Bachelorarbeit

OC-Funktion bei stetigen Lebensdauerverteilungen am Beispiel der Exponentialverteilung und der Log-Normalverteilung

Ole-Kristian Wirtz

Februar 2014

Gutachterin: Prof. Dr. Christine Müller

Fakultät Statistik
Lehrstuhl Statistik mit Anwendungen im Bereich der Ingenieurwissenschaften
Technische Universität Dortmund

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **III**

Tabellenverzeichnis **V**

1 Einleitung **1**

2 Qualitätskontrolle und Zuverlässigkeit **3**

2.1 Qualität 3

2.2 Qualitätsschwankungen 4

2.3 Statistische Qualitätssicherung 5

2.4 Zuverlässigkeit 7

3 Theorie **9**

3.1 Definitionen 9

3.1.1 Wichtige Funktionen und Verteilungen 9

3.1.2 Statistische Testtheorie 19

3.2 Zählende Abnahmeprüfungen 25

3.2.1 Exponentialverteilung 26

3.2.2 Log-Normalverteilung 27

3.3 Messende Abnahmeprüfungen 28

3.3.1 Exponentialverteilung 28

3.3.2 Log-Normalverteilung 30

4 Ablauf der Simulationsstudie **33**

4.1 Simulation exponentialverteilter Lebensdauern 33

4.2 Simulation der logarithmisch normalverteilten Lebensdauern 34

5 Auswertung der Simulationsstudie **37**

5.1 Abnahmeprüfungen bei vorliegender Exponentialverteilung 37

5.2 Abnahmeprüfungen bei vorliegender logarithmischer Normalverteilung 40

5.3 Zusammengefasste Auswirkungen 44
5.4 Vergleich von zählender und messender Abnahmeprüfung 46

6 Zusammenfassung **49**

A Anhang **51**

Literaturverzeichnis **57**

Abbildungsverzeichnis

5.1 OC_λ mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ und $\alpha = 0.05$ 38
5.2 OC_p mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ und $\alpha = 0.05$ 38
5.3 OC_λ mit $p_0 = 0.5$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$ 39
5.4 OC_p mit $p_0 = 0.5$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$ 39
5.5 OC_λ mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$ 39
5.6 OC_p mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$ 39
5.7 OC_λ mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $p_0 = 0.5$ 40
5.8 OC_p mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $p_0 = 0.5$ 40
5.9 OC_μ mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $p_0 = 0.5$ . . 41
5.10 OC_p mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $p_0 = 0.5$ . . 41
5.11 OC_μ mit $p_0 = 0.50$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 41
5.12 OC_p mit $p_0 = 0.50$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 41
5.13 OC_μ mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$ . . 42
5.14 OC_p mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$ . . 42
5.15 OC_μ mit $p_0 = 0.5$, $\sigma^2 = 0.0392$, $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$ . . 43
5.16 OC_p mit $p_0 = 0.5$, $\sigma^2 = 0.0392$, $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$ . . 43
5.17 OC_μ mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 44
5.18 OC_p mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 44
5.19 OC_μ mit $p_0 = 0.10$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 44
5.20 OC_p mit $p_0 = 0.10$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$ 44
5.21 Operationscharakteristik der messenden und zählenden Prüfung im Vergleich 47
5.22 Vergleich der Operationscharakteristiken von messender und zählender Abnahmeprüfung 47

Tabellenverzeichnis

2.1 Qualitätsinteressen (nach Timischl 2002 und Rinne/Mittag 1995) . . 4

3.1 Fehlerarten beim Testen 20

5.1 Auswirkungen der unterschiedlichen Parameter auf die Operationscharakteristiken 45

Kapitel 1

Einleitung

In vielen Bereichen der Industrie ist es notwendig, bestimmte Waren oder Produkte von Zulieferern zu beziehen. Das Unternehmen Apple hat weltweit über 200 verschiedene Zulieferer für die Komponenten seiner Produkte[1]. Da die Marke Apple in der ganzen Welt für ein gewisses Prestige steht, ist es gezwungen, dieses Prestige zu verteidigen und weiter zu verbessern. Dazu gehört auch die Qualität und Zuverlässigkeit der eigenen Produkte zu gewährleisten. Also müssen auch die Zulieferer der Komponenten für die Apple-Produkte den selben Standard besitzen wie die Endprodukte von Apple.

Die Qualität der Komponenten von Zulieferern wird in Form von Abnahmeprüfungen kontrolliert. Handelt es sich um Abnahmeprüfungen, in denen überprüft wird, wie lange Produkte funktionieren bis sie defekt sind, werden diese Zuverlässigkeitsprüfungen genannt. Eine Zuverlässigkeitsprüfung ist nichts anderes als die Durchführung eines statistischen Tests. Für Abnahmeprüfungen lassen sich Operationscharakteristiken bestimmen, die die Wahrscheinlichkeit angeben, dass die Ware unter bestimmten Bedingungen der geforderten Qualität entspricht.

Diese Bachelorarbeit behandelt eine Simulationsstudie von Operationscharakteristiken, bei denen Lebensdauern von Produkten untersucht werden. Diese Lebensdauern sollen zum einen einer Exponentialverteilung und zum anderen einer logarithmischen Normalverteilung folgen.

In Kapitel 2 werden die Begriffe Qualität und Zuverlässigkeit definiert und erklärt, wie es innerhalb einer Produktion zu Qualitätsschwankungen kommt. Des Weiteren wird der Unterschied zwischen zählenden und messenden Abnahmeprüfungen erklärt. Die Exponential- und die Log-Normalverteilung werden mit anderen spezifischen Verteilungen in Kapitel 3.1 vorgestellt. Es folgen die Herleitungen zu zählender

[1] http://www.apple.com/de/supplierresponsibility/

und messender Abnahmeprüfung der interessierenden Verteilungen. Der Ablauf der Simulationsstudie wird in Kapitel 4 dargestellt. In Kapitel 5 werden die Simulationen ausgewertet und verschiedene Auswirkungen von Parametereinstellungen aufgezeigt. Die Bachelorarbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung.

Kapitel 2

Qualitätskontrolle und Zuverlässigkeit

2.1 Qualität

Unternehmen müssen heutzutage darauf sicherstellen, dass ihre Produkte und Dienstleistungen mindestens die technische Qualität besitzen, die von den Kunden im Rahmen der geplanten Preise erwartet wird. Inzwischen werden auch Kundenbetreuung und Serviceleistungen beim Kauf von Qualitätsprodukten vorausgesetzt, so dass sich die Bedeutung vom Begriff der Qualität gewandelt hat. Ein Produkt muss Qualitätsansprüchen von verschiedenen Interessengruppen vereinigen. In der Tabelle 2.1 sind Anforderungen an ein Produkt von unterschiedlichen Parteien gelistet. Die Herstellerinteressen beziehen sich auf den erfolgreichen Einsatz des Produktes am Markt und dem daraus resultierendem Wohl der eigenen Firma. Öffentliche Interessen werden stark von der jeweiligen Gesellschaft beeinflusst und bestimmt. Eine entwickelte und klimabewusste Gesellschaft sollte dafür stehen, dass Ressourcen der Welt nicht verschwendet und Produkte möglichst aus wiederverwertbaren Materialien hergestellt werden. Eine Gesellschaft in einem Entwicklungsstaat ist an einem wirtschaftlichem Aufschwung des Landes interessiert und knüpft diesen Wunsch an den Erfolg eines Produktes. Der Kunde hingegen erwartet ein gutes Preis-Leistungs-Verhältnis und vertraut darauf, bei Problemen schnell beraten zu werden.

Kundeninteresse	Öffentliche Interessen	Herstellerinteressen
Gebrauchstauglichkeit	Schonung der Umwelt	Markterfolg des Produkts
Zuverlässigkeit	Leichte Entsorgung	Wirtschaftlichkeit
Servicefreundlichkeit	Soziale Akzeptanz	Fehlerfreie Prozesse
Design		Hoher Gewinn
Niedriger Preis		Gutes Firmenimage

Tabelle 2.1: Qualitätsinteressen (nach Timischl 2002 und Rinne/Mittag 1995)

Die Normenreihe DIN EN ISO 9000 ff. dient zur internationalen Festsetzung von Regeln im Qualitätsmanagement. Die Veränderungen des Qualitätsbegriffes durch mehrere Interessengruppen wurde auch in die 2005 aktualisierte Definition vom Begriff Qualität aufgenommen.

Definition 2.1 (Qualität)
Grad, in dem ein Satz inhärenter Merkmale Anforderungen erfüllt (vgl. DIN EN ISO 9000:2000 S. 18 f.).

Mit inhärent im Sinne von Qualität ist ein quantitatives Merkmal, zum Beispiel ein Sollwert, gemeint. Der Begriff Qualität kann durch Adjektive wie gut, schlecht, ausreichend beschrieben werden.

2.2 Qualitätsschwankungen

Qualität auf ein einzelnes Merkmal gerichtet ist ein Sollwert, der für die Serienproduktion festgelegt wurde. Diese Sollwerte können Durchmesser von Schraubenköpfen, Dicke von Rohren oder Wasservolumen in einer Flasche sein. In der industriellen Praxis gibt es trotz voreingestellter Sollwerte allerdings Unterschiede in den Merkmalsausprägungen der produzierten Teile. Diese Schwankungen können deutlich sichtbar sein, aber auch erst durch hochsensible Messinstrumente gezeigt werden. Welche Auswirkungen Schwankungen haben können, verrät eine Werbeanzeige der Firma Osram in der Zeitung *Stern*:

1/1000mm Ungenauigkeit im Glühfaden und die Glühbirne brennt 200 Stunden weniger.

Mögliche Fehlerquellen von Qualitätsschwankungen werden in fünf Gruppen eingeteilt, die sogenannten fünf M.

- **Mensch**
- **Methode**
- **Maschine**
- **Material**
- **Mitwelt**

Der Mensch ist als Arbeiter und Überwachungspersonal vermutlich die am wenigsten kontrollierbare Fehlerquelle. Konzentration, Sorgfalt und Motivation sind zwischen den einzelnen Menschen unterschiedlich und auch bei einer einzelnen Person variieren diese und andere Eigenschaften über den Tag hinweg, sodass ein Produkt kurz vor Feierabend womöglich nicht dieselbe Qualität wie in den Morgenstunden besitzt. Eine Methode, die nicht in das Zusammenspiel von Personal und Maschine passt, führt zwangsläufig zu fehlerhaften Produkten. Schwankungen der Maschinen resultieren aus fehlender oder unzureichender Wartung, Verschleiß von Maschinenelementen oder falschen Einstellungen. Wird das zu verarbeitende Material zum Beispiel durch einen anderen Anlieferer verändert, so kann es ebenfalls zu Schwankungen in der Produktion kommen, wenn das neue Material andere Eigenschaften hat. Die Mitwelt oder Umwelteinflüsse sind Störquellen wie Luftdruck, Temperatur, Feuchtigkeit oder auch Lärm. Diese Ursachen können sich Überlagern und zu weiteren Fehlern führen.

Es wird weiter auch zwischen natürlicher und systematischer Schwankung bzw. Streuung unterschieden. Die natürliche Streuung ist nicht zu vermeiden oder zu antizipieren und hat oft kaum messbare Auswirkungen auf die Qualität der Ware. Die systematische Streuung hingegen hat meist eine Ursache, die gefunden und behoben werden kann. Dieses kann ein schrittweiser Prozess sein, der auf Materialermüdung zurückzuführen ist, aber es kann, zum Beispiel durch ein neues Verfahren, auch eine plötzliche Verschiebung des produzierten Merkmals sein.

2.3 Statistische Qualitätssicherung

Typische Aufgabenbereiche der statistischen Qualitätssicherung sind Vorlaufuntersuchungen, laufende Fertigungsüberwachung und Abnahmeprüfungen. Vorlaufuntersuchungen werden durchgeführt, um in der Planungsphase der Serienproduktion frühzeitig mögliche Fehler zu entdecken und zu beheben. Sind alle bekannten Fehler beseitigt und ist die Planungsphase abgeschlossen, folgt die Fertigung in Serie. Dabei werden für die Überwachung der Produktion Kontrollkarten verwendet, die Alarm schlagen, falls die Schwankungen größer als eine festgelegte Toleranz sind oder ein Sollwert nicht erreicht wird. In einem solchen Fall wird die Produktion gestoppt und eine Prozesskorrektur veranlasst und erst mit der Produktion fortgefahren, wenn die Mängel behoben wurden. Mit Kontrollkarten werden Produktionsblöcke mit einer festgelegten Anzahl an Teilen kontrolliert, indem beispielsweise der Mittelwert des interessierenden Merkmals für diesen Block bestimmt wird. Weicht dieser Wert in mehreren Blöcken hintereinander vom Sollwert ab, wird gemeldet, dass die Produktion außer Kontrolle ist und eine Fehleranalyse wird aufgenommen. Für detailliertere Informationen zur Fertigungsüberwachung wird auf Rinne/Mittag 1995 S.303 ff. verwiesen.

Bei einer Abnahmeprüfung wird kontrolliert, ob eine Lieferung, im Folgenden als Los bezeichnet, vom Produzenten für den Abnehmer eine ausreichende Qualität besitzt, damit der Abnehmer das Los akzeptiert und der Produzent somit seine Ware verkauft. Dafür wird in der Regel aus dem Los ein festgelegter Stichprobenumfang auf seine Qualität untersucht. Bei erfüllten Qualitätsbedingungen wird das Los angenommen. Dafür soll die Stichprobe repräsentativ für das gesamte Los stehen, sodass keine Vollkontrolle durchgeführt werden muss. Bei einer Vollkontrolle werden alle Teile des Loses auf die Qualitätsbedingungen geprüft. Eine Vollkontrolle wird nur dann durchgeführt, wenn nur sehr wenige Teile zu prüfen sind oder Folgen von möglichen Fehlern teurer als die Prüfung selbst sind. Bei einer gesetzlichen Vorschrift oder bei gefährlichen Situationen durch mögliche Fehler (z.B. fehlerhafter Herzschrittmacher) wird ebenfalls eine Vollkontrolle durchgeführt.

Eine Stichprobenprüfung ist im Vergleich zur Vollkontrolle wesentlich kostengünstiger und auch schneller, sodass die Ware früher beim Abnehmer zur Weiterverarbeitung verfügbar ist. Des Weiteren ist die Stichprobenprüfung auch bei einer zerstörenden Prüfung möglich, wenn zum Beispiel die Lebensdauer von Produkten untersucht wird. Allerdings bestehen bei der Stichprobenprüfung auch gewisse Risiken. So kann es sein, dass die Stichprobe das Los nicht repräsentativ darstellt und es zu einer falschen Entscheidung kommt. Dementsprechend ist eine Annahme von schlechter Qualität ein Nachteil für den Abnehmer und ein Zurückweisen von guter Qualität ist ein Nachteil für den Produzenten. Diese Risiken können jedoch im Vorfeld der Abnahmeprüfung für den jeweiligen Stichprobenumfang berechnet werden, so dass es für alle Beteiligten akzeptable Risiken sichergestellt werden können (vgl. Timischl 2002 S. 231 f.).

Die Festsetzung von Stichprobenumfang und Qualitätsbedingung einer Abnahmeprüfung wird Stichprobenprüfplan genannt. Man unterscheidet bei Abnahmeprüfungen zwischen messender Prüfung bzw. Variablenprüfung und zählender Prüfung bzw. attributiver Prüfung.

Die Entscheidung, ob ein Los angenommen oder zurückgewiesen wird, wird bei der Variablenprüfung entweder direkt aus den Messergebnissen oder aus einer bestimmten Kennzahl getroffen. Bei einem attributiven Prüfplan erfolgt häufig die Einteilung in zwei Klassen: gute und schlechte Qualität. Dabei ist das Produkt von schlechter Qualität, falls das Produkt nicht funktioniert oder die Anzahl an Fehlern einen Maximalwert übersteigt. Alternativ werden alle Fehler der Produkte des Stichprobenumfangs gezählt und das Los angenommen, wenn die maximale Fehleranzahl nicht überschritten wird. Im Allgemeinen ist es möglich, eine messende Prüfung in eine zählende Prüfung abzuwandeln.

Der Vorteil einer zählenden Prüfung ist, dass diese von weniger qualifiziertem Personal häufig manuell durchgeführt werden kann. Bei messender Prüfung werden unter Umständen teure Messinstrumente benötigt. Jedoch benötigen messende Prüfungen einen kleineren Stichprobenumfang für eine Entscheidung (vgl. Rinne/Mittag 1995 S. 22).

2.4 Zuverlässigkeit

Zuverlässigkeit wird von Lauber und Göhner wie folgt definiert.

Definition 2.2 (Zuverlässigkeit)
Zuverlässigkeit ist die Gesamtheit der Eigenschaften, welche sich auf die Eignung zur Erfüllung der Erfordernisse unter gegebenen Bedingungen für ein gegebenes Zeitintervall beziehen (vgl. Lauber/Göhner 1999 S. 138).

Die Zuverlässigkeit eines Teils oder eines gesamten Produkts ist auch eine Qualitätseigenschaft, die vom Kunden gefordert wird. Aber nicht nur der Kunde, sondern auch der Hersteller ist an einer hohen Zuverlässigkeit seines Produkts interessiert. Zuverlässige Produkte können am Markt teurer verkauft werden als vergleichbare Produkte mit einem niedrigen Maß an Zuverlässigkeit. Des Weiteren steigert eine hohe Zuverlässigkeit das Prestige und Ansehen des Herstellers (vgl. Meyna/Pauli 2010 S. XVIII).

Die Zuverlässigkeitstheorie stützt sich vor allem auf die grundlegende Wahrscheinlichkeitstheorie. So unterliegt die Lebensdauer eines Produkts in gewissem Maße dem Zufall und ist somit eine Zufallsvariable, die beobachtet werden kann.

Abnahmeprüfungen auf Zuverlässigkeit sind in der Regel immer zerstörende Prüfungen. Diese Prüfung kann sich bei einer hohen Zuverlässigkeit über eine sehr lange Versuchsdauer strecken, die über mehrere Wochen oder Monate andauert. Um diesen Prozess zu beschleunigen, werden Abnahmeprüfungen aber unter Umständen mit erhöhten Belastungen für die Produkte durchgeführt, um Zeit zu sparen.

Bei der Zuverlässigkeit wird zwischen verschiedenen Arten von Prüfungen unterschieden. Beim attributiven Prüfplan wird die Prüfdauer vorgegeben und einem getesteten Teil aus der Stichprobe die Eigenschaft "gut" zugeordnet, wenn es bei Abschluss der Prüfung noch funktioniert und ein "schlecht" zugeordnet, falls es einen Ausfall gab. Sollte die Summe der Ausfälle zu hoch sein, wird das Los abgelehnt.

In einer Sequentialprüfung wird jedes Teil der Stichprobe einzeln geprüft und nach jeder einzelnen Prüfung entschieden, ob entweder das Los akzeptiert oder abgewiesen wird, oder ob das nächste Teil untersucht werden soll. In der Praxis wird jedoch nach festgelegten Zeitabständen die Anzahl der Ausfälle vermerkt. Anders als bei der attributiven Prüfung ist die Prüfdauer nicht vorher festgelegt.

Bei einem End-of-Life-Test (kurz EoLT) werden alle Teile der Stichprobe so lange kontrolliert, bis jedes einzelne seine Funktionstüchtigkeit verliert. Dabei wird jeweils die Lebensdauer registriert. Durch EolTs werden häufig Parameterschätzungen der zu Grunde liegenden Verteilung durchgeführt und daraufhin eine Entscheidung über das Los gefällt. Für mehr Informationen zu diesen und noch einigen weiteren Abnahmeprüfungen wird auf Meyna/Pauli, 2010, S. 556 ff. verwiesen.

Kapitel 3

Theorie

In diesem Kapitel werden die statistischen Methoden erklärt, auf die später zurückgegriffen wird. Dafür werden zunächst die Begriffe der Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen eingeführt und anschließend einige wichtige Verteilungen vorgestellt. Im nächsten Kapitelabschnitt wird die statistische Testtheorie mit dazugehörigen Risiken vorgestellt und auf eine Abnahmeprüfung angewendet.

In Kapitel 3.2 werden zählende Abnahmeprüfungen der Exponential- und der Log-Normalverteilung vorgestellt und in Kapitel 3.3 folgen die messenden Abnahmeprüfungen von Produkten, die diesen Verteilungen unterliegen.

3.1 Definitionen

3.1.1 Wichtige Funktionen und Verteilungen

Definition 3.1 (Zufallsvariable)
Eine Zufallsvariable ist eine messbare Funktion, die einem Ereignis einen Wert zuordnet.

Definition 3.2 (Wahrscheinlichkeitsfunktion)
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsmaß P und Ergebnismenge Ω. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to [0, 1]$ definiert durch

$$p(x) = P(X = x) \tag{3.1.1}$$

(vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 229).

Die Gesamtheit der möglichen Realisationen $x_1, x_2, ...$ einer diskreten Zufallsvariablen X wird Träger von X genannt. Für Werte, die nicht im Träger enthalten sind, wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion Null.

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion wird für diskrete Zustandsräume, wie zum Beispiel das Werfen einer Münze oder eines Würfels, benötigt. Stetige Zustandsräume, wie das Messen von Temperaturen oder Ermitteln von Lebensdauern, benötigen eine Dichtfunktion (kurz Dichte).

Definition 3.3 (Dichte)
Eine Zufallsvariable X heißt stetig, wenn es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gibt, so dass für jedes Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{3.1.2}$$

gilt. Die Funktion $f(x)$ wird Dichte von X genannt. Eine Dichte besitzt die Normierungseigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 272 f.).

Die für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von Intervallen benötigte Stammfunktion der Dichtefunktion wird Verteilungsfunktion genannt.

Definition 3.4 (Verteilungsfunktion)
Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ einer stetigen Zuvallsvariablen X ist das unbestimmte Integral über die Dichte $f(x)$ und wird durch

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)dv \tag{3.1.3}$$

an der Stelle x bestimmt. Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable ist die Summe über die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ des Trägers und wird an der Stelle x durch

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p(x_i) \tag{3.1.4}$$

bestimmt (vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 272 f.).

Für eine Verteilungsfunktion gilt $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Mit einer Verteilungsfunktion lässt sich ein Quantil einer Verteilung bestimmen. Dabei teilt der Wert vom Quantil die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ in eine Teilfläche mit Werten kleiner dem Quantil und in eine Teilfläche mit den Werten größer dem Quantil.

Definition 3.5 (Quantil)
Für ein $\alpha \in (0,1)$ ist das α-Quantil $q_F(\alpha)$ einer Verteilung mit Verteilungsfunktion $F(x)$ der Wert, für den

$$F(q_F(\alpha)) = \alpha \tag{3.1.5}$$

gilt (vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 287).

Quantile einer Verteilung werden häufig bei Testentscheidungen als kritischer Wert benötigt.

Theoretische statistische Kennzahlen von Lage und Streuung lassen sich aus den Verteilungsfunktionen berechnen.

Definition 3.6 (Erwartungswert und Varianz)
Der Erwartungswert $E(X)$ einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichte $f(x)$ ist

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx. \tag{3.1.6}$$

Die Varianz $Var(X)$ einer stetigen Zufallsvariablen X mit Erwartungswert $E(X)$ ist

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) \tag{3.1.7}$$

(vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 284 und S. 289).

Die Varianz kann durch den Steinerschen Verschiebungssatz alternativ wie folgt bestimmt werden.

Satz 3.7 *Für die Berechnung der Varianz gilt*

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2. \tag{3.1.8}$$

Beweis Satz 3.7: Für diesen Beweis wird die Linearität des Erwartungswertes benötigt. Diese und weitere Eigenschaften des Erwartungswerts können in Fahrmeir et al., 2010, auf Seite 284 nachvollzogen werden.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + E(X)^2) \\
&= E(X^2) - 2 \cdot E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

□

Um die Zuverlässigkeit in der Qualitätssicherung darstellen zu können, werden im Folgenden die Überlebensfunktion und statistische Modelle eingeführt, die der Lebensdaueranalyse dienen. Unter der Lebensdauer T eines Produkts versteht man die Zeit, in der es voll funktionsfähig ist.

Definition 3.8 (Überlebensfunktion)
Sei T eine Zufallsvariable mit nicht-negativen Werten. Dann ist die Überlebensfunktion (Survival Function) $S : [0, \infty) \to [0, 1]$ gegeben durch

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t), \tag{3.1.9}$$

wobei $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen T an der Stelle t ist (vgl. Meyna/Pauli, 2010, S. 33).

Die Überlebensfunktion gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teil über den Zeitraum t hinweg funktionsfähig ist. Da nur Produkte betrachtet werden, die zu Beginn der Beobachtung nicht defekt sind, ist die monoton fallende Überlebensfunktion zum Zeitpunkt Null gleich eins ($S(0) = 1$). Es gilt weiter $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 1 - \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$. Die Überlebensfunktion wird in den Kapiteln 3.2 und 3.3 eine wichtige Rolle einnehmen, da sie maßgeblich zur Formulierung der Nullhypothese in einer Abnahmeprüfung für die Zuverlässigkeit beiträgt.

Im Folgenden werden spezielle Verteilungen eingeführt, die zur Untersuchung von Lebensdauern verwendet werden.

Bevor die Binomialverteilung eingeführt wird, wird die Bernoulli-Verteilung benötigt, auf der die Binomialverteilung aufbaut.

Definition 3.9 (Bernoulli-Verteilung)
Eine Zufallsvariable X auf $\{0, 1\}$ mit

$$P(X = x) = p(x) = \pi^x \cdot (1 - \pi)^{1-x} \tag{3.1.10}$$

heißt Bernoulli-verteilt mit dem Parameter π (kurz $X \sim Ber(\pi)$).

Eine binäre Zufallsvariable X einer Bernoulli-Verteilung ordnet dem Eintreten eines Ereignisses mit Wahrscheinlichkeit π eine 1 zu. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jenes Ereignis nicht eintrifft gerade $1 - \pi$ und die Zufallsvariable wird mit einer 0 kodiert.

Werden n identische Versuche mit Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ hintereinander durchgeführt, so ist die Summe der Zufallsvariablen $\sum_{i=1}^{n} X_i =: A$

binomialverteilt. Die Binomialverteilung repräsentiert die Anzahl an Erfolgen von n unabhängigen und identischen Bernoulli-Experimenten. Weil die Versuche unabhängig voneinander durchgeführt werden, dürfen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen miteinander multipliziert werden. Es ist zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit für jede mögliche Reihenfolge von Erfolg und Misserfolg identisch ist, aber es nicht interessiert, ob erst die a Erfolge eintreten und anschließend $n-a$ Misserfolge oder Erfolg und Misserfolg abwechselnd eintreten. Deshalb muss das Produkt der Wahrscheinlichkeitsfunktionen mit der Anzahl an möglichen Reihenfolgen multipliziert werden. Bei n Versuchen mit insgesamt a Erfolgen gibt es $\binom{n}{a}$ mögliche Reihenfolgen.

Definition 3.10 (Binomialverteilung)
Eine diskrete Zufallsvariable A auf $\mathbb{N}$ mit

$$P(A=a)=p(a)=\binom{n}{a}\pi^a\cdot(1-\pi)^{n-a} \tag{3.1.11}$$

heißt binomialverteilt mit den Parametern n und π (kurz $A \sim Bin(n,\pi)$).

Satz 3.11
Sei A die Summe von n unabhängig und identisch Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_1,...,X_n$. Dann ist $A \sim Bin(n,\pi)$.

Beweis Satz 3.11:

$$\begin{aligned}
P(X_1=x_1,...,X_n=x_n) &= \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\cdot\pi^x\cdot\ldots\cdot\pi^x\cdot(1-\pi)^{1-x}\cdot(1-\pi)^{1-x}\\
&= \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\pi^{\sum_{i=1}^n x_i}\cdot(1-\pi)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\\
&= \binom{n}{a}\pi^a\cdot(1-\pi)^{n-a}\\
&= P(A=a).
\end{aligned}$$

Weil eine Binomialverteilung mit den Parametern $n=1$ und π einer Bernoulli-Verteilung mit dem Parameter π entspricht, wird im Folgenden eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable über die Binomialverteilung $Bin(1,\pi)$ ausgedrückt (Fahrmeir et al., 2010, S. 253 f.).

Die Exponentialverteilung ist eine häufig benutzte Lebensdauerverteilung unter der Annahme stetiger Messungen. Diese Verteilung dient zur Modellierung von Wartezeiten an einer Kasse, Lebensdauern von Produkten oder Bearbeitungszeiten von Kundenaufträgen. Die Exponentialverteilung ist eine gedächnislose Verteilung. Vorherige

Ereignisse haben also keinen Einfluss auf weitere Ereignisse. In der Zuverlässigkeitstheorie heißt das, dass ein Produkt nicht altert und die Ausfallwahrscheinlichkeit zu jedem Zeitpunkt konstant ist (Fahrmeir et al., 2010, S. 279 f.).

Definition 3.12 (Exponentialverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable T ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ verteilt (kurz $T \sim Exp(\lambda)$), wenn die Dichte die Form

$$f(t) = \lambda \cdot exp(-\lambda \cdot t) \tag{3.1.12}$$

aufweist. Daraus resultiert die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda \cdot exp(-\lambda \cdot s)ds = 1 - exp(-\lambda \cdot t) \tag{3.1.13}$$

(vgl. Meyna/Pauli, 2010, S. 58).

Satz 3.13 (Kenngrößen der Exponentialverteilung)
Sei $T \sim Exp(\lambda)$. Dann ist der Erwartungswert von T durch

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \tag{3.1.14}$$

gegeben. Für die Varianz gilt

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3.1.15}$$

(vgl. Mosler/Schmid, 2006, S. 95).

Beweis Satz 3.13 (Mosler/Schmid, 2006, S. 96): Der Erwartungswert wird durch Definiton 3.6, der Dichte aus der Definition 3.12 und mit Hilfe von partieller Integration bestimmt.

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{0}^{\infty} t \cdot \lambda \cdot exp(-\lambda t)dt \\
&= -t \cdot exp(-\lambda \cdot t)\Big|_0^\infty - \int_{0}^{\infty} -exp(-\lambda \cdot t)dt \\
&= \int_{0}^{\infty} exp(-\lambda \cdot t) = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\infty} \lambda \cdot exp(-\lambda \cdot t) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Anschließend wird die analoge Rechnung für die Varianz mit partieller Integration und dem soeben bestimmten Erwartungswert durchgeführt.

$$\begin{aligned}
Var(T) &= E(T^2) - E(T)^2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt - E(T)^2 = \int\limits_{0}^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot exp(-\lambda \cdot t)dt - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \lambda \left(-\frac{t^2}{\lambda}(-exp(-\lambda \cdot t)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{-2t}{\lambda} exp(-\lambda \cdot t)dt \right) - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{2}{\lambda} \int\limits_0^\infty \lambda \cdot t \cdot exp(-\lambda \cdot t) - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

□

Wird in die Überlebensfunktion aus Definition 3.8 die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung eingesetzt, erschließt sich die Überlebensfunktion.

Lemma 3.14

Die Überlebensfunktion einer Exponentialverteilung ist

$$S(t) = 1 - (1 - exp(-\lambda \cdot t)) = exp(-\lambda \cdot t). \tag{3.1.16}$$

Die Erlangverteilung wird bei der Abnahmeprüfung von exponentialverteilten Loseinheiten als Verteilung der Teststatistik benötigt.

Definition 3.15 (Erlangverteilung)

Eine stetige Zufallsvariable T ist $Erl(\lambda, n)$-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion mit

$$F(t) = 1 - exp(-\lambda \cdot t) \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda \cdot t)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{3.1.17}$$

für $t \geq 0$ gegeben ist (vgl. Hartung et al., 2009, S. 225).

Die Erlangverteilung ist die Summe von n unabhängig und identisch exponentialverteilten Zufallsvariablen. Für den Parameter $n = 1$ entspricht die $Erl(\lambda, 1)$-Verteilung einer $Exp(\lambda)$-Verteilung.

Satz 3.16

Seien $T_1, ..., T_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $T_1 \sim Exp(\lambda)$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \sim Erl(\lambda, n). \tag{3.1.18}$$

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung aus Satz 3.16.

Die Normalverteilung ist eine sehr bekannte und wichtige Verteilung. Empirische Daten lassen sich häufig so transformieren, dass diese anschließend approximativ normalverteilt sind. Viele statistische Modelle bauen auf der Annahme einer Normalverteilung auf.

Definition 3.17 (Normalverteilung)
Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit den Paramtern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (kurz $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), wenn die Dichtefunktion mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{3.1.19}$$

gegeben ist (vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 294).

Für den Spezialfall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ wird

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{3.1.20}$$

die Dichte der Standardnormalverteilung genannt. Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wird mit $\Phi(x)$ gekennzeichnet. Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung lässt sich nicht geschlossen darstellen und muss mit numerischen Verfahren bestimmt werden. Es ist möglich, normalverteilte Zufallsvariablen zu standardisieren. Das bedeutet, dass normalverteilte Zufallsvariablen in standardnormalverteilte Zufallsvariablen transformiert werden.

Lemma 3.18
Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann ist

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1). \tag{3.1.21}$$

Der Beweis folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz.

Die im Folgenden eingeführte logarithmische Normalverteilung baut auf die Normalverteilung auf. Die sogenannte Log-Normalverteilung ist ein vielseitiges Wahrscheinlichkeitsmodell, dass wegen der Nähe zur Normalverteilung mathematisch leicht handhabbar ist. Diese Verteilung beschreibt Lebensdauern, die nach einer Transformation normalverteilt sind.

Definition 3.19 (Log-Normalverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable T ist logarithmisch normalverteilt mit den Paramtern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (kurz $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$), wenn die Dichtefunktion die Form

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot t \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) = \phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \tag{3.1.22}$$

hat. Damit ist die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dt = \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \tag{3.1.23}$$

$\forall\, t > 0$ gegeben. Außerdem ist die Überlebensfunktion bezüglich der Log-Normalverteilung gegeben durch

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \tag{3.1.24}$$

(vgl. Meyna/Pauli, 2010, S. 82 f.).

Die Log-Normalverteilung kann wie folgt zur Normalverteilung in Beziehung gesetzt werden. Falls $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ gilt, dann gilt $\log(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Satz 3.20
Sei $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Dann ist Erwartungswert von T

$$E(T) = exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right). \tag{3.1.25}$$

Die Varianz ist gegeben durch

$$Var(T) = exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (exp(\sigma^2) - 1). \tag{3.1.26}$$

Beweis Satz 3.20: Ist eine Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann folgt , dass $exp(X) =: T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ gilt. Weiter gilt $X = \mu + \sigma \cdot Z$ mit $Z \sim N(0, 1)$.

$$
\begin{aligned}
E(T) &= E(exp(X)) = E(exp(\mu + \sigma \cdot Z)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} exp(\mu + \sigma \cdot z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot z - \frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (z^2 - 2\sigma \cdot z + \sigma^2\right) dz \\
&= exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{(z-\sigma)^2}{2}\right) dz \\
&= exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

da $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{(z-\sigma)^2}{2}\right)$ die Dichte einer $N(\sigma, 1)$-Verteilung ist und die Normierungseigenschaft gilt. Im folgenden Teil wird die Dichte $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{(z-2\sigma)^2}{2}\right)$ einer $N(2\sigma, 1)$-Verteilung benutzt. Für

$$
Var(T) = Var(exp(X)) = E(exp(\mu + \sigma \cdot Z)^2) - E(exp(\mu + \sigma \cdot Z))^2
$$

wird zunächst erstmal $E(exp(\mu + \sigma \cdot Z)^2)$ bestimmt.

$$
\begin{aligned}
E(exp(\mu + \sigma \cdot Z)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} exp(2\mu + 2\sigma \cdot z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(2\mu + 2\sigma^2 - 2\sigma^2 + 2\sigma \cdot z - \frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(2\mu + 2\sigma^2 - \frac{z^2 - 4\sigma \cdot z + 4\sigma^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} exp(2\mu + 2\sigma^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{(z-2\sigma)^2}{2}\right) dz \\
&= exp(2\mu + 2\sigma^2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(-\frac{(z-2\sigma)^2}{2}\right) dz \\
&= exp(2\mu + 2\sigma^2)
\end{aligned}
$$

Weiter ist $E(exp(\mu + \sigma \cdot Z))^2 = exp(2\mu + \sigma^2)$. Zusammengefasst ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
Var(exp(X)) &= E(exp(\mu + \sigma \cdot Z)^2) - E(exp(\mu + \sigma \cdot Z))^2 \\
&= exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2) \\
&= exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (exp(\sigma^2) - 1).
\end{aligned}
$$

□

Satz 3.21 (Beziehung zur Normalverteilung)
Sind Erwartungswert und Varianz einer log-normalverteilten Zufallsvariablen T bekannt oder vorgegeben, so lassen sich die charakteristischen Parameter μ und σ^2 wie folgt bestimmen.

$$\sigma^2 = \log\left(\frac{Var(T)}{E(T)} + 1\right) \tag{3.1.27}$$

$$\mu = \log(E(T)) - \frac{\sigma^2}{2} \tag{3.1.28}$$

Beweis Satz 3.21: Zunächst wird für σ^2 gezeigt, dass sich durch Einsetzen der bekannten Kenngrößen Erwartungswert und Varianz die Aussage beweisen lässt.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{Var(T)}{E(T)} + 1\right) &= \log\left(\frac{exp(2\mu+\sigma^2)(exp(\sigma^2)-1)}{exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2} + 1\right)\\ &= \log(exp(\sigma^2) - 1 + 1)\\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

Weiter wird nun auch für μ bewiesen, dass Satz 3.21 gilt.

$$\begin{aligned}\log(E(T)) - \frac{\sigma^2}{2} &= \log\left(exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) - \frac{\sigma^2}{2}\\ &= \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}\\ &= \mu\end{aligned}$$

□

3.1.2 Statistische Testtheorie

Die Abnahmeprüfung als Teil der statistischen Qualitätssicherung ist im wesentlichen die Anwendung der statistischen Testtheorie. Ein statistischer Test überprüft zwei sich ausschließende Hypothesen, die sich auf den interessierenden Sachverhalt beziehen. Diese werden Nullhypothese $H_0 : \theta \in \Theta_0$ und Alternativhypothese $H_1 : \theta \in \Theta_1$ genannt, wobei Θ_0 und Θ_1 Parameterräume sind. Die Nullhypothese kann dabei in der Regel entweder nur einen Punkt ($H_0 : \theta = \theta_0$) oder einen Bereich ($H_0 : \theta \leq \theta_0$ oder $H_0 : \theta \geq \theta_0$) enthalten. Mit Hilfe einer Zufallsstichprobe $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X}^n$ aus der zu Grunde liegenden Grundgesamtheit werden Mess-ergebnisse gesammelt und als Teststatistik $TS(x)$ (Prüfgröße) zusammengefasst. Durch eine vorher festgelegte Entscheidungsregel $\varphi : \mathcal{X}^n \to \{0, 1\}$ wird die

Nullhypothese entweder abgelehnt ($\varphi(x) = 1$) oder akzeptiert ($\varphi(x) = 0$). Die Prüfgröße wird mit einem kritischen Wert k bei Bereichshypothesen in Beziehung gesetzt und der Test lehnt die Nullhypothese ab, falls die Prüfgröße größer oder kleiner als k ist. Bei Punkthypothesen wird die Teststatistik mit einem kritischen Bereich K verglichen und die Nullhypothese verworfen, falls sie außerhalb des Intervalls K liegt. Die Teststatistik liegt dann im Ablehnbereich von H_0. Der kritische Wert eines Tests hängt von der Verteilung der Prüfgröße ab und ist von Test zu Test unterschiedlich. Die Testentscheidung wird als gültige Verallgemeinerung auf die Grundgesamtheit interpretiert. Da die Teststatistik aus einer Zufallsstichprobe gebildet wird und damit selber zufällig ist, kann eine Nullhypothese niemals verifiziert oder falsifiziert werden. Es ist natürlich möglich, dass die getroffene Verallgemeinerung durch die Entscheidungsregel für die Grundgesamtheit nicht gilt und somit ein Fehler begangen wird (vgl. Tiede/Voß, 2000, S. 10).

Es gibt zwei Möglichkeiten, bei der Testentscheidung einen Fehler zu begehen (vgl. Tabelle 3.1).

	$\theta \in \Theta_0$	$\theta \in \Theta_1$
H_0 wird akzeptiert $\varphi(x) = 0$	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art (β-Fehler)
H_0 wird abgelehnt $\varphi(x) = 1$	Fehler 1. Art (α-Fehler)	richtige Entscheidung

Tabelle 3.1: Fehlerarten beim Testen

Ein Los wird akzeptiert, wenn die Entscheidungsregel die Nullhypothese nicht ablehnt ($\varphi(x) = 0$) und das Los wird zurückgewiesen, falls $\varphi(x) = 1$ gilt. Die potentiellen Fehlentscheidungen haben spezielle Namen. Der α-Fehler wird bei einer Abnahmeprüfung das Herstellerrisiko genannt, weil zu einer Wahrscheinlichkeit von α das Los zurückgewiesen wird, obwohl es den Qualitätsanforderungen entspricht. Dementsprechend wird der β-Fehler das Konsumentenrisiko genannt, weil es mit einer Wahrscheinlichkeit von β zur Annahme eines Loses mit zu hohem Losschlechtanteil kommt, also dem Anteil an Losen mit unzureichender Qualität.

Der Fehler 1. Art kann nur vermieden werden, wenn $\varphi(x) = 0 \; \forall x \in \mathcal{X}^n$ gilt. Wird andersherum $\varphi(x) = 1 \; \forall x \in \mathcal{X}^n$ gesetzt, gibt es nie einen Fehler 2. Art. Das bedeutet aber, dass die Entscheidungsregel keine wirkliche Entscheidung trifft und es beim Testen demnach also immer möglich ist, Fehler zu machen. Es besteht die Möglichkeit, eine Fehlerwahrscheinlichkeit festzulegen und die andere durch Maßnahmen wie einen großen Stichprobenumfang zu minimieren. So soll die Entscheidungsregel mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens α (meist $\alpha = 0.05$) eine Fehlentscheidung 1. Art (α-Fehler) treffen (vgl. Hartung et al., 2009, S. 133 f.).

Definition 3.22 (Statistischer Test)
Sei $\alpha \in [0,1]$. Dann heißt $\varphi : \mathcal{X}^n \to \{0,1\}$ statistischer Test zum Signifikanzniveau α mit Teststatistik $TS(x)$, falls

$$P_\theta(\varphi(x) = 1) \leq \alpha \ \forall \ \theta \in \Theta_0 \tag{3.1.29}$$

gilt. In der Regel lauten die Hypothesenpaare

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & H_0 : \theta = \theta_0 & \text{vs} & H_1 : \theta \neq \theta_0 \\ \text{(ii)} & H_0 : \theta \leq \theta_0 & \text{vs} & H_1 : \theta > \theta_0 \\ \text{(iii)} & H_0 : \theta \geq \theta_0 & \text{vs} & H_1 : \theta < \theta_0. \end{array}$$

Je nach Art der Hypothese und Verteilung der Teststatistik ist der kritische Wert ein Quantil der Verteilung der Teststatistik TS.

Eine weitere Möglichkeit, eine Testentscheidung zu erhalten, ist der p-Wert. Diese Möglichkeit der Ausgabe von Testentscheidungen wird häufig in implementierten Tests in der Statistiksoftware R verwendet.

Definition 3.23 (p-Wert)
Der p-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable $TS(X)$ einen Wert annimmt, der deutlicher gegen die Nullhypothese spricht als der Wert $TS(x)$, der beobachtet wird (vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 420).

Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls diese Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich dem festgelegten Signifikanzniveau α ist.
Eine wichtige Eigenschaft eines Tests ist seine Gütefunktion. Durch die Gütefunktion lässt sich ablesen, wie gut eine Entscheidungsregel zu dem Testproblem passt.

Definition 3.24 (Gütefunktion)
Seien $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ und $\varphi : \mathcal{X}^n \to \{0,1\}$ ein Test mit Hypothesenpaaren aus Definition 3.22. Dann ist $G : \Theta \to [0,1]$ mit

$$\gamma(\theta) = P_\theta(\varphi(x) = 1) \ \forall \ \theta \in \Theta \tag{3.1.30}$$

die Gütefunktion von $\varphi(x)$ (vgl. Rinne/Mittag, 1995, S. 123).

Die Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Nullhypothese abzulehnen, falls θ der wahre Parameter der Grundgesamtheit ist. Ein statistischer Test aus Definition 3.22 ist also ein Test zum Signifikanzniveau α, falls

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} G(\theta) \leq \alpha \tag{3.1.31}$$

gilt, d.h. für Werte von $G(\theta)$ unter H_0 ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art durch eine obere Schranke von α gegeben. Wenn das Signifikanzniveau voll ausgeschöpft werden kann, gilt $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} G(\theta) = \alpha$. Aus dem Graphen einer Gütefunktion kann für jedes $\theta \in \Theta_0$ die Höhe der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art abgelesen werden. Umgekehrt kann für jedes $\theta \in \Theta_1$ die Höhe der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art abgelesen werden. Der Fehler 2. Art beschreibt die Nicht-Ablehnung von der Nullhypothese, obwohl der wahre Parameter nicht im Annahmebereich liegt. Dementsprechend gilt für den β-Fehler und dem dazugehörigen $\theta \in \Theta_1$

$$P_\theta(\varphi(x) = 0) = 1 - \gamma(\theta). \tag{3.1.32}$$

Das Pendant zur Gütefunktion ist die Operationscharakteristik (OC-Funktion). Sie beschreibt für jedes $\theta \in \Theta$ die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese nicht abzulehnen.

Definition 3.25 (Operationscharakteristik)
Seien $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ und $\varphi : \mathcal{X}^n \to \{0, 1\}$ ein Test mit Hypothesenpaaren aus Definition 3.22. Dann heißt $L : \Theta \to [0, 1]$ mit

$$L(\theta) = P_\theta(\varphi(x) = 0) = 1 - G(\theta) \ \forall \ \theta \in \Theta \tag{3.1.33}$$

die Operationscharakteristik von $\varphi(x)$ (vgl. Rinne/Mittag, 1995, S. 124).

Es ist ebenfalls möglich aus der OC-Funktion mit $1 - L(\theta)$ den Fehler 1. Art für $\theta \in \Theta_0$ zu bestimmen. Der Fehler 2. Art ist $L(\theta)$ für $\theta \in \Theta_1$. Es lassen sich also der α- und der β-Fehler sowohl aus der Gütefunktion als auch aus der Operationscharakteristik angeben. In der Qualitätssicherung wird bei Abnahmeprüfungen die OC-Funktion verwendet. Interpretiert werden die Werte von $L(\theta)$ als Wahrscheinlichkeit, dass das Los vom Abnehmer akzeptiert wird.

Eine OC-Funktion sollte für Parameter unter der Nullhypothese eine hohe Annahmewahrscheinlichkeit aufweisen und für Parameter aus der Alternativhypothese eine sehr geringe Annahmewahrscheinlichkeit haben, um die Fehler 1. und 2. Art zu minimieren. Die ideale OC-Funktion hat die Form

$$L(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \text{für } \theta \in \Theta_1. \end{cases} \tag{3.1.34}$$

Diese OC-Funktion hat eine Sprungstelle in dem Punkt, durch den das Hypothesenpaar getrennt ist (für Punkthypothesen besitzt die OC-Funktion zwei Sprungstellen). Entsprechend ist

$$G(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \theta \in \Theta_0 \\ 1 & \text{für } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \tag{3.1.35}$$

die ideale Gütefunktion. Ein statistischer Test mit idealer OC- und Gütefunktion wird idealer Test genannt. Bei dem idealen Test sind die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art gleich Null. Allerdings ist dieser Test in der Praxis nicht möglich und nur ein theoretisches Konstrukt.

Definition 3.26 (Perzentilfunktion)
Die Umkehrfunktion der Operationscharakteristik wird Perzentilfunktion genannt. Durch die Perzentilfunktion lässt sich für eine vorgegebene Annahmewahrscheinlichkeit $\omega \in (0,1)$ *der dazugehörige Parameter* θ_ω *bestimmen*

$$\theta_\omega = L^{-1}(\omega) \tag{3.1.36}$$

(vgl. Rinne/Mittag, 1995, S. 125).

Einige der vorgestellten Perzentile stellen besondere Werte dar. So wird die Qualitätslage für ein θ_ω annehmbare Qualitätslage und der Parameterwert θ_ω AQL-Wert (Acceptable Quality Level) genannt, falls die Annahmewahrscheinlichkeit hoch (meist $\omega = 0.95$) ist. Zurückweisende Qualitätslage wird die Qualitätslage für eine geringe Annahmewahrscheinlichkeit (meist $\omega = 0.1$) für ein θ_ω genannt. Der Parameterwert der zurückweisenden Qualitätslage heißt RQL-Wert (Rejectable Quality Level) (Rinne/Mittag, 1995, S. 123 ff.).

In der Theorie ist eine Abnahmeprüfung die Durchführung eines statistischen Tests, auf den sich der Hersteller und der Konsument geeinigt haben. Es gibt einige Voraussetzungen an das Los, damit eine Abnahmeprüfung ordnungsgemäß durchgeführt werden kann. Die zu prüfenden Teile müssen aus demselben Produktionsweg stammen, das heißt sie dürfen nicht durch verschiedene Verfahren oder Hersteller erzeugt werden. Auf diese Art soll sichergestellt werden, dass die Produkte identische Eigenschaften besitzen. Statistisch bedeutet dies, dass die Produkte alle derselben

Verteilung unterliegen. Des Weiteren sollen die Produkte unabhängig voneinander hergestellt werden. Wenn diese Annahmen gelten, kann die Abnahmeprüfung im Sinne eines statistischen Tests durchgeführt werden.

Das Hypothesenpaar lautet

H_0: Das Los entspricht den Qualitätsanforderungen

vs.

H_1: Das Los entspricht nicht den Qualitätsanforderungen.

Diese Hypothesen transformiert man in einen statistischen Ausdruck. Der Anteil an Elementen im Los, der den Qualitätsanforderungen nicht entspricht, wird Losschlechtanteil oder Ausschussquote genannt und im Folgenden mit p bezeichnet. Der maximal akzeptable Losschlechtanteil soll p_0 sein. Daraus resultieren die Hypothesen

$$\begin{gathered} H_0 : p \leq p_0 \\ \text{vs.} \\ H_1 : p > p_0. \end{gathered}$$

Der Wert p_0 aus der Nullhypothese ist das Percentil an der Stelle $\omega = 1 - \alpha$.

$$\begin{aligned} & L(p_0) = 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & p_0 = L^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Zusätzlich wird zum Schutz des Konsumenten der Fehler 2. Art für ein $p_1 > p_0$ festgelegt, so dass die Wahrscheinlichkeit für eine Annahme des Loses bei vorliegendem Losschlechtanteil von p_1 maximal β ist.

Anschließend wird die Stichprobengröße so angepasst, dass die Anforderungen an den Prüfplan erfüllt sind. Die Konstruktion eines Stichprobenprüfplans, der den Anforderungen gerecht wird, kann zum Beispiel durch den Algorithmus von Guenther durchgeführt werden, der in Rinne/Mittag, 1995, auf Seite 197 f. beschrieben wird. Die Stichprobe x wird auf das Qualitätsmerkmal hin geprüft und es wird mit Hilfe der Entscheidungsregel bestimmt, ob das Los den Qualitätsanforderungen unterliegt.

3.2 Zählende Abnahmeprüfungen

In diesem Kapitel wird die zählende Abnahmeprüfung für die Exponentialverteilung und für die Log-Normalverteilung vorgestellt. Dazu wird angenommen, dass ein Los vom Umfang N mittels einer Stichprobengröße n geprüft wird. Des Weiteren sollen die Lebenszeiten der Loseinheiten $T_1, ..., T_N$ die statistischen Voraussetzungen Unabhängigkeit und Verteilungsgleichheit besitzen.

Die folgende Abnahmeprüfung stellt eine Gut-Schlecht-Prüfung dar. Obwohl die zu untersuchenden Verteilungen stetig sind, kann eine attributive Abnahmeprüfung durchgeführt werden. Dazu muss das stetige Messniveau binär transformiert werden. Weil es sich um eine Prüfung auf Zuverlässigkeit handelt, wird eine Prüfzeit t_e vorgegeben und während dieser Prüfzeit werden die Ausfälle gezählt und als schlechte Qualität identifiziert. Ein ausgefallenes Produkt wird während der Prüfung nicht durch ein neues Produkt ersetzt. Die Qualität einer Einheiten wird in binären Zufallsvariablen $D_1, ..., D_n$ dargestellt, bei denen eine 1 für schlechte und eine 0 für gute Qualität steht

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{für } T_i < t_e \\ 0 & \text{für } T_i \geq t_e \end{cases} \text{für } i = 1, ..., n. \tag{3.2.1}$$

Das Los wird akzeptiert, wenn nach Ablauf der Prüfung maximal k Defekte gezählt wurden. Der maximal zulässige Losschlechtanteil soll p_0 betragen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt aus der Stichprobe vor t_e defekt ist, ist p_0 bzw. $P(T_i < t_e) = p_0$. Daraus folgt, dass die binären Zufallvariablen jeweils binomialverteilt sind ($D_i \sim Bin(1, p_0)$). Da nun die statistischen Voraussetzungen Unabhängigkeit und Verteilungsgleichheit gelten, sind die potentiellen Defekte aller Einheiten der Stichprobe zusammen binomial mit den Parametern n und p_0 verteilt. Es gilt $\sum_{i=1}^{n} D_i \sim Bin(n, p_0)$.

Die Abnahmeprüfung hat für das Hypothesenpaar

$$H_0 : p \leq p_0$$
$$\text{vs.}$$
$$H_1 : p > p_0.$$

demnach die Form

$$\varphi(d_1, ..., d_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{n} d_i > k \\ 0 & \text{für } \sum_{i=1}^{n} d_i \leq k. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Dadurch, dass die Abnahmeprüfung zum Signifikanzniveau α durchgeführt werden soll, ergibt sich für den kritischen Wert k unter H_0

$$\begin{aligned}
& P(\textstyle\sum_{i=1}^n D_i > k) = \alpha \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - F_{Bin(n,p_0)}(k) = \alpha \\
\Leftrightarrow \quad & F_{Bin(n,p_0)}(k) = 1 - \alpha \\
\Leftrightarrow \quad & k = F^{-1}_{Bin(n,p_0)}(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Der kritische Wert k ist also das $(1-\alpha)$-Quantil der $Bin(n,p_0)$-Verteilung.
Im Folgenden wird gezeigt, wie die Operationscharakteristik der Entscheidungsregel (3.2.2) konkret für die Exponentialverteilung und für die Log-Normalverteilung hergeleitet werden kann.

3.2.1 Exponentialverteilung

Wenn die Lebensdauer jeder Einheit aus dem Los $Exp(\lambda)$-verteilt ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt vor dem Zeitpunkt t_e defekt ist, vom wahren Parameter λ abhängig und wird durch

$$P(T < t_e) = F_\lambda(t_e) = 1 - exp(-t_e \cdot \lambda) =: p_\lambda \tag{3.2.3}$$

bestimmt. Mit dieser Gleichung (3.2.3) und mit der Entscheidungsregel (3.2.2) kann die dazugehörige Operationscharakteristik angegeben werden. Mit Definition 3.25 ist die OC-Funktion dieser Abnahmeprüfung

$$\begin{aligned}
L(p_\lambda|n,k) &= P_\lambda(\varphi(d_1,...,d_n) = 0) \\
&= P_\lambda\left(\sum_{i=1}^n D_i \leq k\right) \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p_\lambda^i \cdot (1-p_\lambda)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot (1 - exp(-t_e \cdot \lambda))^i \cdot exp(-t_e \cdot \lambda)^{n-i} \\
&= L(\lambda|n,k,t_e).
\end{aligned}$$

Die OC-Funktion ist also die Verteilungsfunktion einer $Bin(n, F_\lambda(t_e))$-Verteilung.
Haben sich Hersteller und Abnehmer auf eine Prüfzeit t_e geeinigt, kann mit dem Al-

gorithmus von Guenther der Stichprobenumfang und der kritische Wert k bestimmt werden, so dass für die Ausschussquote p_0

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p_0^i \cdot (1-p_0)^{n-i} \geq 1-\alpha$$

gilt und für einen Losschlechtanteil $p_1 > p_0$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p_1^i \cdot (1-p_1)^{n-i} \leq \beta$$

ist.

3.2.2 Log-Normalverteilung

Die Argumentation der Herleitung der OC-Funktion für logaritmisch normalverteilte Lebensdauern ist äquivalent zu der Herleitung für exponentialverteilte Lebensdauern. Allerdings wird es etwas komplexer, weil die LN-Verteilung zwei charakteristische Parameter hat.

Wenn die Lebensdauer jeder Einheit aus dem Los $LN(\mu, \sigma^2)$-verteilt ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt vor dem Zeitpunkt t_e defekt ist, von den wahren Parametern μ und σ^2 abhängig. Es wird aber angenommen, dass σ^2 bekannt ist. Somit ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(T < t_e) = F_\mu(t_e) = \Phi\left(\frac{\log t_e - \mu}{\sigma}\right) =: p_\mu \tag{3.2.4}$$

nur noch von μ abhängig. Analog zu Kapitel 3.2.1 wird die OC-Funktion wie folgt bestimmt

$$\begin{aligned} L(p_\mu|n,k) &= P_\mu(\varphi(d_1,...,d_n) = 0) \\ &= P_\mu\left(\sum_{i=0}^{n} D_i \leq k\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p_\mu^i \cdot (1-p_\mu)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \Phi\left(\frac{\log t_e - \mu}{\sigma}\right)^i \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\log t_e - \mu}{\sigma}\right)\right)^{n-i} \\ &= L(\mu|n,k,t_e,\sigma). \end{aligned}$$

Diese Operationscharakteristik ist die Verteilungsfunktion der $Bin\left(n, \Phi\left(\frac{\log t_e - \mu}{\sigma}\right)\right)$-Verteilung.

Damit für Hersteller und Abnehmer die Fehler 1. und 2. Art akzeptabel sind, kann der Stichprobenplan wieder mittels des Algorithmus von Guenther bestimmt werden (Härtler, 1983, S. 192 ff.).

3.3 Messende Abnahmeprüfungen

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Abnahmeprüfungen sind End-of-Life-Tests. Die Produkte werden so lange beobachtet bis alle defekt sind. Erst nach Abschluss der Beobachtungen wird eine Entscheidung bezüglich der Qualitätslage getroffen.

3.3.1 Exponentialverteilung

Zunächst werden für die Abnahmeprüfung die Hypothesen festgelegt. Der Abnehmer möchte sicher sein, dass die Ware den Zuverlässigkeitsanforderungen entspricht. Dazu soll die Ware den maximalen Losschlechtanteil von p_0 haben. Der Losschlechtanteil ist die Ware, die vor dem festgelegten Zeitpunkt t_0 defekt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil nicht vor dem Zeitpunkt t_0 defekt ist, soll mindestens $1 - p_0$ sein. Dieses ist durch $S(t_0) \geq 1 - p_0$ gegeben. Daraus resultieren die Hypothesen

$$\begin{gathered} H_0 : S(t_0) \geq 1 - p_0 \\ \text{vs.} \\ H_1 : S(t_0) < 1 - p_0. \end{gathered}$$

Die Überlebensfunktion der Exponentialverteilung ist aus Definition 3.12 bekannt. Im Folgenden wird anschaulich die Nullhypothese umformuliert.

$$\begin{aligned} & H_0 : S(t_0) \geq 1 - p_0 \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : exp(-\lambda \cdot t_0) \geq 1 - p_0 \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : -\lambda \cdot t_0 \geq \log(1 - p_0) \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : \lambda \leq -\frac{\log(1 - p_0)}{t_0} =: \lambda_0 \end{aligned}$$

Mit der Alternativhypothese wird äquivalent verfahren, so dass die zu prüfenden Hypothesen

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0$$
$$\text{vs.}$$
$$H_1 : \lambda > \lambda_0$$

sind. Dieses sind nun Hypothesen eines einfachen Parametertests einer Exponentialverteilung. Für die Teststatistik wird der Maximum-Liklihood-Schätzer der Exponentialverteilung für den Erwartungswert verwendet. Der Maximum-Liklihood-Schätzer der Stichprobe $t = (t_1, ..., t_n)$ ist durch

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_{ML}} = \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{3.3.1}$$

gegeben. Auf die Herleitung des Maximum-Liklihood-Schätzers wird an dieser Stelle verzichtet und auf Kahle/Liebscher, 2013, Seite 110 ff. verwiesen. Als Teststatistik wird

$$TS(t) = \frac{n}{\hat{\lambda}_{ML}} = \sum_{i=1}^{n} t_i \tag{3.3.2}$$

verwendet. Da nun als Teststatistik die Verteilung der Summe von exponentialverteilten Zufallsvariablen aus Satz 3.16 bekannt ist, wird folgender Test als Abnahmeprüfung durchgeführt.

Satz 3.27 (Parametertest von einer Exponentialverteilung)
Seien $T_1, ..., T_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $T_1 \sim Exp(\lambda)$. Sei $q_{Erl(\lambda,n)}(1-\alpha)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der $Erl(\lambda, n)$-Verteilung. Dann ist

$$\varphi(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} t_i < q_{Erl(\lambda_0,n)}(\alpha) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

ein Test zum Signifikanzniveau α für die Hypothesen

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \lambda > \lambda_0$$

(vgl. Hartung et al., 2009, S.224 f.).

Beweis Satz 3.27:

$$\begin{aligned} P(\varphi(T_1, ..., T_n) = 1) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i > q_{Erl(\lambda_0,n)}(1-\alpha)\right) \\ &= 1 - F_{Erl(\lambda_0,n)}(q_{Erl(\lambda_0,n)}(1-\alpha)) \\ &= 1 - (1-\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

□

Ein Los wird also zurückgewiesen, wenn der Parametertest abgelehnt wird.

3.3.2 Log-Normalverteilung

Für die Abnahmeprüfung bei Produkten mit einem log-normalverteilten Qualitätsmerkmal ist die Vorgehensweise analog der Abnahmeprüfung der Exponentialverteilung. Die maximale Ausschussquote soll wieder p_0 sein, was zu folgenden Hypothesen führt

$$\begin{gathered} H_0 : S(t_0) \geq 1 - p_0 \\ \text{vs.} \\ H_1 : S(t_0) < 1 - p_0. \end{gathered}$$

Durch die bekannte Überlebensfunktion der Log-Normalverteilung aus Definition 3.19 wird das Testproblem am Beispiel der Nullhypothese transformiert.

$$\begin{aligned} & H_0 : S(t_0) \geq 1 - p_0 \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : 1 - \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \geq 1 - p_0 \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) \leq p_0 \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : \frac{\log t - \mu}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(p_0) \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : \log t - \mu \leq \sigma \cdot \Phi^{-1}(p_0) \\ \Leftrightarrow \quad & H_0 : \mu \geq \log t - \sigma \cdot \Phi^{-1}(p_0) =: \mu_0 \end{aligned}$$

Sollte die Standardabweichung σ unbekannt sein, muss mit einem Test gezeigt werden, dass $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ist. Dann muss jedoch der Aspekt des multiplen Testens beachtet werden. Das Problem des multiplen Testens wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, weil angenommen wird, dass σ bekannt ist.
Für ein $p_0 = 0.5$ ist die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq \log t$, weil $\Phi^{-1}(0.5) = 0$ ist. Das bedeutet, dass die Nullhypothese unabhängig von der Standardabweichung ist und damit ein möglicher Test vermieden werden kann, sollte σ unbekannt sein. Andernfalls ($p_0 \neq 0$) hängt die Nullhypothese immer von σ ab.

Vorausgesetzt die Standardabweichung σ ist bekannt, kann für das vorliegende Testproblem der Gauß-Test verwendet werden.

Satz 3.28 (Gauß-Test)
Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Dabei ist σ^2 *bekannt und* μ *unbekannt. Sei weiter* $q_{N(0,1)}(\alpha)$ *das* α*-Quantil der* $N(0,1)$*-Verteilung. Dann ist*

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} < q_{N(0,1)}(\alpha) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

ein Test zum Signifikanzniveau α *für die Hypothesen*

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \ vs.\ H_1 : \mu < \mu_0$$

(vgl. Hartung et al., 2009, S.134 f.).

Beweis Satz 3.28:

$$\begin{aligned} P(\varphi(X_1,...,X_n) = 1) &= P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} < q_{N(0,1)}(\alpha)\right) \\ &= \Phi(q_{N(0,1)}(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

□

Der Gauß-Test setzt normalverteilte Zufallsvariablen voraus. Die beobachteten Lebenszeiten t aus der Stichprobe müssen logarithmiert werden, damit der Test verwendet werden darf. Wie schon beschrieben gilt für $T \sim LN(\mu,\sigma^2)$, dass $\log T \sim N(\mu,\sigma^2)$-verteilt ist.

Kapitel 4

Ablauf der Simulationsstudie

In diesem Kapitel wird erklärt, wie der Programmcode für die Simulationen aufgebaut ist. Das Ziel der Simulationen ist, die Operationscharakteristiken für die messenden Abnahmeprüfungen mit exponential- und mit logarithmisch normalverteilten Lebensdauern von Loseinheiten darzustellen. Da die Operationscharakteristiken von verschiedenen Parametern abhängen, sind diese Funktionen mehrdimensional. Deswegen wird jeweils nur ein Parameter variiert und alle anderen bleiben fest, um Veränderungen der OC-Funktionen eindeutig auf jenen variablen Parameter zurückführen zu können. Mit der simulierten OC-Funktion werden approximativ die Wahrscheinlichkeiten bestimmt, das Los bei vorliegendem Parametern zu akzeptieren.

Es wird die Programmiersprache R (R Core Team, 2013) verwendet. Um die Simulationen zu optimieren, wird der Programmcode unter Verwendung der Pakete "parallel" und "Rmpi" parallelisiert. Der gesamte im Folgenden erklärte Programmcode ist im Anhang auf der CD einsehbar.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das Vorgehen für die Exponentialverteilung erklärt. Anschließend folgt die Log-Normalverteilung.

4.1 Simulation exponentialverteilter Lebensdauern

Für die zu simulierende Operationscharakteristik wird die umgeformte Nullhypothese aus Kapitel 3.3.1

$$H_0 : \lambda \leq -\frac{\log(1 - p_0)}{t_0} =: \lambda_0$$

verwendet. Der dazugehörige Test wird in Satz 3.27 beschrieben.

Zunächst wird die Simulation eines Punkts in der OC-Funktion für ein beliebiges $\lambda_b > 0$ beschrieben. Es werden n $Exp(\lambda_b)$-verteilte Zufallszahlen erzeugt, die als Stichprobe fungieren. Mit dieser Stichprobe wird der Parametertest zum Niveau α mit Vorgaben von p_0 und t_0 durchgeführt und die Testentscheidung (1 oder 0) gespeichert. Das Ziehen der Zufallszahlen und die anschließende Durchführung des Tests wird für das λ_b 250 000-mal wiederholt und der Anteil der abgelehnten Tests bestimmt. Die hohe Anzahl an Wiederholungen stellt sicher, dass sich die relative Häufigkeit der abgelehnten Nullhypothesen gut an die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese bei vorliegendem λ_b zu verwerfen, annähern kann (Starkes Gesetz der Großen Zahlen, vgl. Fahrmeir et al., 2010, S. 311 ff.). Da der bestimmte Anteil den Wert der Gütefunktion für das λ_b angibt, wird der Anteil der abgelehnten Nullhypothesen von 1 abgezogen, um den Wert der OC-Funktion zu erhalten.

Dieser Vorgang wird nun für weitere λ um λ_0 wiederholt, um so jeweils die Punkte der Operationscharakteristik zu bestimmen.

Um Auswirkungen der Parameter zu identifizieren, werden der Stichprobenumfang n, die Lebensdauer t_0, die Ausschussquote p_0 und das Signifikanzniveau α variiert.

4.2 Simulation der logarithmisch normalverteilten Lebensdauern

Für die OC-Funktion des Gauß-Tests aus Satz 3.28 wird die Nullhypothese

$$H_0 : \mu \geq \log t - \sigma \cdot \Phi^{-1}(p_0) =: \mu_0$$

verwendet. Die Simulation der einzelnen Punkte der Operationscharakteristik wird analog zu Kapitel 4.1 durchgeführt. Für ein beliebiges μ_b werden n $N(\mu_b, \sigma^2)$-verteilte Zufallszahlen generiert, wobei die Varianz σ^2 vorgegeben ist. Um nun logarithmisch normalverteilte Zufallszahlen zu erhalten, müssten die erzeugten Zufallszahlen noch mittels der Exponentialfunktion transformiert werden. Da der Gauß-Test normalverteilte Zufallsvariablen fordert, würde die Transformation zu logarithmisch normalverteilten Zufallszahlen direkt wieder rückgängig gemacht werden. Daher ist diese Transformation nicht notwendig. Der Gauß-Test wird mit den erzeugten Zufallszahlen durchgeführt und die Testentscheidung gespeichert. Wie bei der Exponentialverteilung werden hier für jedes μ_b 250 000 Stichproben erstellt und die relative Häufigkeit der abgelehnten Nullhypothesen betrachtet. Dieser Anteil wird von 1 abgezogen, um den Wert der OC-Funktion an der Stelle μ_b zu erhalten.

Die vorgegebene Mindestlebensdauer t_0 wird als Erwartungswert der Log-Normalverteilung interpretiert. Mit einer ebenfalls vorgegeben Varianz werden durch Satz 3.21 die Parameter der Normalverteilung unter H_0 bestimmt. Mit Parametern aus einem Intervall um den Erwartungswert der Normalverteilung werden die Stichproben simuliert. Es werden der Stichprobenumfang n, der Parameter σ^2, die Mindestlebensdauer t_0, die Ausschussquote p_0 und das Signifikanzniveau α variiert, um die Auswirkungen auf die Operationscharakteristiken zu prüfen.

Kapitel 5

Auswertung der Simulationsstudie

5.1 Abnahmeprüfungen bei vorliegender Exponentialverteilung

Für die zu simulierende Operationscharakteristik werden beispielhafte Abnahmeprüfungen durchgeführt. Ein Unternehmen hat vor, sich von einem Hersteller Streichhölzer zu kaufen, die als Werbegeschenke verteilt werden sollen. Die Brenndauern der Streichhölzer seien exponentialverteilt. 50% der Streichhölzer sollen mindestens 10 Sekunden lang brennen, bevor sie wieder ausgehen. Für die Nullhypothese bedeutet das $H_0 : \lambda \leq -\frac{\log(1-p_0)}{t_0} = \frac{\log(1-0.5)}{10} = 0.0693 =: \lambda_0$. Die Operationscharakteristik wird für verschiedene Stichprobengrößen mit dem Niveau $\alpha = 0.05$ simuliert. In Abbildung 5.1 ist erkennbar, dass sich alle OC-Funktionen in dem Punkt $(0.0693, 0.95)$ schneiden. Dieser Punkt wird durch die Nullhypothese und dem Signifikanzniveau festgelegt. Es gilt $L(\lambda_0) = 1 - \alpha = 0.95 = L(0.0693)$. Weiter ist erkennbar, dass je kleiner das λ einer Stichprobe ist, desto eher wird das Los akzeptiert. Je mehr Loseinheiten untersucht werden, desto steiler ist die OC-Funktion. Das bedeutet, dass ein Test mit höherem Stichprobenumfang eine höhere Güte besitzt. Eine hohe Güte bedeutet für einen Test einen kleinen Fehler 2. Art. Es ist zu beobachten, dass der Stichprobenumfang die Güte des Tests nicht linear steigert. Dies ist in Abbildung 5.2 deutlich zu erkennen. In dieser Abbildung wird für den jeweiligen Losschlechtanteil die Annahmewahrscheinlichkeit dargestellt. Der Losschlechtanteil lässt sich über die Verteilungsfunktion des dazugehörigen λ berechnen. Für ein $p_1 = 0.6$ liegt der β-Fehler bei einer Stichprobengröße von 50 bei etwa 0.4. Verdreifacht man den Stichprobenumfang, so beträgt der Fehler 2. Art nur noch 0.05. Werden 200 Einheiten überprüft, ist der Fehler fast bei Null. Ana-

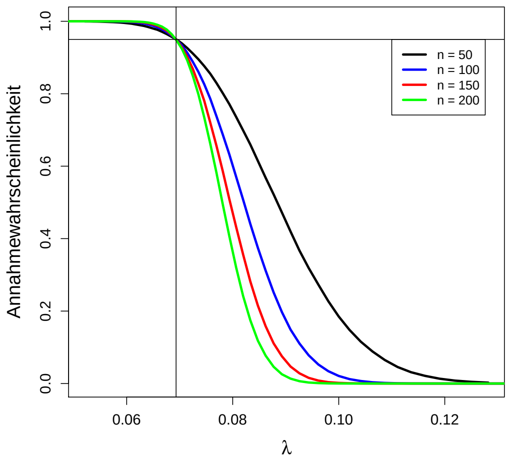

Abbildung 5.1: OC_λ mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ und $\alpha = 0.05$

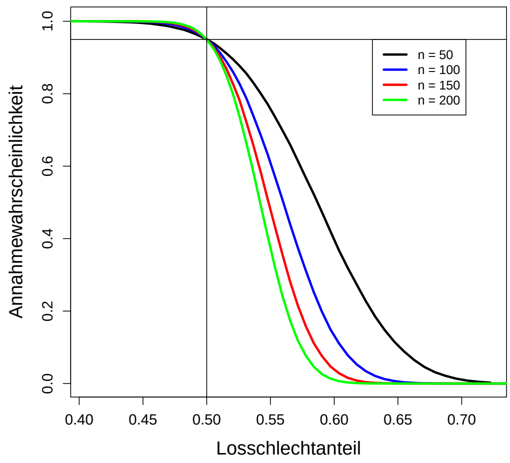

Abbildung 5.2: OC_p mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ und $\alpha = 0.05$

log zu vorheriger Abbildung schneiden sich alle Operationscharakteristiken in einem Punkt.

Um zu überprüfen, wie sich die Mindestbrenndauer t_0 auf die Kurven auswirkt, werden folgende Einstellung festgesetzt. Die Ausschussquote bleibt bei $p_0 = 0.5$, das Signifikanzniveau wird auf $\alpha = 0.05$ gesetzt und der Stichprobenumfang wird auf $n = 300$ erhöht. Dadurch, dass nur t_0 variiert wird, verändert sich für jede OC-Funktion nur die dazugehörige Nullhypothese $H_0 : \lambda \leq \frac{\log(0.5)}{t_0}$. Dies erklärt, warum die OC-Funktionen in Abbildung 5.3 mit längerer Mindestbrenndauer nach links verschoben sind.
Je größer die Mindestbrenndauer t_0 ist, desto kleiner wird der Parameterbereich der Nullhypothese. Weiter ist in Abbildung 5.4 zu erkennen, dass die Lebensdauer der Streichhölzer keinen Einfluss auf die Operationscharakteristik in Abhängigkeit von dem Losschlechtanteil hat. Alle Kurven zu den verschiedenen Testproblemen sind identisch.

Als Nächstes wird der Losschlechtanteil von 0.05 bis 0.20 in 0.05er Schritten variiert und die Mindestbrenndauer auf 10 Sekunden und der Stichprobenumfang auf 300 Teile gesetzt. Das Signifikanzniveau bleibt bei $\alpha = 0.05$. Durch unterschiedliche Werte für p_0 verändern sich jeweils die Nullhypothesen. Abbildung 5.5 zeigt, dass mit geringerem p_0 ein kleineres λ benötigt wird, um der Forderung nach einer geringeren Ausschussquote gerecht zu werden. Des Weiteren werden die Kurven steiler je kleiner die Ausschussquote wird. Der Test zur Nullhypothese $H_0 : \lambda \leq \frac{\log(1-0.05)}{10}$

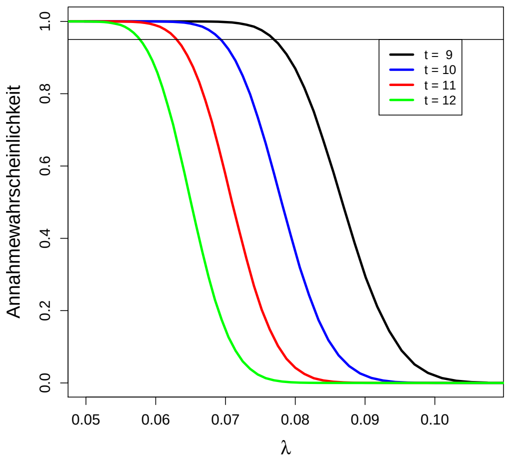

Abbildung 5.3: OC_λ mit $p_0 = 0.5$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$

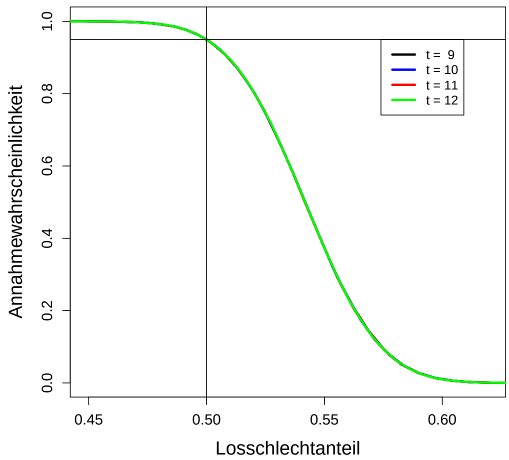

Abbildung 5.4: OC_p mit $p_0 = 0.5$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$

hat eine höhere Güte als der Test mit $H_0 : \lambda \leq \dfrac{\log(1 - 0.20)}{10}$. Für die OC-Funktionen in Abbildung 5.6 sind die selben Eigenschaften zu beobachten wie in den OC-Funktionen in Abbildung 5.5.

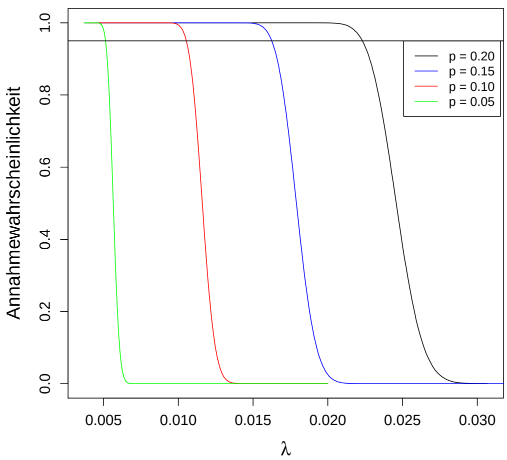

Abbildung 5.5: OC_λ mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$

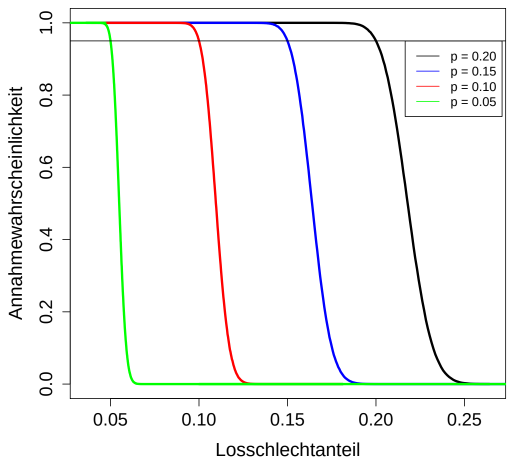

Abbildung 5.6: OC_p mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$

Zuletzt werden Veränderungen des Signifikanzniveaus auf die Operationscharakteristiken betrachtet. Dazu wird der Stichprobenumfang auf 300 Teile und der maximale Losschlechtanteil auf 0.5 gesetzt. Die Mindestlebensdauer bleibt bei 10 Sekunden. In den Abbildungen 5.7 und 5.8 sind die OC-Funktionen aufgetragen. Die senkrechte eingezeichnete Linie ist einmal bei $\lambda_0 = 0.0693$ und $p_0 = 0.5$ und dient zur Orientierung des Lesers. Die einzelnen Kurven sind von ihrer Form her nahezu identisch und nur auf der x-Achse verschoben. Dabei gilt, dass je kleiner der Fehler 1. Art festgesetzt ist, desto weiter ist die OC-Funktion in Richtung zunehmenden Losschlechtanteils verschoben.

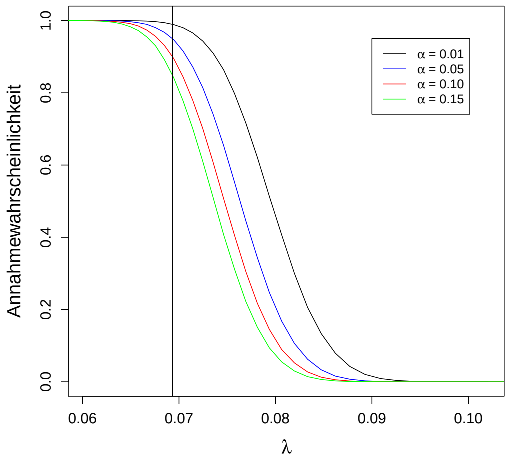

Abbildung 5.7: OC_λ mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $p_0 = 0.5$

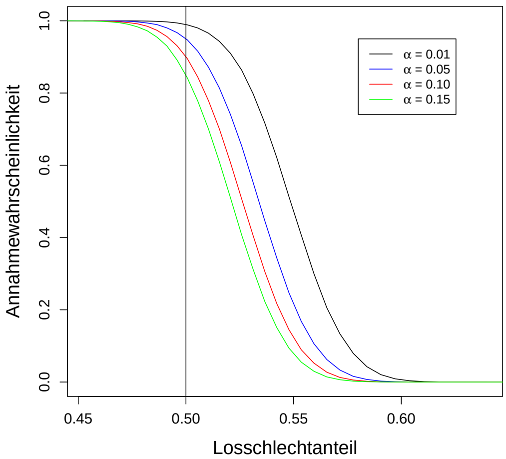

Abbildung 5.8: OC_p mit $t_0 = 10$, $n = 300$ und $p_0 = 0.5$

5.2 Abnahmeprüfungen bei vorliegender logarithmischer Normalverteilung

Mit der in Kapitel 4.1 erklärten Simulation werden im Folgenden verschiedene Operationscharakteristiken für den Gauß-Test aus Satz 3.28 erstellt. Zunächst wird betrachtet, wie sich der Stichprobenumfang auf die Kurven auswirkt. Als Vorgaben sind eine Mindestlebensdauer von 10 Sekunden und eine Varianz von 4 für die logarithmisch normalverteilten Lebensdauern verlangt. Die Stichprobenvarianz ist damit $\sigma^2 = 0.0392$ (vgl. Satz 3.21). Weiter ist das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ und die Ausschuss-quote sollte den Wert $p_0 = 0.5$ nicht überschreiten. Die Nullhypothese lautet also $H_0 : \mu \geq \log t - \sigma \cdot \Phi^{-1}(p_0) = \mu \geq log\ 10$. In Abbildung 5.9 ist zu erkennen, dass mit steigendem Stichprobenumfang die OC-Funktionen steiler werden. Wenn es finanziell und logistisch möglich ist, sollte bei einer Abnahmeprüfung also ein möglichst großer Stichprobenumfang untersucht werden, um den Fehler 2. Art zu minimieren. Auch in den OC-Funktionen in Abhängigkeit vom Losschlechtanteil ist zu sehen, dass die Güte einer Abnahmeprüfung mit steigendem Stichprobenumfang wächst.

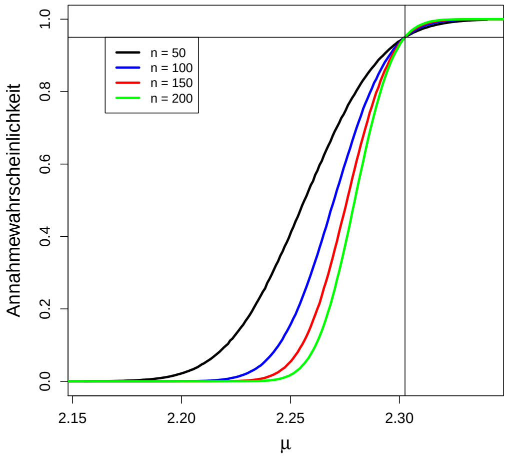

Abbildung 5.9: OC_μ mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $p_0 = 0.5$

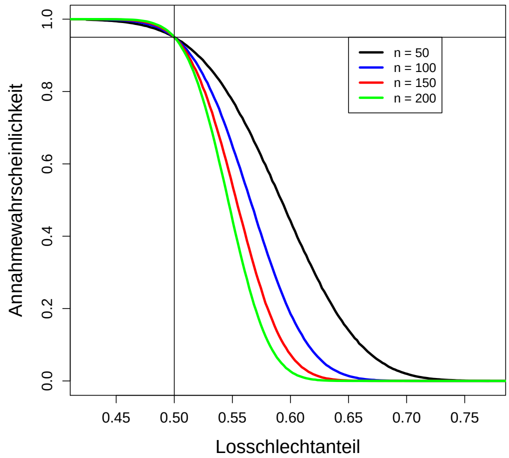

Abbildung 5.10: OC_p mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $p_0 = 0.5$

Als nächstes wird die Mindestlebensdauer t_0 variiert. Der Losschlechtanteil wird auf $p_0 = 0.5$ festgelegt, damit die Nullhypothese alleine von t_0 abhängig ist. Für die Simulationen werden jeweils $\sigma^2 = 0.0392$, $n = 300$ und $\alpha = 0.05$ gesetzt. In Abbildung 5.11 ist zu erkennen, dass die Operationscharakteristiken nur verschoben sind und die identische Form besitzen.

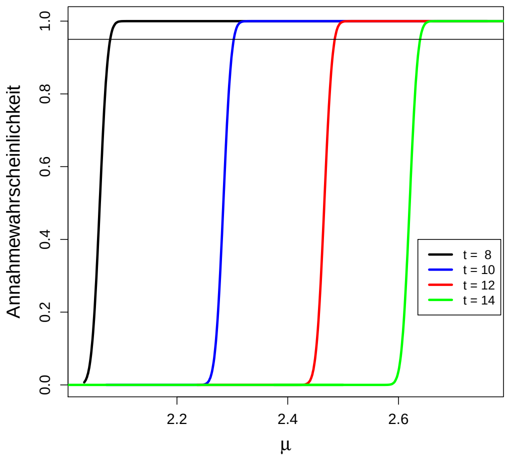

Abbildung 5.11: OC_μ mit $p_0 = 0.50$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

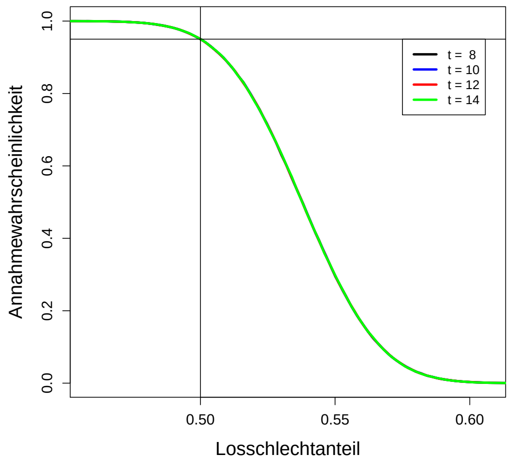

Abbildung 5.12: OC_p mit $p_0 = 0.50$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

Die Verschiebung resultiert aus den verschiedenen Nullhypothesen. Auf die OC-Funktion von p haben die unterschiedlichen Mindestlebensdauern keinen Einfluss. Daher überlagern sich die simulierten Funktionen in Abbildung 5.12.

Im Folgenden wird geprüft, wie sich verschiedene Ausschussquoten auf die Kurven auswirken. Dazu bleiben die Forderung der Mindestlebensdauer von 10 Sekunden und einer Varianz von 4 bestehen. Daraus resultiert ein $\sigma^2 = 0.0392$ (vgl. Satz 3.21). Das Signifikanz wird auf $\alpha = 0.05$ und der Stichprobenumfang auf $n = 300$ gesetzt. Da die Ausschussquoten nun in jeder Prüfung unterschiedlich sind, gibt es auch verschiedene Nullhypothesen $H_0 : \mu \geq \log t - \sigma \cdot \Phi^{-1}(p_0)$, die von p_0 abhängig sind. In Abbildung 5.13 ist zu erkennen, dass für ein kleineres p_0 ein größeres μ gefordert wird, um das Los zu akzeptieren. Weiter ist festzustellen, dass die Kurven steiler werden, wenn die Ausschussquote geringer wird.

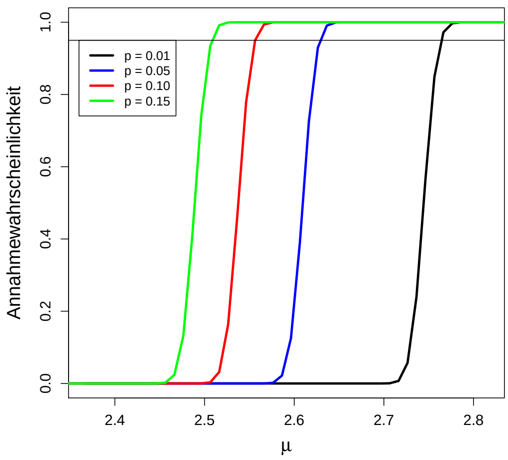

Abbildung 5.13: OC_μ mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$

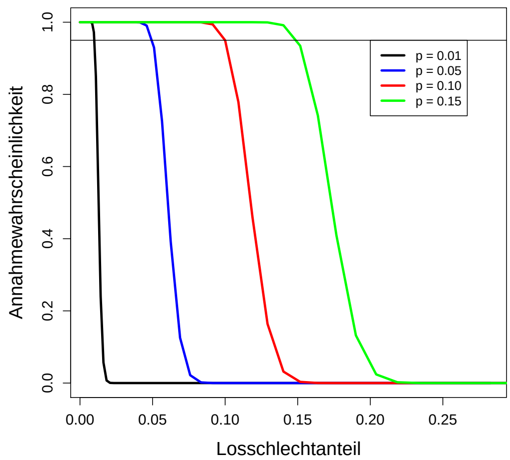

Abbildung 5.14: OC_p mit $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$

Für Veränderungen beim Signifikanzniveau werden die Parameter wie bekannt konstant gesetzt. Mit $n = 300$, $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$ und $\sigma^2 = 0.0392$ sind die Operationscharakteristiken für die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq log\ 10$ mit unterschiedlichen Signifikanzniveaus in Abbildungen 5.15 und 5.16 aufgetragen. Die eingezeichneten Senkrechten sind bei $\mu_0 = log\ 10$ und $p_0 = 0.5$. Die einzelnen OC-Funktionen sind auf der x-Achse verschoben.

Bei den Auswirkungen der Varianz der Lebensdauern werden die üblichen Parameter ($n = 300$, $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$) konstant eingestellt. Die Varianzen der Lebensdauern werden mit 3, 4, 5 und 6 überprüft. Mit diesen Varianzen werden

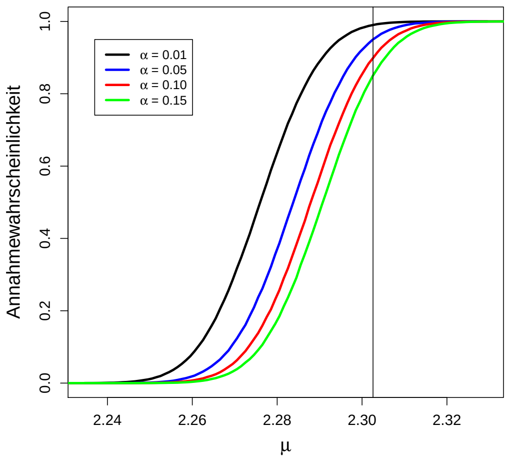

Abbildung 5.15: OC_μ mit $p_0 = 0.5$, $\sigma^2 = 0.0392$, $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$

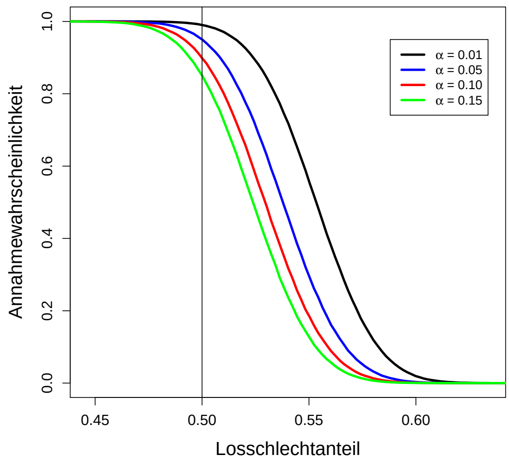

Abbildung 5.16: OC_p mit $p_0 = 0.5$, $\sigma^2 = 0.0392$, $t_0 = 10$, $\sigma^2 = 0.0392$ und $n = 300$

durch Satz 3.21 die einzelnen Parameter σ^2 berechnet. In den Legenden in Abbildungen 5.17 und 5.18 stehen die Standardabweichungen der Stichproben. Weil eine maximale Ausschussquote von $p_0 = 0.5$ gefordert wird, ist die Nullhypothese nicht von σ abhängig. Dadurch gehören alle Operationscharakteristiken zur selben Nullhypothese. Es zeigt sich, dass mit geringerer Varianz die Güte der Abnahmeprüfung steigt. Auf die OC-Funktion vom Losschlechtanteil hat die Varianz keinen Einfluss. In den Abbildungen 5.19 und 5.20 wird im Vergleich zur Variation mit den Varianzen oben nun der Losschlechtanteil auf $p_0 = 0.10$ gesenkt. Die restlichen Parameter bleiben fest. Die Operationscharakteristiken in Abbildung 5.20 sind identisch und somit unabhängig von σ. In Abbildung 5.19 ist dieselbe Beobachtung zu sehen wie in Abbildung 5.17. Je kleiner σ, desto steiler wird die OC-Funktion. Zusätzlich ist eine Verschiebung zu erkennen, die auf die unterschiedlichen Nullhypothesen $H_0 : \mu \geq \log\ 10 - \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.1)$ zurückzuführen ist. Je kleiner σ, desto kleiner ist das μ_0 aus der Nullhypothese.

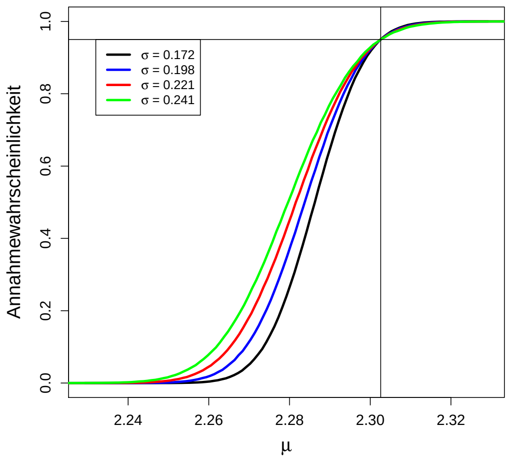

Abbildung 5.17: OC_{μ} mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

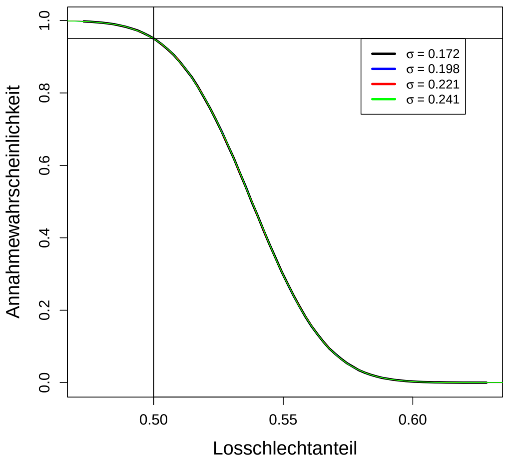

Abbildung 5.18: OC_p mit $p_0 = 0.5$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

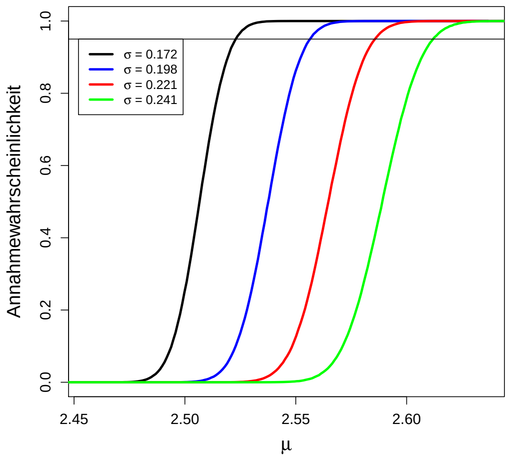

Abbildung 5.19: OC_{μ} mit $p_0 = 0.10$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

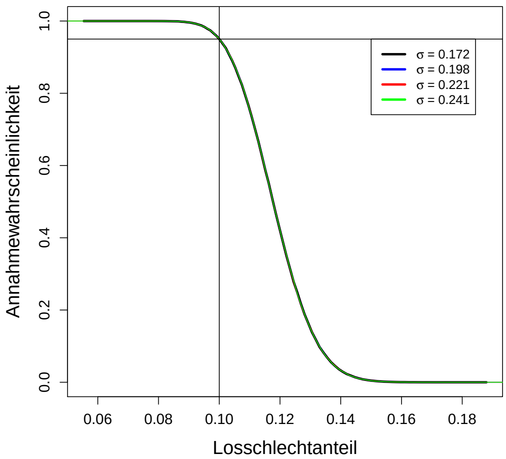

Abbildung 5.20: OC_p mit $p_0 = 0.10$, $t_0 = 10$, $\alpha = 0.05$ und $n = 300$

5.3 Zusammengefasste Auswirkungen

Die Auswirkungen der veränderten Parameter der Abnahmeprüfungen von exponential- und logarithmisch normalverteilten Lebensdauern können wie in Tabelle 5.1 folgendermaßen zusammengefasst werden. Dabei wird “nicht vorhanden“ mit “n.v.“ abgekürzt und “-“ bedeutet, dass es keine Auswirkungen gibt.

	für $Exp(\lambda)$		für $LN(\mu, \sigma^2)$	
	OC_λ	OC_p	OC_μ	OC_p
$n \uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$
$n \downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$
$t_0 \uparrow$	$\lambda_0 \downarrow$	-	$\mu_0 \uparrow$	-
$t_0 \downarrow$	$\lambda_0 \uparrow$	-	$\mu_0 \downarrow$	-
$p_0 \uparrow$	$\lambda_0 \uparrow$	$p_0 \uparrow$	$\mu_0 \downarrow$	$p_0 \uparrow$
$p_0 \downarrow$	$\lambda_0 \downarrow$	$p_0 \downarrow$	$\mu_0 \uparrow$	$p_0 \downarrow$
$\alpha \uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$	Güte$\uparrow$
$\alpha \downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$	Güte$\downarrow$
$\sigma^2 \uparrow$	n.v.	n.v.	Güte$\downarrow$, $\mu_0 \uparrow$	-
$\sigma^2 \downarrow$	n.v.	n.v.	Güte$\uparrow$, $\mu_0 \downarrow$	-

Tabelle 5.1: Auswirkungen der unterschiedlichen Parameter auf die Operationscharakteristiken

Wird der Stichprobenumfang n erhöht, werden die einzelnen Operationscharakteristiken steiler und besitzen eine höhere Güte.

Eine Veränderung der Mindestlebensdauer hat eine Verschiebung der OC-Funktionen in Abhängigkeit des Parameters der Nullhypothese zur Folge. Die OC-Funktionen in Abhängigkeit des Losschlechtanteils sind von der Mindestlebensdauer t_0 unabhängig. Eine Verschiebung der Kurven bewirkt auch die Variation des Signifikanzniveaus α. Je größer der Fehler 1. Art sein darf, desto kleiner wird der Fehler 2. Art bei gleichem auf der x-Achse abgetragener Parameter. Eine Senkung der maximalen Ausschussquote hat zunächst Auswirkungen auf die Nullhypothese. Des Weiteren sind die einzelnen Kurven fast identisch und nur auf der x-Achse verschoben. Jede Operationscharakteristik in Abhängigkeit von p verläuft durch ihren spezifischen Punkt $(p_0, 1-\alpha)$.

Bei der Abnahmeprüfung für logarithmisch normalverteilte Lebensdauern kann σ^2 noch variiert werden. Für einen Losschlechtanteil von $p_0 = 0.5$ hat σ^2 keinen Einfluss auf die Nullhypothese oder die vom Losschlechtanteil abhängige OC-Funktion. Für kleineres σ^2 werden die von μ abhängigen OC-Funktionen steiler und der Fehler 2. Art sinkt für gleiche μ. Wird der Losschlechtanteil auf $p_0 = 0.10$ gesenkt, so verschieben sich die Operationscharakteristiken von μ auf der x-Achse durch unterschiedliche Forderungen von μ_0 in der Nullhypothese. Auf die von p abhängige OC-Funktion hat σ^2 weiter keinen Einfluss.

5.4 Vergleich von zählender und messender Abnahmeprüfung

In diesem Abschnitt werden die Operationscharakteristiken von messender und zählender Abnahmeprüfung bei identischen Prüfungsvoraussetzungen und Nullhypothese verglichen.

Für den Vergleich bei exponentialverteilten Lebensdauern wird jeweils von einer Stichprobengröße von 300 Teilen ausgegangen. Des Weiteren soll der maximale Losschlechtanteil bei 0.5 bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ liegen. Die OC-Funktion der messenden Abnahmeprüfung wird simuliert, während für die zählende Abnahmeprüfung die exakte Funktion

$$L(p_\lambda|n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p_\lambda^i \cdot (1-p_\lambda)^{n-i}$$

aus Kapitel 3.2.1 verwendet wird. Für diese Funktion wird noch der kritische Wert k benötigt. Unter H_0 sind die Lebensdauern gerade $Bin(300, 0.5)$-verteilt, weil ein Produkt zu 50% gute Qualität besitzt. Der kritische Wert wird also über das 0.95-Quantil der $Bin(300, 0.5)$-Verteilung bestimmt und beträgt 164.

Die OC-Funktion der zählenden Abnahmeprüfung lautet also

$$L(p_\lambda|300,164) = \sum_{i=0}^{164} \binom{300}{i} \cdot p_\lambda^i \cdot (1-p_\lambda)^{300-i}.$$

In Abbildung 5.21 sind die OC-Funktionen der Abnahmeprüfungen dargestellt. Für Ausschussquoten unter p_0 sind die Funktionen nahezu identisch. Mit wachsendem $p > p_0$ ist die Kurve der messenden Abnahmeprüfung steiler als die der zählenden Prüfung, was auf eine höhere Güte der Prüfung hindeutet. Dass die Kurve der zählenden Prüfung nicht so steil ist, liegt an dem Informationsverlust im Aufbau der Prüfung. Es wird nur geprüft, ob ein Produkt bis zur Mindestlebensdauer noch nicht defekt ist und nicht, wie lange es danach noch fehlerfrei funktioniert.

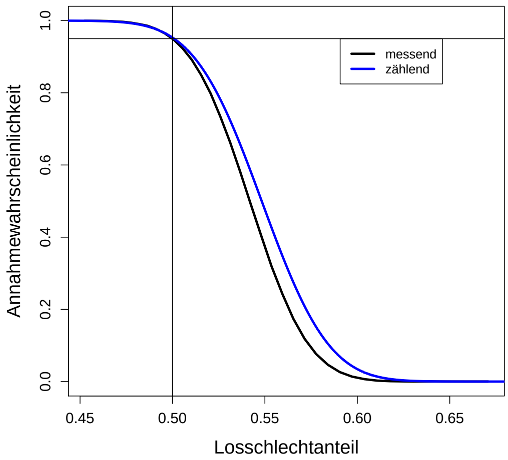

Abbildung 5.21: Operationscharakteristik der messenden und zählenden Prüfung im Vergleich

Bei dem Vergleich zwischen messender und zählenden Abnahmeprüfung bei logarithmisch normalverteilten Lebensdauern wird von identischen Voraussetzungen ausgegangen. Der Stichprobenumfang beträgt 300. 50% der Produkte sollen nicht vor 10 Sekunden bei einer Varianz von 4 ($\sigma^2 = 0.0392$) defekt sein. Das Signifikanzniveau wird auf $\alpha = 0.05$ festgelegt. Daraus resultiert die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq log\ 10$.

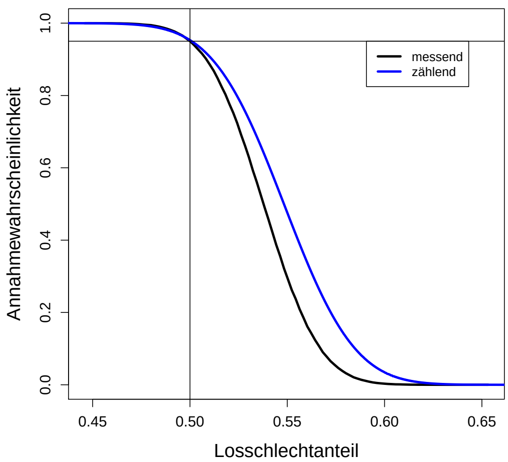

Abbildung 5.22: Vergleich der Operationscharakteristiken von messender und zählender Abnahmeprüfung

Die Kurve der messenden Prüfung wird simuliert und für die Kurve der zählenden Abnahmeprüfung wird die exakte Funktion aus Kapitel 3.2.2

$$L(p_\mu|n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p_\mu^i \cdot (1-p_\mu)^{n-i}$$

benutzt. Unter H_0 sind die Lebensdauern analog zu oben $Bin(300, 0.5)$-verteilt. Damit ist auch der kritische Wert identisch (k=14). Daher besitzt die Operationscharakteristik $L(p_\mu|300, 164)$ dieselbe Form wie $L(p_\lambda|300, 164)$.

In Abbildung 5.22 zeigt sich, dass die messende Abnahmeprüfung eine höhere Güte als die zählende Prüfung besitzt. Dies ist wieder mit dem Informationsverlust im Design der Prüfung zu begründen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wird eine Simulationsstudie über Operationscharakteristiken für Parametertests bei exponential- und logarithmisch normalverteilten Lebensdauern von Produkten durchgeführt. In Kapitel 2 werden zunächst einleitend die Begriffe Qualität und Zuverlässigkeit und der Ablauf einer Abnahmeprüfung eingeführt. Darüber hinaus wird durch die "fünf M" erklärt, wie es zu Qualitätsschwankungen innerhalb einer Produktion kommen kann. In Kapitel 3.1 werden theoretische Konzepte vorgestellt. Es folgt ein Einblick in die statistische Testtheorie und deren möglichen Fehlentscheidungen bei der Durchführung eines statistischen Tests. Weiter wird die Operationscharakteristik definiert, die die Wahrscheinlichkeit für einen Parameter angibt, die Nullhypothese nicht abzulehnen, was in der Qualitätssicherung bedeutet, ein Los vom Hersteller zu akzeptieren. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden die Abläufe der zählenden und messenden Abnahmeprüfungen von exponential- und logarithmisch normalverteilten Lebensdauern hergeleitet. In Kapitel 4 wird die Simulation der messenden Operationscharakteristiken der interessierenden Verteilungen veranschaulicht. Für die Auswertung der Simulationsstudie in Kapitel 4 können die Auswirkungen der veränderten Parameter der Abnahmeprüfungen von exponential- und logarithmisch normalverteilten Lebensdauern zusammengefasst werden. Die unterschiedlichen Parametereinstellungen können die Güte der OC-Funktionen oder die Nullhypothesen beeinflussen.

Beim Vergleich der Operationscharakteristiken von zählender und messender Abnahmeprüfung zu gleichen Bedingungen ist jeweils festzustellen, dass die messende Abnahmeprüfung eine höhere Güte besitzt und somit den Fehler 2. Art besser kontrolliert. Für Abnahmeprüfungen werden also messende Prüfungen mit einem möglichst hohen Stichprobenumfang empfohlen, um sicherzugehen, dass die bestellte Ware den Qualitätsansprüchen gerecht wird.

In weiterführenden Untersuchungen kann geprüft werden, in welchem Maß unterschiedliche Parametereinstellungen messbare Auswirkungen auf die Operationscharakteristiken haben. Da in den durchgeführten Simulationen für log-normalverteilte Lebensdauern die Varianz vorgegeben ist, sollte auch die OC-Funktion mit unbekannter Varianz analysiert werden. Dies kann zu dem Aspekt des multiplen Testens führen, was ebenfalls berücksichtigt werden muss.

Anhang A

Anhang

R-Code

Im Folgenden sind die Simulation verwendeten Funktionen aufgeführt. Die Ausführungen und Ergebnisse der Simulationen, sind auf der CD einsehbar.

```
#####  exp_test()  Funktion für den Test
## H_0: lambda <= lambda_null = -log(1-p)/l
## H_0: S(l) <= 1-p_0
## H_0: p <= p_0
##
## Eingabe
##
##  lambda : echtes lambda der Stichprobe
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Losschlechtanteil p_0
##  alpha  : Niveau
##
##Ausgabe
##  0      : Los wird angenommen
##  1      : Los wird nicht angenommen

exp_test <- function(lambda, n, l, p, alpha){
  return(sum( rexp(n,lambda)) < qgamma(alpha, n, (-log(1-p)/l)))
}
```

```
## anteil_exp()
##
## Eingabe
##
##  lambda : echtes lambda der Stichprobe
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Losschlechtanteil p_0
##  alpha  : Niveau
##  r      : Anzahl an durchzuführender Tests
##
## Ausgabe
##   Anteil an nicht abgelehnten Nullhypothesen

anteil_exp <- function(lambda,n,l,p,alpha,r){
  1-mean( replicate(r,exp_test(lambda, n, l, p, alpha)) )
}   # Anteil entspricht angenommener Lose


## oc_exp()
##
## Eingabe
##
##  lambda : echtes lambda der Stichprobe
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Losschlechtanteil p_0
##  alpha  : Niveau
##  r      : Anzahl an durchzuführender Tests
##  k      : k * lambda ist kleinstes interessierendes lambda
##  g      : g * lambda ist kleinstes interessierendes lambda
##  s      : Schrittlänge zwischen k * lambda und g * lambda
##
## Ausgabe
##   Annahmewahrscheinlichkeiten der OC-Funktion
```

```
oc_exp <- function(n,alpha,l,p,r,k,g,s) {
  anteil <- numeric()
  lambda <- sort(1/seq(k*l, g*l, s))
  anteil <- parLapply(cl,lambda,anteil_exp,n=n,l=l,p=p,alpha=alpha,r=r)
  return(anteil)
}    # Werte der OC-Funktion

#############################

## umrechnung() - Umrechnung von Erwartungswert und Varianz
## von LogNV charakteristische Parameter
##
## Eingabe:
##
## E  : Erwartungswert der LN
## V  : Varianz der LN
##
## Ausgabe:
##  Vekor mit mu und sigma^2
##

umrechnung <- function(E,V){
  sigmaq <- log(V/(E^2) +1)
  mu <- log(E)-sigmaq/2
  return(c(mu,sigmaq))
}

#####  log_test()  Funktion für den Test
## H_0 : mue >= log( l ) - tau_(p_0)*sigma
## H_0 : S(l) >= 1-p_0
## H_0 : p <= p_0
##
## Eingabe
##
##  E      : Erwartungswert der Normalverteilung
##  V      : Varianz der Log-NV
```

```
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Aussschussquote
##  alpha  : Signifikanzniveau
##
##Ausgabe
##  0      : Test lehnt nicht ab , Los annehmen
##  1      : Test lehnt ab, Los nicht annehmen
##
##
## Bemerkung: bekannte Varianz in H_0

log_test <- function(E, V, n, l, p, alpha) {
    parameter_NV <- umrechnung(l,V)    # Parameter der NV unter H_0
    Stichprobe <- rnorm(n,E , sqrt(parameter_NV[2]))
    TS <- sqrt(n)*( mean(Stichprobe) -
             (log(l)-qnorm(p)*sqrt(parameter_NV[2])))
             / sqrt(parameter_NV[2])  # TS vom Gauß-Test

    return(TS<qnorm(alpha))
            # TRUE : Nullhypothese ablehnen  (1)
}

## anteil_log()
##
## Eingabe
##
##  E      : echtes mu in der Stichprobe
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Losschlechtanteil p_0
##  alpha  : Niveau
##  r      : Anzahl an durchzuführender Tests
##
## Ausgabe
##   Anteil an nicht abgelehnten Nullhypothesen
```

```
anteil_log <- function(E, V, n, l, p, alpha, r){
  1-mean( replicate(r,log_test(E, V, n, l, p, alpha)) )
}   #### Anteil angenommer Lose

## oc_exp()
##
## Eingabe
##
##  n      : Stichprobengröße
##  l      : Mindestlebensdauer
##  p      : Losschlechtanteil p_0
##  alpha  : Niveau
##  r      : Anzahl an durchzuführender Tests
##  k      : k * mu ist kleinstes interessierendes mu
##  g      : g * mu ist kleinstes interessierendes mu
##  s      : Schrittlänge zwischen k * mu und g * mu
##
## Ausgabe
##   Annahmewahrscheinlichkeiten der OC-Funktion

oc_log <- function(n,l, V, p,  s, alpha,r, k,g) {
  anteil <- numeric()
  mu <- umrechnung(l,V)[1]
  Erwartungswert <- seq(k*mu, g*mu, s)
  anteil <- parLapply(cl,Erwartungswert,anteil_log,V=V,
             n=n,l=l,p=p,alpha=alpha,r=r)
  return(anteil)
}   # Werte der OC-Funktion

########################################################
## Speziell für t_0 bei gleicher Varianz

log_test_t <- function(mu, V, n, l, p, alpha)
  Stichprobe <- rnorm(n,mu , sqrt(V))
  TS <- sqrt(n)*( mean(Stichprobe) -
```

```
        (l-qnorm(p)*sqrt(V) )) / sqrt(V)  # TS vom Gauß-Test
  return(TS<qnorm(alpha))
  # TRUE : Nullhypothese ablehnen  (1)
}

anteil_log_t <- function(E, V, n, l, p, alpha, r){
  1-mean( replicate(r,log_test_t(E, V, n, l, p, alpha)) )
}   #### Anteil angenommer Lose

oc_log_t <- function(n,l, V, p,  s, alpha,r, k,g) {
  anteil <- numeric()
  mu <- seq(k*l, g*l, s)
  anteil <- parLapply(cl,mu,anteil_log_t,V=V,
               n=n,l=l,p=p,alpha=alpha,r=r)
  return(anteil)
}
```

Literaturverzeichnis

Apple Inc. (1976): www.apple.com > de > supplierresponsibility, (10.02.2014).

Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I., Tutz, G. (2010): *Statistik*, 7. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

Härtler, G. (1983): *Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse*, 1. Auflage, VEB Verlag Technik, Berlin.

Hartung, J., Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2009) *Statistik*, 15. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.

Kahle, W., Liebscher, E. (2013): *Zuverlässigkeitsanalyse und Qualitätssicherung*, 1. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.

Lauber, R., Göhner, P. (1999): *Prozessautomatisierung 1*, 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin.

Meyna, A., Pauli, B. (2010): *Taschenbuch der Zuverlässigkeitstechnik*, 2. Auflage, Carls Hanser Verlag, München Wien.

Mosler, K., Schmid, F. (2006): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*, 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

OSRAM GmbH (1980): *Stern*, Ausgabe 42, Seite 39, Gruner + Jahn Verlag, Hamburg.

Rinne, H., Mittag, H.-J. (1995): *Statistische Methoden der Qualitätssicherung*, 3. Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien.

R Core Team (2013): *R: A language and environment for statistical computing.*, R Foundation for Statistical Computing, Wien.

R Core Team (2013): *parallel: Support for Parallel computation in R*, Version 3.0.2, R Foundation for Statistical Computing, Wien.

Tiede, M., Voß, W. (2000): *Schließen mit Statistik - Verstehen*, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Timischl, W. (2002): *Qualitätssicherung*, 3. Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien.

Yu, H. (2002). *Rmpi: Parallel Statistical Computing in R.* R News 2/2:10-14.

Erklärung

Eidesstattliche Erklärung des Urhebers

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht habe.

Dortmund, den	Ole-Kristian Wirtz