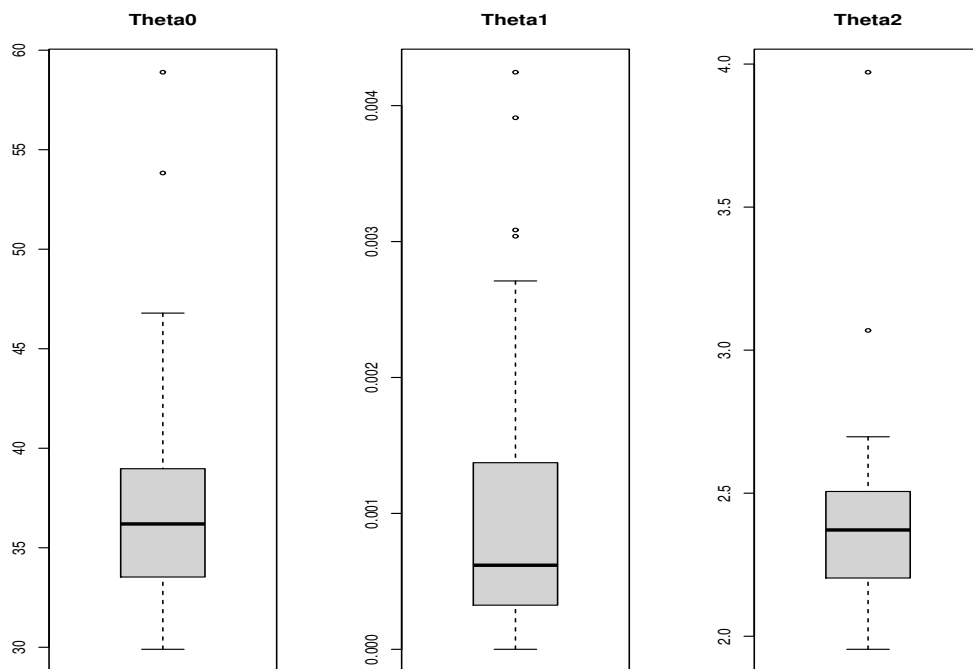


Abbildung 4.4: Umrechnung der geschätzten Lösungsparameter

Als Mediane ergeben sich hier 36.19, 0.0006 und 2.37. Es fällt auf, dass nach der Umrechnung bei θ_1 nun vier Ausreißer vorliegen, die Datenreihen 34, 42 und 57 und sind jetzt ebenfalls als auffällig zu betrachten. Insbesondere müssen die Datenreihen 32 und 57 als extreme Ausreißer angesehen werden. Bei θ_2 ist die Datenreihe 44 als Ausreißer hinzugekommen. Daher sollen die Datenreihen 32, 44, 47 und 57 in der späteren Auswertung noch genauer untersucht werden.

4.2 Bestimmung Konfidenzintervall

In diesem Abschnitt soll für die erste Datenreihe mittels Gittersuche ein Konfidenzintervall für den gesuchten Parametervektor τ bestimmt werden. Dazu wird zunächst mittels des Residuen-Momenten-Tests (kurz: RM-Test) eine Startschätzung für σ ermittelt. Die im vorherigen Abschnitt gefundene Schätzung für θ ($\theta_0 = 36.17, \theta_1 = 0.0003, \theta_2 = 2.512$) wird mit verschiedenen Werten für σ daraufhin überprüft, ob der RM-Test die Nullhypothese $\tau = \tau_*$ nicht verwirft. Dies passiert beim Wert $\sigma = 0.1$, weshalb dieser Wert als Ausgangslage für die Gittersuche verwendet werden soll.

Der zu untersuchende Bereich soll dann zunächst der folgende sein:

Parameter	Min	Max	Inkrement
θ_0	35	37	0.5
θ_1	0.0001	0.0005	0.0001
θ_2	2.49	2.53	0.01
σ	0.09	0.11	0.005

Tabelle 4.1: Untersuchungsbereich

Mit fünf verschiedenen Ausprägungen pro Parameter ergeben sich insgesamt $5^4 = 625$ verschiedene Kombinationen.

Alle folgenden Untersuchungen werden mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.025$ durchgeführt.

Mittels des Residuen-Momenten-Test erhält man 25 Parameterkombinationen, für die der Test die Nullhypothese nicht verwirft.

θ_0	θ_1	θ_2	σ
35.5	0.0004	2.49	0.09
35	0.0004	2.50	0.09
37	0.0003	2.51	0.09
...
35	0.0004	2.51	0.105
36.5	0.0003	2.52	0.105

Tabelle 4.2: Parameterkombinationen RM-Test

Die beiden Tiefe-Test liefern für den obigen Bereich 23 bzw 18 passende Kombinationen. Da diese den oben gezeigten sehr ähnlich sind, wird auf eine neuerliche Abbildung verzichtet.

Mit den so gefundenen Konfidenzintervallen sollen im folgenden Abschnitt die nötigen Zeiten für eine Risslänge von 49.8mm prognostiziert werden.

4.3 Prognose

Um aus den zuvor ermittelten Konfidenzintervallen Prognosen für zukünftige Werte zu erhalten, soll hier mittels der Euler-Approximation eine große Menge an Pfaden für die einzelnen Parameterkombinationen aus den Konfidenzintervallen simuliert werden. Dies lässt sich wie bereits erwähnt mittels des R-Befehls `sde.sim` sehr komfortabel durchführen:

```
d <- expression(th1*((-(x-th0))^th2))
s <- expression(sig*(th1*((-(x-th0))^th2)))
X <- sde.sim(X0=Time[131],t0=l[131],T=49.8, drift=d, sigma=s, N=1000)
```

`th0`, `th1`, `th2` und `sig` sind dabei die Entsprechungen der geschätzten Parameter. Als Startwerte der Simulation werden die letzten verwendeten Werte der Originaldaten (hier `Time[131]` für die gemessene Zeit bei Risslänge 35mm und `l[131]` für Risslänge 35mm) genommen, `T` bezeichnet den Zielwert für die Zeit (in unserem Fall die maximale interessierende Risslänge von 49.8mm), `N` legt wieder die Feinheit der Diskretisierung fest.

Führt man dies nun einmal für die erste Datenreihe und die erste Parameterkombination des RM-Tests aus Tabelle 4.2 (S. 35) durch, erhält man das folgende Ergebnis:

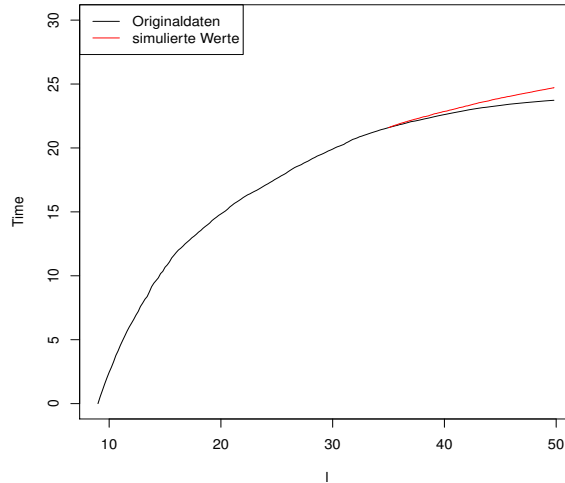


Abbildung 4.5: Simulierter Pfad für die erste Datenreihe von 35mm bis 49.8mm

Wie es scheint, überschätzt diese Kombination den erwarteten Verlauf der Originaldaten ein wenig. Allerdings soll ja nicht bloß ein einzelner Pfad für eine einzelne Parameterkombination betrachtet werden. In der Folge werden immer 10000 Pfade simuliert, die sich gleichmäßig auf alle Parameterkombinationen verteilen. Aus diesen Pfaden werden dann sowohl der Median als auch die jeweiligen Prognoseintervalle (für $\eta_1 = \frac{\alpha_2}{2} = 0.0125$ und $\eta_2 = 1 - \frac{\alpha_2}{2} = 0.9875$) bestimmt. Um die nötige Rechenzeit in Grenzen zu halten, wird bei der Eulerapproximation die Feinheit der Diskretisierung auf $N=500$ reduziert. Für die erste Datenreihe und die Ergebnisse aus dem RM-Test ergeben sich dann folgende Verläufe:

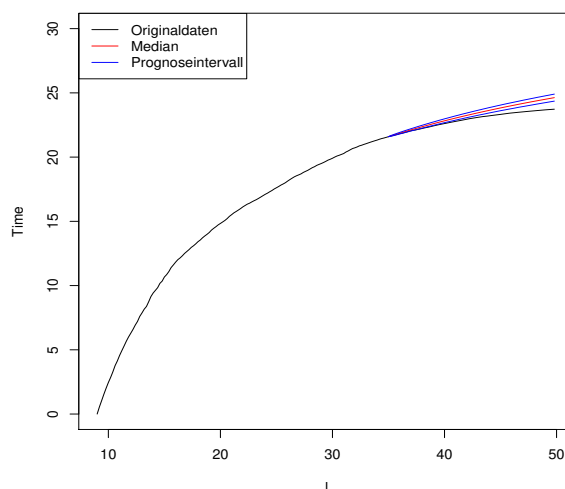


Abbildung 4.6: Prognose Datenreihe 1 mittels RM-Test

Auch nach Durchführung einer umfangreichen Simulation werden die Originaldaten noch leicht überschätzt. Es ergeben sich bei Risslänge 49.8mm ein Median in Höhe von 24.63 sowie [24.36, 24.91] als Prognoseintervall. Beides liegt ein wenig oberhalb des tatsächlich erreichten Wertes von 23.73. Daraus ergibt sich dann ein Intervallscore von 26.01.

Für den Tiefe-Test 1 und den Tiefe-Test 2 erhält man folgende Ergebnisse:

	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	24.56	24.59
Prognose-Intervall	[24.36, 24.79]	[24.36, 24.79]
tatsächlicher Wert	23.73	23.73
Score	25.54	25.57

Tabelle 4.3: Ergebnisse Tiefe-Tests

Wie man sieht, liefern beide Tiefe-Tests annähernd gleiche Ergebnisse. Sie überschätzen ebenfalls den tatsächlichen Wert, haben aber etwas kleinere Intervall-Scores.

Dass der tatsächliche Wert in allen Fällen verfehlt wird, lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass das oben gewählte Fenster schlichtweg zu klein ist und deshalb wesentliche Parameterkombinationen (insbesondere solche mit höheren Werten für σ) nicht abgedeckt werden. Der Untersuchungsbereich soll sich im folgenden wie folgt darstellen:

Parameter	Min	Max	Inkrement
θ_0	Startwert-7	Startwert+7	1
θ_1	0.25·Startwert	50·Startwert	0.25·Startwert
θ_2	0.1·Startwert	2·Startwert	0.1·Startwert
σ	0.05	1	0.05

Tabelle 4.4: Genereller Untersuchungsbereich

Dadurch werden in der Folge immer 1.2 Millionen verschiedene Parameterkombinationen überprüft. Die Wahl des +/-7 Fensters für θ_0 resultiert daher, dass ein größeres Fenster (z.B. +/-10) zu Problemen bei der Auswertung einiger Datenreihen

führt. Der sehr breite Bereich für θ_1 erklärt sich dadurch, dass in Vorabuntersuchungen für Datenreihe 1 Werte bis zu 0.0139 gefunden wurden. Dies entspricht ungefähr dem 43-fachen des Ausgangswertes. Die teilweise sehr kleinen Ausprägungen von θ_1 machen zudem die Wahl eines festen Inkrementes schwierig, weshalb es für diesen Parameter von dessen Startwert abhängig gemacht wird. Ähnliches gilt für θ_2 , wo Werte bis zum 1.4-fachen des Ausgangswertes gefunden wurden. Für σ soll einfach sicherheitshalber der ganze Bereich bis 1 überdeckt werden. Dies erspart in der Folge auch die Durchführung eines Vorabtests zur Ermittlung eines Startparameters.

Für den neuen Bereich liefert der RM-Test dann auch deutlich andere Ergebnisse (insgesamt werden hier 440 Kombinationen gefunden):

θ_0	θ_1	θ_2	σ
33.17	0.0092	1.51	0.10
29.17	0.0141	1.51	0.10
39.17	0.0142	1.26	0.15
...
29.17	0.00016	3.26	0.30
29.17	0.00008	3.51	0.40

Tabelle 4.5: Neue Parameterkombinationen Datenreihe 1 RM-Test

Auch die Simulationsergebnisse ändern sich nun deutlich:

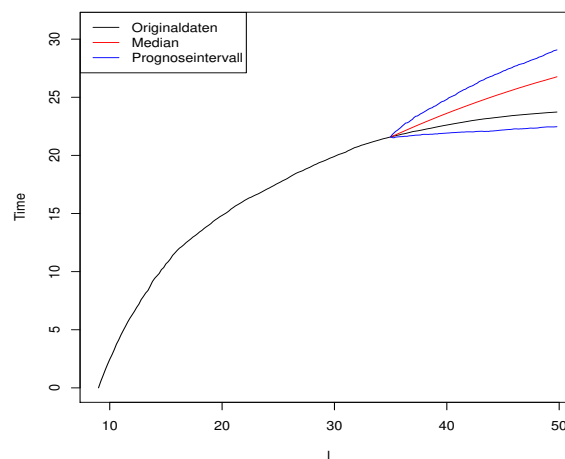


Abbildung 4.7: Prognose Datenreihe 1 mittels RM-Test

Als Median ergibt sich nun 26.73, als Prognose-Intervall [22.48, 29.05]. Da der wahre Wert jetzt überdeckt wird, sinkt auch der Intervall-Score auf 6.57. Es fällt auf, dass der tatsächliche Wert doch ziemlich stark überschätzt wird. Setzt man die Feinheit der Euler-Approximation auf $N=100$ herunter, erhält man annähernd die gleichen Ergebnisse (26.76, [22.46, 29.07], 6.61), verkürzt aber die nötige Rechenzeit beträchtlich. Daher soll die Euler-Approximation in der Folge immer mit $N=100$ durchgeführt werden.

Für die beiden Tiefe-Tests ergeben sich 29 bzw. 13 passende Kombinationen, allerdings nur solche mit $\sigma = 0.1$. Mit diesen erhält man dann die folgenden Ergebnisse:

	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	24.37	24.69
Prognose-Intervall	[23.88, 24.92]	[24.20, 25.15]
Breite PI	1.04	0.95
tatsächlicher Wert	23.73	23.73
Überdeckung	Nein	Nein
Score	7.13	19.84

Tabelle 4.6: Ergebnisse Tiefe-Tests

Wie man sieht, ergeben sich bei den beiden Tiefe-Tests deutlich schmalere Prognoseintervalle. Dies liegt daran, dass diese beiden Tests weniger Spielraum für die Driftparameter θ_0, θ_1 und θ_2 lassen als der RM-Test und dadurch nur Parameterkombinationen gefunden werden mit einem kleinen Schätzwert für σ . Betrachtet man sich die Ergebnisse einmal grafisch in den Abbildungen 4.8 und 4.9 auf der nächsten Seite muss man sagen, dass diese Resultate eigentlich sehr plausibel sind.

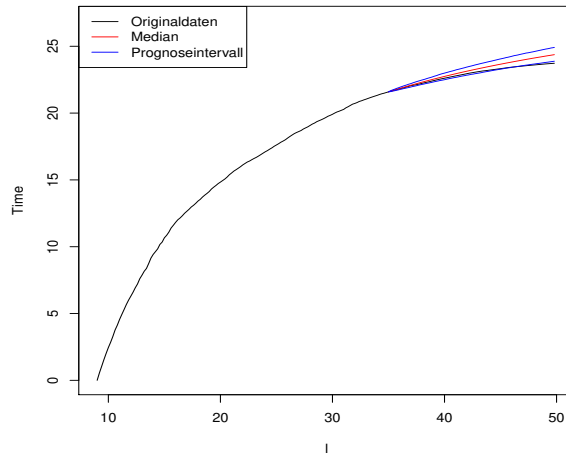


Abbildung 4.8: Prognose Datenreihe 1 mittels Tiefe-Test 1

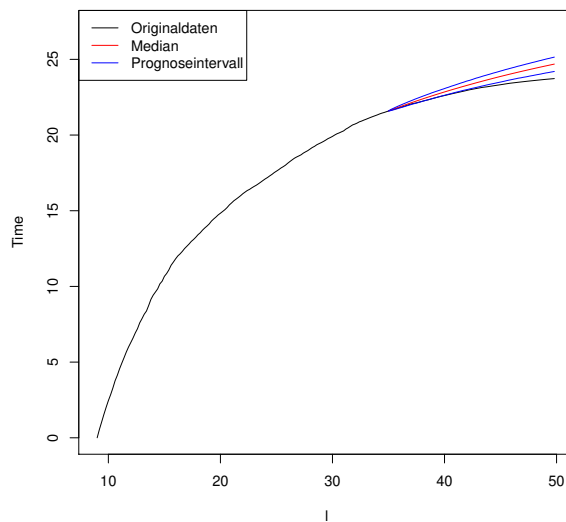


Abbildung 4.9: Prognose Datenreihe 1 mittels Tiefe-Test 2

Der geschätzte Median folgt in hohem Maße der Fortführung des Drifts und um diese Fortführung herum entwickelt sich durch den sehr glatten Verlauf der Originaldaten ein recht schmales Konfidenzband. Leider verfehlen beide Prognoseintervalle den tatsächlichen Wert, der Tiefe-Test 2 etwas mehr als der Tiefe-Test 1. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kurve für Risslängen größer als 35mm stärker abflacht, als es die Daten bis zur Risslänge 35mm vermuten lassen. Hier lässt sich auch gut erkennen, wie der Strafterm für die Verfehlung des tatsächlichen Wertes den Intervallscore in die Höhe treibt. Auch wenn dieser für den Tiefe-Test 1 höher liegt als beim RM-Test, scheint der Tiefe-Test 1 die besseren Ergebnisse zu liefern.

Inwieweit ein weniger glatter Verlauf zu anderen Ergebnissen führt, soll zunächst an Datenreihe 49 untersucht werden.

Als Startschätzungen für die Parametersuche erhält man hier $\theta_0 = 40.48$, $\theta_1 = 0.0014$ und $\theta_2 = 2.15$. Der sich daraus ergebende Untersuchungsbereich ist in Tabelle 4.7 dargestellt.

Parameter	Min	Max	Inkrement
θ_0	33.48	47.48	1
θ_1	0.00014	0.07029	0.00014
θ_2	0.215	4.299	0.215
σ	0.05	1	0.05

Tabelle 4.7: Untersuchungsbereich für Datenreihe 49

In diesem Bereich finden sich mittels des RM-Tests 616 verschiedene Kombinationen, die teilweise in Tabelle 4.8 dargestellt sind.

θ_0	θ_1	θ_2	σ
42.48	0.0390	1.07	0.20
46.48	0.0158	1.29	0.20
40.48	0.0017	2.15	0.20
...
33.48	0.0014	3.01	0.55
34.48	0.0003	3.44	0.60

Tabelle 4.8: Paramterkombinationen Datenreihe 49 RM-Test

Wie man sieht, führt die größere Schwankung in den Daten dazu, dass höhere Schätzwerte für σ erzielt werden.

Der Tiefe-Test 1 liefert sogar 1069 Kombinationen, der Tiefe-Test 2 überraschenderweise keine. Daher soll der Untersuchungsbereich noch einmal verfeinert werden auf:

Parameter	Min	Max	Inkrement
θ_0	Startwert-7	Startwert+7	1
θ_1	0.1·Startwert	50·Startwert	0.1·Startwert
θ_2	0.05·Startwert	2·Startwert	0.05·Startwert
σ	0.01	1	0.01

Tabelle 4.9: Verfeinerter Untersuchungsbereich

Auch die hiermit einhergehende Überprüfung von 30 Millionen Kombinationen erbringt keine Ergebnisse.

Die Prognose mit den Parametern aus dem RM-Test ist in Abbildung 4.10 zu sehen.

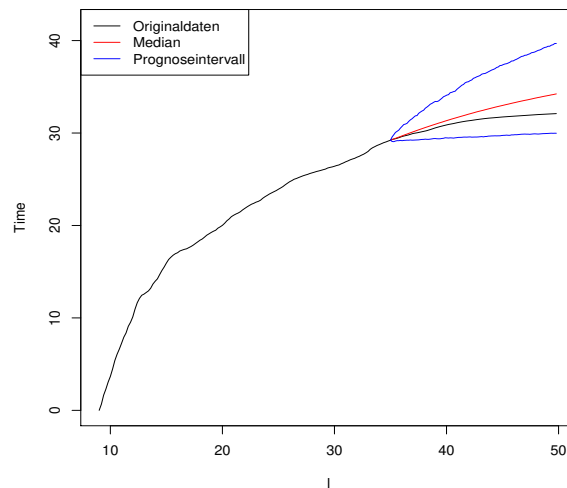


Abbildung 4.10: Prognose Datenreihe 49 mittels RM-Test

Es ergeben sich als Median 34.23 und als Prognoseintervall [29.97, 39.69]. Damit wurde der tatsächliche Wert von 32.10 auch hier überdeckt und es ergibt sich ein Intervall-Score von 9.71. Die höheren Schätzwerte von σ resultieren erwartungsgemäß in einem breiteren Prognoseintervall. In dieser Datenreihe lässt sich die Abflachung der Kurve für Risslängen größer als 40mm besonders gut erkennen.

Die Ergebnisse für den Tiefe-Test 1 sind in Abbildung 4.11 auf der nächsten Seite zu sehen.

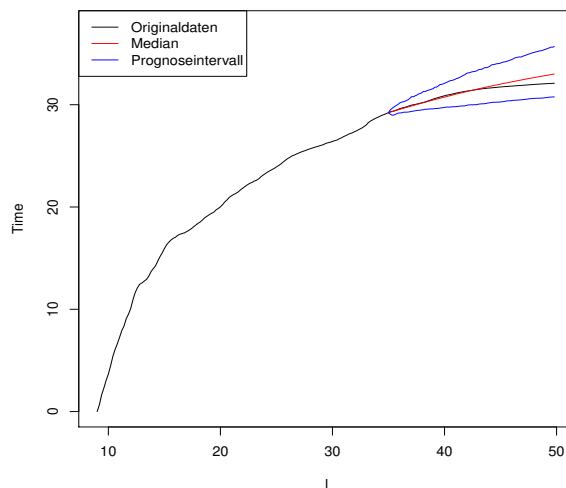


Abbildung 4.11: Prognose Datenreihe 49 mittels Tiefe-Test 1

Man erhält hier einen Median in Höhe von 33.00 und ein Prognoseintervall [30.75, 35.68]. Da der tatsächliche Wert von 32.10 damit vom Intervall überdeckt wird, beträgt der Intervall-Score 4.93. Auch hier führt die größere Schwankung in den Daten zu einem breiteren Prognoseintervall. Wie bei Datenreihe 1 liefert der Tiefe-Test 1 auch hier die besseren Resultate. Der tatsächliche Wert wird weniger stark überschätzt und das geschätzte Prognose-Intervall ist deutlich schmaler.

In der Folge sollen nun noch die auffälligen Datenreihen (32, 44, 47 und 57) näher untersucht werden, bevor zum Abschluss der Auswertung eine Auflistung aller Ergebnisse aus den 68 Datenreihen gegeben wird.

4.4 Auswertung auffälliger Datenreihen

In diesem Abschnitt sollen wie gesagt noch die vier Datenreihen näher untersucht werden, die im Vorfeld als auffällig eingestuft worden sind. Den Beginn macht Datenreihe 32, die in Abbildung 4.12 auf der nächsten Seite dargestellt ist.

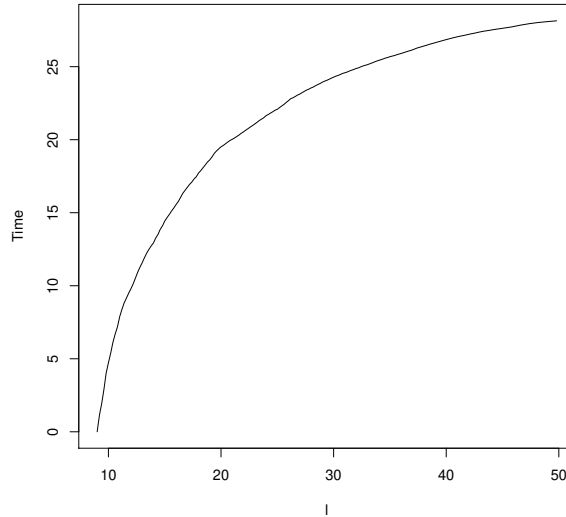


Abbildung 4.12: Datenreihe 32

Optisch lassen sich zunächst keine besonderen Auffälligkeiten feststellen, dennoch liegt mit einem Wert von 0.0042 die höchste Startschätzung für θ_1 vor (bei einem Median von 0.0006). Mit $\theta_0 = 33.3$ liegt dieser Wert in einem normalen Bereich, die Schätzung für θ_2 ergibt mit 1.95 das Minimum der geschätzten Werte. Diese Kombination ergibt sich wohl dadurch, dass die erste Zeitmessung (bei einer Risslänge von 9.2mm) mit 1.12 den insgesamt zweithöchsten Wert aufweist, während sich fast alle anderen Datenreihen hier im Bereich von 0.5 bis 0.9 bewegen. Der höchste Wert wird mit 1.51 bei Datenreihe 57 erreicht, die später noch genauer untersucht wird. Bei einer Risslänge von 35mm liegt mit 25.68 nur noch die sechsthöchste Zeit vor. Die Kurve steigt also zunächst recht steil an und flacht in der Folge etwas stärker ab.

Für den RM-Test ergeben sich dann 282 verschiedene Kombinationen:

θ_0	θ_1	θ_2	σ
29.3	0.0350	1.37	0.10
35.3	0.0011	2.35	0.10
...
28.3	0.0021	3.32	0.55
27.3	0.0138	2.54	0.60

Tabelle 4.10: Paramterkombinationen Datenreihe 32 RM-Test

Der Tiefe-Test 1 erzielt hier 82 Erfolge bei der Parametersuche, der Tiefe-Test 2 nur 7. Im Vergleich mit dem RM-Test liegen die gefundenen Schätzwerte für σ deutlich niedriger. Beim Tiefe-Test 1 wird als Höchstwert 0.25 erreicht, beim Tiefe-Test 2 sogar nur 0.15. Da die Datenreihe 32 ebenfalls recht glatt verläuft, ist dieses Ergebnis durchaus plausibel. Als Prognose erhält man dann mit den Parametern des RM-Tests:

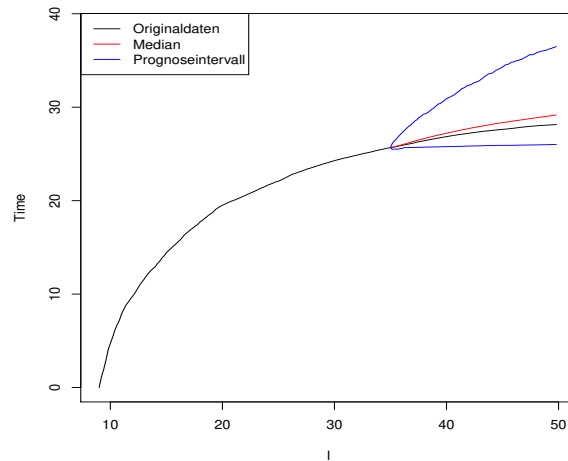


Abbildung 4.13: Prognose Datenreihe 32 mittels RM-Test

Als Median ergibt sich 29.16, als Prognoseintervall [26.01, 36.49]. Der tatsächliche Wert von 28.14 wird vom Prognoseintervall überdeckt, vom Median aber wieder leicht überschätzt. Der Intervallscore beträgt hier sogar 10.48.

Die Resultate der Tiefe-Tests sind in den beiden folgenden Abbildungen zu sehen.

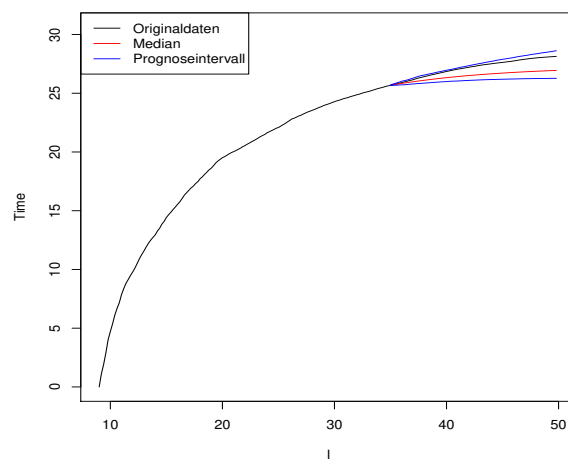


Abbildung 4.14: Prognose Datenreihe 32 mittels Tiefe-Test 1

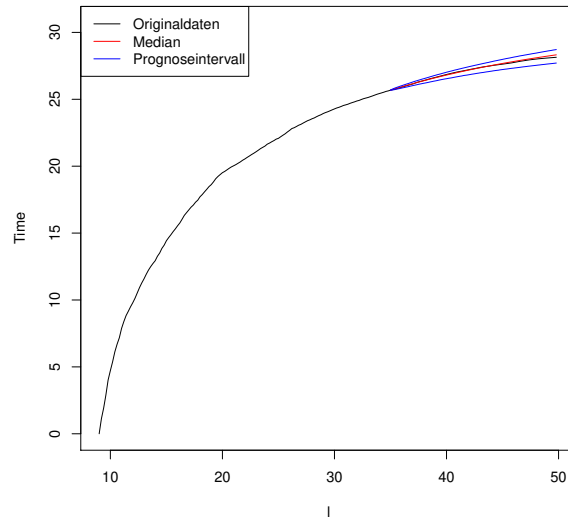


Abbildung 4.15: Prognose Datenreihe 32 mittels Tiefe-Test 2

Die detaillierten Ergebnisse finden sich in Tabelle 4.11:

	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	26.94	28.32
Prognose-Intervall	[26.27, 28.62]	[27.71, 28.72]
Breite PI	2.35	1.01
tatsächlicher Wert	28.14	28.14
Überdeckung	Ja	Ja
Score	2.35	1.01

Tabelle 4.11: Ergebnisse Tiefe-Tests

Der Tiefe-Test 2 erzielt hier also ein sehr gutes Ergebnis. Weiterhin fällt auf, dass der Tiefe-Test 1 den tatsächlichen Wert stärker unterschätzt, während die anderen Test den Wert überschätzen.

Datenreihe 44 ist in Abbildung 4.16 auf der nächsten Seite dargestellt.

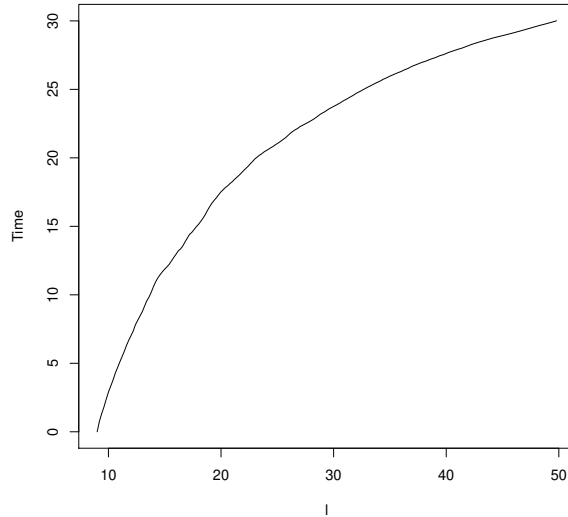


Abbildung 4.16: Datenreihe 44

Optisch ist diese Datenreihe auch eher unauffällig. Im Risslängenbereich von 15mm bis 20mm kann man aber von einer „leichten Delle“ in der Kurve sprechen. Als Startschätzungen ergeben sich hier $\theta_0 = 53.83, \theta_1 = 0.000014$ und $\theta_2 = 3.07$. Die Schätzungen für θ_0 und θ_2 sind dabei jeweils die zweithöchsten, während die Schätzung für θ_1 die zweitkleinste ist. Warum diese Konstellation zustande kommt, konnte aus den Daten nicht direkt abgeleitet werden.

Für den RM-Test ergeben sich dann 211 passende Kombinationen:

θ_0	θ_1	θ_2	σ
54.83	0.00037	2.15	0.10
46.83	0.00001	3.37	0.10
...
60.83	0.00026	2.15	0.15
46.83	0.000003	3.68	0.15

Tabelle 4.12: Paramterkombinationen Datenreihe 44 RM-Test

Es fällt auf, dass hier deutlich kleinere Schätzwerte für σ erzielt werden als in den zuvor untersuchten Datenreihen.

Für die beiden Tiefe-Tests finden sich hier 15 bzw. 17 passende Kombinationen und es ergeben sich insgesamt die folgenden Ergebnisse:

	RM-Test	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	31.23	30.18	30.19
Prognose-Intervall	[28.64, 33.28]	[29.78, 30.73]	[29.61, 30.93]
Breite PI	4.64	0.95	1.32
tatsächlicher Wert	30.01	30.01	30.01
Überdeckung	Ja	Ja	Ja
Score	4.64	0.95	1.32

Tabelle 4.13: Ergebnisse Reihe 44

Die grafische Darstellung soll hier nochmals für dem RM-Test und den Tiefe-Test 1 erfolgen.

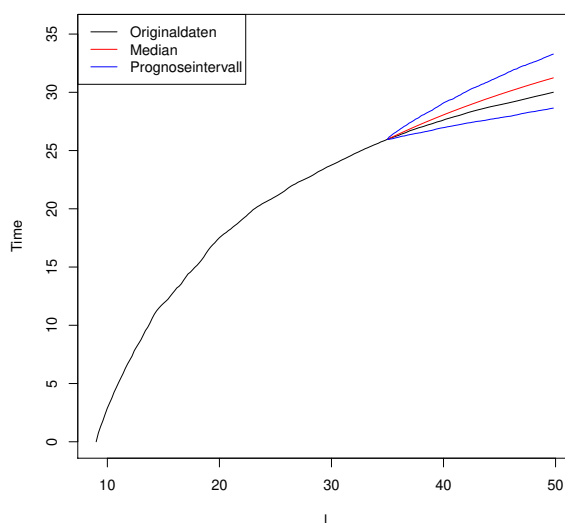


Abbildung 4.17: Prognose Datenreihe 44 mittels RM-Test

Der tatsächliche Wert wird abermals vom Prognoseintervall überdeckt, dieses fällt aufgrund der kleineren Schätzwerte für σ jedoch schmaler aus, als bei den bisherigen Datenreihen.

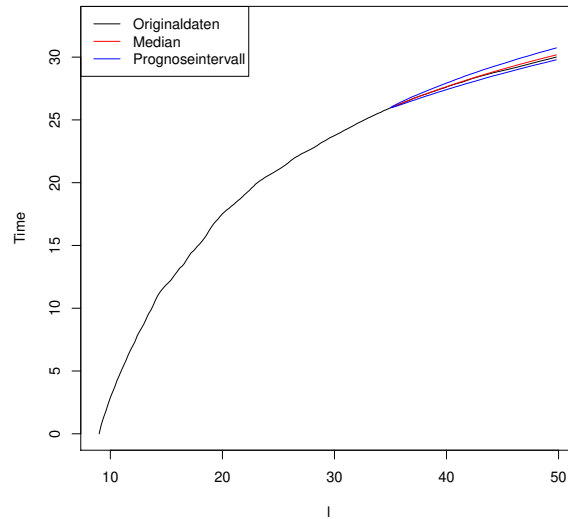


Abbildung 4.18: Prognose Datenreihe 44 mittels Tiefe-Test 1

Hier ergibt sich eine ziemlich gute Schätzung. Der Median folgt quasi durchgehend dem tatsächlichen Verlauf und das resultierende Prognose-Intervall hat eine sehr geringe Breite.

Datenreihe 47, zu sehen in der nachfolgenden Abbildung, ist optisch deutlich auffälliger, als die zuvor untersuchten Datenreihen.

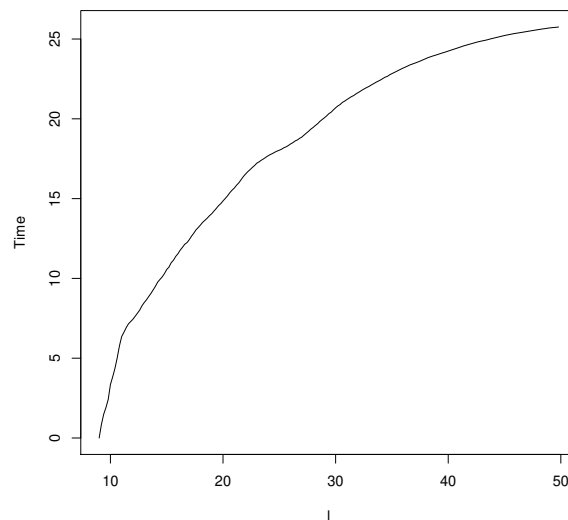


Abbildung 4.19: Datenreihe 47

Zunächst steigt die Kurve ziemlich steil an, um dann doch recht abrupt abzuknicken. Nach diesem Knick folgt ein gleichmäßiger Anstieg, bis bei einer Risslänge zwischen

25mm und 30mm eine deutlichere „Delle“ zu sehen ist.

Es ergibt sich dann auch eine sehr auffällige Kombination von Startparametern. θ_0 und θ_2 weisen mit Werten von 58.89 und 3.97 jeweils das Maximum auf, während θ_1 mit 0.00000022 den mit Abstand kleinsten Wert annimmt.

Der RM-Test findet dann 54 mögliche Parameterkombinationen, die abermals eher kleine Schätzwerte für σ aufweisen:

θ_0	θ_1	θ_2	σ
54.89	0.0000068	3.18	0.15
58.89	0.000000056	4.37	0.15
...
65.89	0.0000033	3.18	0.20
63.89	0.0000036	3.18	0.20

Tabelle 4.14: Parameterkombinationen Datenreihe 47 RM-Test

Die beiden Tiefe-Tests erzielen 228 bzw. 154 mögliche Kombinationen und man erhält im Gesamtergebnis:

	RM-Test	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	27.19	27.24	27.46
Prognose-Intervall	[25.79, 29.34]	[26.32, 28.39]	[26.59, 28.58]
Breite PI	3.55	2.07	1.99
tatsächlicher Wert	25.75	25.75	25.75
Überdeckung	Nein	Nein	Nein
Score	4.94	24.97	35.48

Tabelle 4.15: Ergebnisse Reihe 47

In diesem Fall verfehlt der RM-Test erstmals den tatsächlichen Wert. Allerdings wird hier ein vergleichsweise schmales Prognose-Intervall geschätzt und die Verfehlung fällt mit 0.04 auch denkbar knapp aus. Dies führt dann interessanterweise dazu, dass trotz Verfehlung ein kleinerer Score erzielt wird als in den bisher untersuchten

Datenreihen. Bei den Tiefe-Test liegt eine deutlichere Abweichung vom tatsächlichen Wert vor und damit auch ein entsprechend höherer Score.

Die grafischen Ergebnisse sollen hier nochmals für den RM-Test und den Tiefe-Test 2 abgebildet werden.

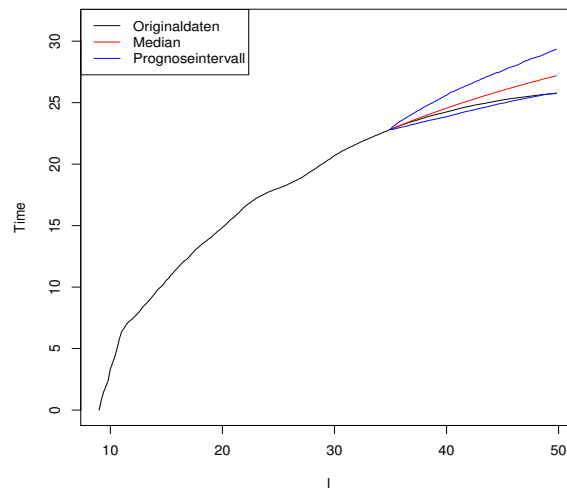


Abbildung 4.20: Prognose Datenreihe 47 mittels RM-Test

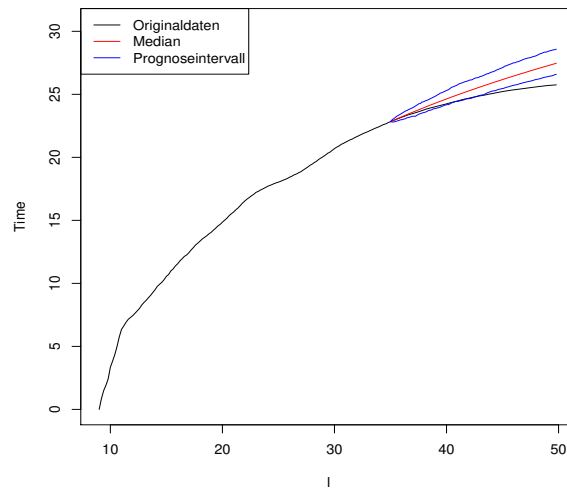


Abbildung 4.21: Prognose Datenreihe 47 mittels Tiefe-Test 2

Als letztes soll nun noch Datenreihe 57 untersucht werden, die in Abbildung 4.22 auf der nächsten Seite zu sehen ist.

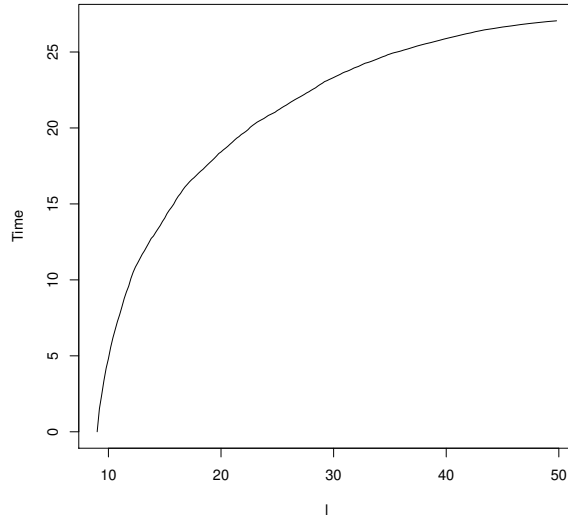


Abbildung 4.22: Datenreihe 57

Ähnlich wie zuvor in Datenreihe 32 sind auch hier keine optischen Auffälligkeiten festzustellen, man erhält aber eine zu Datenreihe 32 vergleichbare Parameterkombination. θ_0 weist mit 32.18 einen normalen Wert auf, während $\theta_1 = 0.0039$ den zweithöchsten Wert markiert und $\theta_2 = 1.98$ den zweitkleinsten. Die Erklärung dafür dürfte ebenfalls ähnlich ausfallen. Mit einem Wert von 1.51 wird hier die mit Abstand höchste Messung für den ersten Zeitpunkt erzielt, bevor in der Folge die Kurve stärker abflacht und man bei Risslänge 35mm nur noch den vierzehnthöchsten Wert erreicht.

Mit dem RM-Test ergeben sich dann 85 Kombinationen, die abermals hohe Schätzwerte für σ aufweisen:

θ_0	θ_1	θ_2	σ
26.18	0.1212	0.99	0.15
32.18	0.0009	2.58	0.15
...
27.18	0.0029	3.37	0.60
27.18	0.0019	3.77	0.65

Tabelle 4.16: Parameterkombinationen Datenreihe 57 RM-Test

Für den Tiefe-Test 1 erhält man 59 Kombinationen, die wie gewohnt kleinere Werte für σ erzielen. Der Tiefe-Test 2 findet abermals keine passende Kombination. Erst bei der Verfeinerung des Bereichs, die bereits bei Datenreihe 49 angewendet wurde (s. Seite 44) erhält man 8 passende Kombinationen. Es sei an dieser Stelle schon einmal vorweg genommen, dass sich für die Datenreihen 5, 21, 26, 27, 28, 37 und 42 ähnliche Situationen ergeben. Zumindestens für Datenreihe 5 finden sich bei Anwendung des verfeinerten Bereichs immerhin noch 29 Kombinationen.

Man erhält für Datenreihe 57 dann das folgende Ergebnis:

	RM-Test	Tiefe-Test 1	Tiefe-Test 2
Median	25.82	26.41	27.95
Prognose-Intervall	[25.20, 33.74]	[25.17, 27.85]	[27.75, 28.17]
Breite PI	8.54	2.68	0.42
tatsächlicher Wert	27.05	27.05	27.05
Überdeckung	Ja	Ja	Nein
Score	8.54	2.68	28.27

Tabelle 4.17: Ergebnisse Reihe 57

Der RM-Test und der Tiefe-Test 1 erzielen hier eine Überdeckung des tatsächlichen Wertes. Aufgrund des deutlich schmaleren Prognose-Intervalls weist der Tiefe-Test 1 den besseren Score auf. Der Tiefe-Test 2 schätzt hier aufgrund der geringen Menge an Parameterkombinationen, die zudem alle annähernd identisch sind, ein sehr schmales Prognose-Intervall und verfehlt den tatsächlichen Wert doch recht klar. Es fällt auf, dass der Tiefe-Test 2 den tatsächlichen Wert als einziger überschätzt, die beiden anderen Tests unterschätzen ihn.

Da sich die Ergebnisse der drei Tests doch etwas stärker voneinander unterscheiden, soll für die beiden Tiefe-Tests das grafische Ergebnis noch einmal dargestellt werden. Die zugehörigen Abbildungen finden sich auf der nächsten Seite.

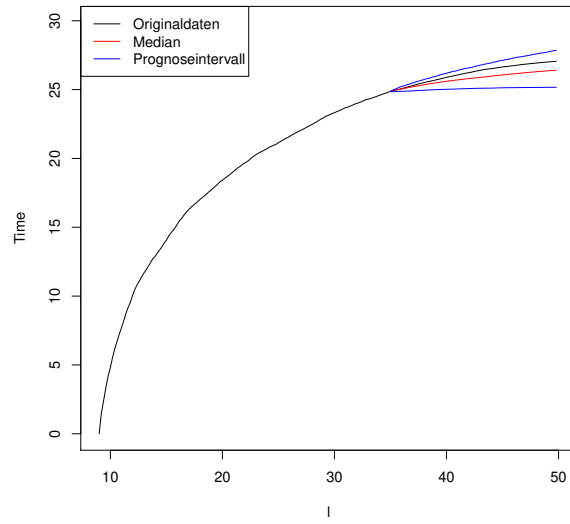


Abbildung 4.23: Prognose Datenreihe 57 mittels Tiefe-Test 1

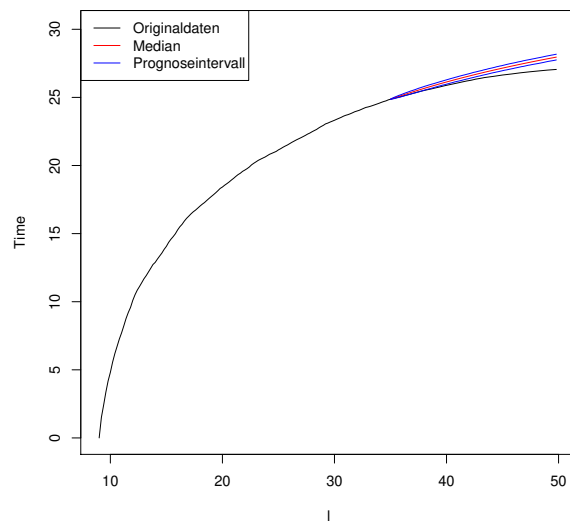


Abbildung 4.24: Prognose Datenreihe 57 mittels Tiefe-Test 2

4.5 Gesamtergebnisse

In diesem Abschnitt soll noch eine Zusammenfassung der gesammelten Ergebnisse erfolgen. Dazu werden die Ergebnisse für die drei verwendeten Tests getrennt betrachtet. Eine detaillierte Aufistung aller Ergebnisse findet sich im Anhang, hier wird das Hauptaugenmerk auf den ermittelten Scores liegen.

Betrachtet man sich diese einmal für den RM-Test fällt auf, dass sich die Scores alle im Bereich von vier bis elf bewegen.

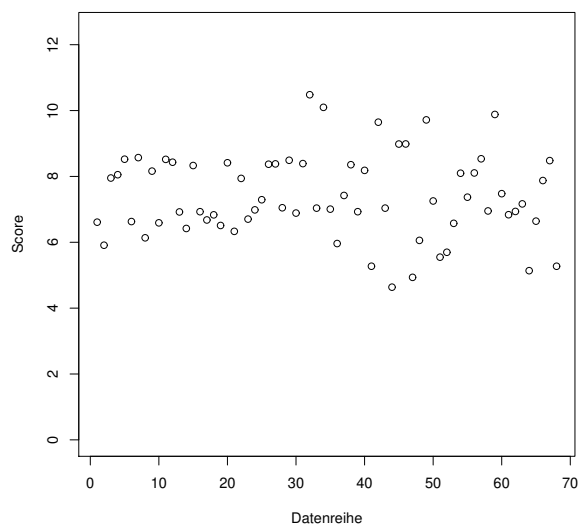


Abbildung 4.25: Scores des RM-Test

Das Minimum liegt bei 4.64, das Maximum bei 10.48. Es ergibt sich ein mittlerer Score von 7.4. In 67 von 68 Datenreihen wird eine Überdeckung des tatsächlichen Wertes erzielt, so dass sich die Scores hier fast ausschließlich durch die Breite des ermittelten Prognose-Intervalls bestimmen. Es werden also in allen Datenreihen sehr breite Intervalle geschätzt. Somit ist es auch nicht verwunderlich, dass die angestrebte Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 Prozent hier sogar übertroffen wurde. Im Gegenzug muss man leider sagen, dass die ermittelten Intervalle aufgrund ihrer Breite nur wenig Information enthalten. Etwas lockerer formuliert, hätte man diese Schätzungen auch abgeben können, ohne irgendetwas zu berechnen. Weiterhin scheint der RM-Test den tatsächlichen Wert für viele Datenreihen recht stark zu überschätzen. Die mittlere betragsmäßige Abweichung vom tatsächlichen Wert liegt hier bei 2.26.

Für den Tiefe-Test 1 ergibt sich bei den Scores ein gänzlich anderes Bild:

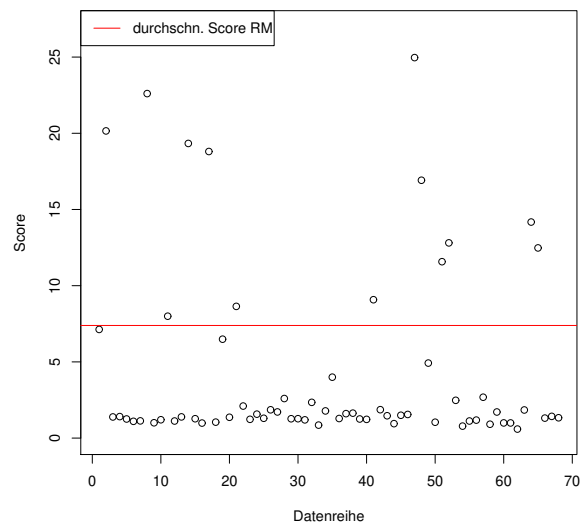


Abbildung 4.26: Scores des Tiefe-Test 1

Hier lässt sich eine ziemlich klare Unterscheidung fällen zwischen den Datenreihen, bei denen das Prognose-Intervall den tatsächlichen Wert überdeckt und denen, die keine Überdeckung erzielen. Für erstere erhält man aufgrund der geringen Breiten der Prognose-Intervalls entsprechend niedrige Scores im Bereich von 0.59 bis 4.92, 46 Werte liegen unterhalb von zwei. Diese fallen also deutlich niedriger aus als beim RM-Test. Für die anderen Reihen erhält man Scores bis zu einem Maximum von 24.96. Daraus ergibt sich ein durchschnittlicher Score von 4.32. Man liegt hier also ebenfalls deutlich niedriger als beim RM-Test. Auch wenn zehn Datenreihen hier einen Score erzielen, der höher ist als zehn, liegt im Schnitt nur eine Verfehlung von 0.27 vor. Die Höhe dieser Scores resultiert hier also hauptsächlich aus dem Strafterm und nicht aus der Breite der Prognose-Intervalle, die durchschnittlich nur bei 1.35 liegt. Weiterhin lässt sich sagen, dass die mittlere betragsmäßige Abweichung zwischen Median und tatsächlichem Wert hier nur 0.46 beträgt. Leider erzielt der Tiefe-Test 1 nur in 49 Fällen eine Überdeckung, was die sonstigen, sehr positiven Resultate schmälert. Woran diese Unterschreitung der angestrebten Überdeckungswahrscheinlichkeit liegen könnte, soll in der Zusammenfassung nochmals aufgegriffen werden.

Bevor die Scores aus dem Tiefe-Test 2 betrachtet werden, soll noch einmal erwähnt werden, dass dieser Test in sieben Fällen keine Schätzungen ermöglicht hat, da keine passenden Parameterkombinationen gefunden wurden. Somit liegen hier nur 61 Scores vor. Dieser Umstand soll ebenfalls in der Zusammenfassung näher beleuchtet werden. Die gefundenen Scores stellen sich nun wie folgt dar:

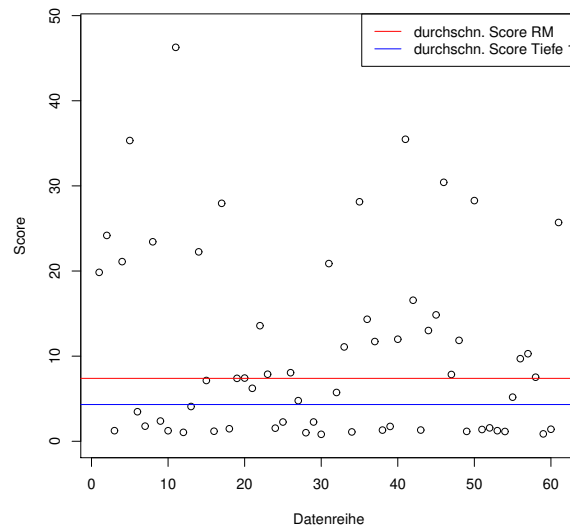


Abbildung 4.27: Scores des Tiefe-Test 1

Verglichen mit den anderen beiden Tests scheint hier ein ziemlich schlechtes Ergebnis vorzuliegen. Zum einen wird nur in 19 Datenreihen eine Überdeckung erzielt, zum anderen liegt die resultierende Verfehlung auch deutlich höher, als beim Tiefe-Test 1. Dies lässt sich direkt aus den Scores ablesen, die hier ein Maximum von 46.28 erreichen. Für die 19 Datenreihen, in denen der tatsächliche Wert überdeckt wird, liegt der Score aber ähnlich niedrig, wie beim Tiefe-Test 1. Insgesamt ergibt sich ein durchschnittlicher Score von 10.55, was nochmal deutlich höher ist, als beim RM-Test. Allerdings kann man sagen, dass die Breite des Prognose-Intervalls im Schnitt nur bei 1.13 liegt. Dies ist kleiner als beim Tiefe-Test 1. Auf der anderen Seite weist der Tiefe-Test 2 mit einer durchschnittlichen betragsmäßigen Abweichung zwischen Median und tatsächlichem Wert von 0.62 einen höheren Wert auf, als der Tiefe-Test 1.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Methoden vorgestellt, um stochastische Differentialgleichungen zu analysieren und die gewünschte Prognose für einen zukünftigen Wert abzugeben. Zum einen die Residuen-Momenten-Methode, zum anderen die k -Vorzeichen-Tiefe, hier mit den Ausprägungen $k=3$ und $k=4$. Um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, wurden nur die Daten bis zu einer Risslänge von 35mm verwendet, um daraus eine Prognose für den Wert bei Risslänge 49.8mm zu prognostizieren. Diese Prognose konnte dann mit dem tatsächlich erreichten Wert verglichen werden. Beide Methoden sind für die angedachten Analysen gut geeignet, jedoch ergaben sich für die vorliegenden Daten recht unterschiedliche Ergebnisse. Die Residuen-Momenten-Methode erzielte eine sehr gute Überdeckungsrate, schätzte für alle Datenreihen aber auch sehr breite Prognoseintervalle. Zudem ergab sich eine recht hohe Überschätzung der tatsächlichen Werte. Die 3-Vorzeichen-Tiefe schnitt zwar bei der Überdeckungswahrscheinlichkeit schlechter ab, erzielte aber in allen anderen Belangen (Breite der Prognoseintervalle, Abstand zwischen geschätztem Median und tatsächlichem Wert usw.) deutlich bessere Resultate und sollte in der Praxis bevorzugt angewendet werden. Die hiermit erzielten Prognoseintervalle sind bei Ansicht der Daten auch einfach plausibler als die des RM-Tests. Da dieser im Hinblick auf die drei Driftparameter deutlich mehr Kombinationen zulässt, als die k -Vorzeichen-Tiefe, ergeben sich höhere Schätzwerte für σ , was dann eine Volatilität unterstellt, die in den Daten nicht zu erkennen ist. Die 4-Vorzeichen-Tiefe erzielte die geringste Überdeckungswahrscheinlichkeit und erbrachte gemessen an den sich ergebenden Scores das schlechteste Ergebnis. Zudem wurden in sieben Fällen gar keine Ergebnisse erzielt, da keine passenden Parameterkombinationen gefunden wurden.

Allerdings ergaben sich hier die schmalsten Prognoseintervalle. Mit einer höheren Überdeckungsrate, wären hier also gute Ergebnisse erzielt worden. Dass für einige Datenreihen keine passenden Kombinationen gefunden wurden mag daran gelegen haben, dass das gewählte Gitter immer noch nicht fein genug war. Für zwei weitere Datenreihen wurden auch erst nach Verfeinerung des Gitters Kombinationen gefunden. Allerdings führt eine Verfeinerung des Gitters auch immer zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand.

Es bleibt also vorrangig die Frage zu klären, warum die k-Vorzeichen-Tiefe die angestrebte Überdeckungswahrscheinlichkeit nicht einhalten konnte. Aufgrund der schmalen Konfidenzintervalle, die sich hier ergaben, ist es für die schlussendliche Überdeckung relevant, wie stark die weiteren Daten dem geschätzten Drift folgen. Für einige Datenreihe, wie z.B. 1 und 49, flacht die Kurve für Risslängen größer als 35mm recht stark ab, so dass der tatsächliche Wert dann häufig unterhalb des Prognoseintervalls liegt. Weiterhin ist es gut möglich, dass der gewählte Untersuchungsbereich nicht den gesamten in Frage kommenden Bereich für τ überdeckt hat. Für θ_0 wurde ein Intervall von ± 7 um den Startparameter herum gewählt, da dieses für alle Datenreihen Resultate erzielte. Ein breiteres Fenster führte bei einigen Datenreihen zu Problemen in der Auswertung. Die obigen Analysen ließen sich also wiederholen, allerdings könnte dann für jede Datenreihe einzeln geprüft werden, inwieweit sich dieses Fenster verbreitern ließe. Somit wurden möglicherweise einige Kombinationen übersehen, die am Ende zu breiteren Prognoseintervallen geführt hätten. Da insbesondere die 3-Vorzeichen-Tiefe den tatsächlichen Wert im Schnitt nur um 0.27 verfehlt hat, würde eine geringe Verbreiterung der Intervalle die Überdeckungswahrscheinlichkeit schon deutlich erhöhen. Ähnliches gilt für die 4-Vorzeichen-Tiefe, bei der die durchschnittliche Verfehlung aber etwas höher lag. Eine weitere mögliche Erklärung könnte darin liegen, dass die Proportionalitäts-Annahme zwischen Drift und Diffusion etwas zu restriktiv ist. Es könnte sein, dass eine Annahme wie z.B. $\text{Diffusion} = \sigma_1 \cdot \text{Drift}^{\sigma_2}$ zutreffender ist. In dieser Arbeit wurde also durchgängig mit $\sigma_2 = 1$ gearbeitet. Auch wenn die Hinzunahme eines weiteren Parameters den nötigen Rechenaufwand deutlich erhöht, könnte es lohnend sein, diesen Ansatz in einer weiteren Arbeit näher zu untersuchen. Führt man für die Startparameter aus Datenreihe 1 einen kleinen Vorabtest durch, um Startwerte für σ_1 und σ_2 zu erhalten, ergeben sich für σ_2 Werte zwischen 0.1 und 1.3.

Anhang A

Aufistung der Ergebnisse

	gefParRM	tatWertRM	MedianRM	KJuGRM	KJoGRM	BreiteKIRM	ScoreRM
1	440	23.73	26.76	22.46	29.07	6.61	6.61
2	327	24.26	26.64	23.6	29.51	5.91	5.91
3	852	23.6	25.72	21.54	29.49	7.95	7.95
4	431	25.08	28.15	23.53	31.58	8.05	8.05
5	430	25.68	28.26	24.2	32.72	8.52	8.52
6	406	24.5	27.04	22.96	29.59	6.63	6.63
7	500	24.86	27.09	23.14	31.71	8.57	8.57
8	198	23.67	26.21	23.04	29.17	6.14	6.14
9	1019	23.78	26.85	22.43	30.59	8.16	8.16
10	430	25.17	27.62	23.8	30.39	6.59	6.59
11	425	25.77	28.94	24.44	32.96	8.52	8.52
12	423	24.11	27.38	22.33	30.76	8.43	8.43
13	477	23.44	25.41	21.82	28.74	6.92	6.92
14	451	24.15	26.80	23.43	29.85	6.42	6.42
15	520	22.28	24.60	20.72	29.05	8.33	8.33
16	407	25.72	28.46	24.08	31.01	6.93	6.93
17	298	24.84	28.00	24.01	30.68	6.68	6.68
18	591	25.33	28.16	24.16	30.99	6.83	6.83
19	416	24.61	27.56	23.51	30.02	6.51	6.51
20	566	25.74	28.32	23.83	32.25	8.41	8.41
21	130	26.05	26.97	24.88	31.21	6.33	6.33
22	509	26.16	28.45	23.89	31.83	7.94	7.94
23	306	24.45	25.83	22.59	29.3	6.7	6.7
24	447	26.78	29.93	25.53	32.52	6.98	6.98
25	355	27.01	28.31	24.73	32.02	7.29	7.29
26	486	26.64	28.58	24.56	32.93	8.37	8.37
27	808	26.38	27.99	24.34	32.72	8.38	8.38
28	255	26.33	27.15	24.77	31.82	7.05	7.05
29	397	26.65	29.36	24.97	33.46	8.49	8.49
30	419	26.35	28.95	25.12	32.01	6.89	6.89
31	517	25.04	27.10	23.23	31.62	8.39	8.39
32	282	28.14	29.17	26.01	36.49	10.48	10.48
33	164	25.19	26.74	23.74	30.78	7.04	7.04
34	533	26.24	29.29	24.46	34.56	10.1	10.1
35	492	27.7	30.83	26.79	33.8	7.01	7.01
36	215	27.39	29.14	25.8	31.76	5.96	5.96
37	408	29.3	31.73	27.48	34.9	7.42	7.42

Abbildung A.1: Ergebnisse RM-Test, Datenreihen 1-37

38	351	24.77	27.12	22.94	31.3	8.36	8.36
39	399	24.69	27.00	23.16	30.09	6.93	6.93
40	589	25.36	27.83	23.75	31.93	8.18	8.18
41	189	23.83	25.75	22.92	28.19	5.27	5.27
42	651	25.15	27.75	23.17	32.82	9.65	9.65
43	382	26.53	28.99	25.07	32.11	7.04	7.04
44	211	30.01	31.24	28.64	33.28	4.64	4.64
45	690	28.5	30.46	26.08	35.06	8.98	8.98
46	609	30.91	33.00	28.21	37.19	8.99	8.99
47	54	25.75	27.19	25.79	29.34	3.56	4.94
48	226	29.57	32.14	28.88	34.94	6.06	6.06
49	616	32.1	34.23	29.97	39.69	9.72	9.72
50	378	26.06	28.76	24.72	31.97	7.25	7.25
51	315	24.89	26.99	24.17	29.72	5.55	5.55
52	324	25.12	27.23	24.36	30.05	5.7	5.7
53	349	24.72	26.92	23.51	30.09	6.58	6.58
54	449	24.39	26.63	22.7	30.8	8.1	8.1
55	361	26.22	28.96	24.65	32.02	7.37	7.37
56	801	25.81	28.58	24.13	32.24	8.11	8.11
57	85	27.05	25.83	25.2	33.74	8.54	8.54
58	391	24.73	27.33	23.41	30.37	6.95	6.95
59	527	25.56	26.87	23.54	33.42	9.88	9.88
60	584	27.14	29.95	25.56	33.03	7.48	7.48
61	367	27.06	29.62	25.65	32.49	6.84	6.84
62	396	23.95	26.46	22.49	29.42	6.94	6.94
63	478	23.91	25.5	22.2	29.36	7.17	7.17
64	213	23.38	25.45	22.71	27.85	5.14	5.14
65	271	26.67	29.56	25.57	32.21	6.64	6.64
66	318	24.81	26.27	22.82	30.69	7.87	7.87
67	533	25.12	27.17	23.28	31.76	8.48	8.48
68	209	22.85	24.19	21.57	26.84	5.27	5.27

Abbildung A.2: Ergebnisse RM-Test, Datenreihen 38-68

	gefParD3	tatWertD3	MedianD3	KIuGD3	KIoGD3	BreiteKID3	ScoreD3
1	29	23.73	24.37	23.88	24.92	1.03	7.13
2	26	24.26	25.09	24.74	25.55	0.81	20.15
3	42	23.6	23.04	22.67	24.06	1.39	1.39
4	43	25.08	25.27	24.65	26.06	1.41	1.41
5	42	25.68	26.2	25.61	26.86	1.25	1.25
6	22	24.5	24.72	24.25	25.35	1.1	1.1
7	65	24.86	24.93	24.45	25.58	1.13	1.13
8	9	23.67	24.46	24.22	24.82	0.61	22.6
9	22	23.78	24.19	23.74	24.75	1.01	1.01
10	38	25.17	25.31	24.84	26.04	1.2	1.2
11	28	25.77	26.36	25.95	26.82	0.87	8
12	26	24.11	24.24	23.7	24.82	1.12	1.12
13	67	23.44	23.67	23.07	24.46	1.39	1.39
14	29	24.15	24.96	24.61	25.45	0.84	19.33
15	60	22.28	22.19	21.81	23.08	1.27	1.27
16	25	25.72	25.81	25.41	26.39	0.99	0.99
17	10	24.84	25.66	25.29	26.09	0.8	18.8
18	38	25.33	25.79	25.33	26.38	1.05	1.05
19	16	24.61	25.13	24.74	25.95	1.21	6.49
20	61	25.74	25.74	25.13	26.5	1.37	1.37
21	37	26.05	26.62	26.24	27.11	0.87	8.64
22	96	26.16	25.6	24.73	26.84	2.1	2.1
23	55	24.45	24.62	23.99	25.22	1.23	1.23
24	20	26.78	27.22	26.8	27.77	0.97	1.57
25	83	27.01	26.77	26.24	27.54	1.3	1.3
26	101	26.64	26.52	25.8	27.65	1.86	1.86
27	153	26.38	26.21	25.53	27.25	1.72	1.72
28	274	26.33	27.39	26.08	28.68	2.6	2.6
29	27	26.65	26.73	26.25	27.52	1.27	1.27
30	47	26.35	26.82	26.36	27.48	1.12	1.27
31	44	25.04	24.96	24.68	25.88	1.2	1.2
32	82	28.14	26.94	26.27	28.62	2.35	2.35
33	27	25.19	25.33	25.06	25.91	0.85	0.85
34	43	26.24	25.37	24.92	26.7	1.78	1.78
35	72	27.7	28.57	27.76	29.46	1.7	4
36	61	27.39	27.79	27.2	28.48	1.28	1.28
37	68	29.3	29.65	29.04	30.64	1.6	1.6

Abbildung A.3: Ergebnisse Tiefe-Test 1, Datenreihen 1-37

38	61	24.77	24.84	24.28	25.91	1.64	1.64
39	55	24.69	24.85	24.28	25.54	1.25	1.25
40	47	25.36	25.55	25.09	26.32	1.23	1.23
41	66	23.83	24.58	24.03	25.19	1.16	9.08
42	89	25.15	24.35	23.65	25.51	1.86	1.86
43	79	26.53	27.02	26.39	27.86	1.47	1.47
44	15	30.01	30.18	29.79	30.73	0.95	0.95
45	52	28.5	27.85	27.18	28.68	1.5	1.5
46	63	30.91	30.19	29.57	31.12	1.55	1.55
47	228	25.75	27.24	26.32	28.39	2.06	24.96
48	56	29.57	30.61	29.96	31.3	1.34	16.92
49	1069	32.1	33.00	30.76	35.68	4.92	4.92
50	43	26.06	26.45	25.98	27.03	1.04	1.04
51	24	24.89	25.53	25.16	26.00	0.84	11.57
52	48	25.12	25.9	25.42	26.52	1.1	12.81
53	76	24.72	25.36	24.75	26.03	1.27	2.48
54	29	24.39	24.39	24.12	24.9	0.79	0.79
55	49	26.22	26.68	26.14	27.26	1.12	1.12
56	32	25.81	25.91	25.42	26.6	1.18	1.18
57	59	27.05	26.41	25.17	27.85	2.68	2.68
58	21	24.73	25.07	24.63	25.54	0.91	0.91
59	75	25.56	25.1	24.56	26.28	1.71	1.71
60	30	27.14	27.33	26.96	27.95	0.99	0.99
61	48	27.06	27.38	26.87	27.86	0.99	0.99
62	4	23.95	24.19	23.74	24.34	0.59	0.59
63	73	23.91	24.02	23.31	25.15	1.84	1.84
64	32	23.38	24.06	23.72	24.5	0.78	14.18
65	40	26.67	27.4	26.95	28.19	1.23	12.48
66	51	24.81	24.38	23.86	25.18	1.31	1.31
67	56	25.12	25.07	24.53	25.95	1.43	1.43
68	83	22.85	23.38	22.71	24.04	1.33	1.33

Abbildung A.4: Ergebnisse Tiefe-Test 1, Datenreihen 38-68

	gefParD4	tatWertD4	MedianD4	KIuGD4	KIoGD4	BreiteKI4D4	ScoreD4
1	13	23.73	24.69	24.2	25.15	0.95	19.84
2	99	24.26	25.58	24.82	26.46	1.63	24.18
3	15	23.6	23.71	22.99	24.23	1.25	1.25
4	2	25.08	25.81	25.6	26.07	0.48	21.1
5	29	25.68	26.8	26.54	27.36	0.83	35.33
6	71	24.5	25.05	24.55	25.93	1.38	3.47
7	82	24.86	25.33	24.76	26.53	1.78	1.78
8	13	23.67	24.58	24.23	25.05	0.82	23.43
9	97	23.78	24.58	23.8	25.49	1.69	2.38
10	36	25.17	25.29	24.81	26.04	1.24	1.24
11	2	25.77	27.23	26.91	27.57	0.66	46.28
12	22	24.11	24.46	24.11	25.16	1.05	1.05
13	41	23.44	23.95	23.52	24.54	1.02	4.08
14	49	24.15	25.3	24.67	26.01	1.34	22.25
15	14	22.28	22.77	22.43	23.5	1.07	7.14
16	33	25.72	26.01	25.53	26.71	1.18	1.18
17	41	24.84	25.95	25.51	26.54	1.03	27.95
18	70	25.33	25.94	25.18	26.66	1.47	1.47
19	13	24.61	25.06	24.76	25.94	1.18	7.39
20	2	25.74	26.2	25.9	26.94	1.04	7.42
21	0	26.05	0	0	0	0	0
22	3	26.16	25.78	25.32	26.02	0.71	6.22
23	3	24.45	25.02	24.76	25.67	0.91	13.58
24	6	26.78	27.2	26.96	27.77	0.81	7.87
25	74	27.01	27.3	26.59	28.13	1.54	1.54
26	0	26.64	0	0	0	0	0
27	0	26.38	0	0	0	0	0
28	0	26.33	0	0	0	0	0
29	17	26.65	27.12	26.67	27.97	1.3	2.26
30	147	26.35	27.46	26.5	28.69	2.19	8.06
31	9	25.04	25.58	25.13	26.39	1.26	4.77
32	7	28.14	28.32	27.71	28.72	1.01	1.01
33	15	25.19	25.55	25.22	26.11	0.89	2.27
34	2	26.24	26.36	26.25	26.45	0.2	0.82
35	17	27.7	28.86	28.18	29.97	1.79	20.87
36	60	27.39	28.03	27.5	28.79	1.29	5.73
37	0	29.3	0	0	0	0	0

Abbildung A.5: Ergebnisse Tiefe-Test 2, Datenreihen 1-37

38	4	24.77	25.33	25.02	25.83	0.81	11.08
39	59	24.69	25.02	24.6	25.7	1.1	1.1
40	1	25.36	26.19	26.06	26.32	0.26	28.14
41	51	23.83	24.65	24.16	25.29	1.13	14.33
42	0	25.15	0	0	0	0	0
43	81	26.53	27.31	26.79	28.28	1.49	11.72
44	17	30.01	30.19	29.61	30.93	1.31	1.31
45	38	28.5	28.05	27.34	29.08	1.74	1.74
46	4	30.91	30.47	30.32	30.61	0.29	11.99
47	154	25.75	27.46	26.59	28.58	1.99	35.48
48	60	29.57	30.66	29.95	31.53	1.58	16.57
49	0	32.1	0	0	0	0	0
50	20	26.06	26.58	25.98	27.3	1.32	1.32
51	31	24.89	25.75	25.19	26.45	1.26	13.01
52	21	25.12	25.84	25.47	26.43	0.96	14.85
53	11	24.72	25.84	25.46	26.19	0.72	30.42
54	8	24.39	24.79	24.57	25.19	0.62	7.84
55	49	26.22	26.9	26.48	27.77	1.29	11.85
56	40	25.81	25.96	25.44	26.6	1.16	1.16
57	8	27.05	27.96	27.75	28.17	0.42	28.27
58	42	24.73	25.25	24.65	26.03	1.38	1.38
59	38	25.56	25.76	25.22	26.79	1.58	1.58
60	59	27.14	27.61	27.04	28.29	1.24	1.24
61	48	27.06	27.43	26.87	28.02	1.15	1.15
62	9	23.95	24.22	24.06	24.63	0.56	5.18
63	5	23.91	24.46	24.13	25.13	1	9.7
64	40	23.38	24.17	23.61	24.68	1.06	10.28
65	45	26.67	27.44	26.83	28.3	1.47	7.53
66	14	24.81	24.8	24.35	25.22	0.87	0.87
67	45	25.12	25.52	25	26.42	1.42	1.42
68	16	22.85	23.78	23.47	24.18	0.71	25.7

Abbildung A.6: Ergebnisse Tiefe-Test 2, Datenreihen 38-68

Anhang B

Literaturverzeichnis

Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*. 1. Auflage, Springer, New York.

Grüne, L. und Junge, O. (2009). *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 1. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Hartung, J., Elpelt, B. und Klösener, K.H. (2009). *Statistik*. 15. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.

Kustoscz, Ch.P., Leucht, A. and Müller, Ch.H. (2016). *Tests based on simplicial depth for AR(1) models with explosion*. *Journal of Time Series Analysis* 37, 763-784.

Kustoscz, Ch.P., Müller, Ch.H. and Wendler, M. (2016). *Simplified simplicial depth for regression and autoregressive growth processes*. *Journal of Statistical Planning and Inference* 173, 125-146.

Leckey, K., Malcherczyk, D. und Müller, Ch.H. (2020). *Powerful generalized sign tests based on sign depth*. TU Dortmund, SFB 823, Discussion Paper 12/20.

Malcherczyk, D., Leckey, K. und Müller, Ch.H. (2020). *K-sign depth: From asymptotics to efficient implementation*. TU Dortmund, SFB 823, Discussion Paper 14/20.

Virkler, D.A., Hillberry, B.M. and Goel, P.K. (1979). *The Statistical Nature of Fatigue Crack Propagation*. Journal of Engineering Materials and Technology 101, S. 148-153.

Gneiting, T., Raftery, A.E. (2007). *Strictly Proper Scoring Rules, Prediction and Estimation*. Journal of the American Statistical Association. S. 359-378.

Srajbr, C. (2016). *Induktionsthermografie zur automatisierten Rissprüfung von Flugzeugstrukturen aus Aluminium*. ZfP-Zeitung 149. S. 44-48.

R 4.0.3 (R Core Team (2020)). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>)

Melanie Horn (2020). GSignTest: Robust Tests for Regression-Parameters via Sign Depth. R package version 1.0.5. <https://github.com/melaniehorn/GSignTest>