

Technische Universität Dortmund

Fakultät Statistik

Lehrstuhl für Statistik mit  
Anwendungen im Bereich der  
Ingenieurwissenschaften

Bachelorarbeit

**Vergleich von Tests für  
stochastische  
Differentialgleichungen für  
Risswachstum**

Verfasserin:

Anna Dustert

Betreuerin:

Prof. Dr. Christine Müller

06. Oktober 2022

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Problemstellung	5
2.1	Hinführung zum Thema	5
2.2	Problemstellung	6
2.3	Ziel des Berichtes	6
3	Statistische Methoden	7
3.1	Gleichung für das Wachstum von Ermüdungsrissen	7
3.1.1	Lösungen der Differentialgleichung	9
3.1.2	Nicht-lineare stochastische Modelle zur Beschreibung des Risswachstums	11
3.2	Bessere Modellierung des stochastischen Risswachstums	12
3.2.1	Stochastische Prozesse	12
3.2.2	Brownsche Bewegung	12
3.2.3	Stochastische Differentialgleichung	13
3.2.4	Diffusionsprozesse	14
3.3	Euler-Maruyama-Approximation	15
3.3.1	Aufstellen der stochastischen Differentialgleichung	15
3.3.2	Berechnung der Residuen	16
3.4	Die verwendeten Tests	17
3.4.1	Residuen-Momenten-Test	17
3.4.2	Tiefe-Tests	19
4	Statistische Auswertung	21
4.1	Implementierung in R	22
4.2	Deskriptive Auswertung	27
4.2.1	Betrachtung des ersten Parameters $\theta_1$	28
4.2.2	Betrachtung des zweiten Parameters $\theta_2$	30
4.2.3	Betrachtung des dritten Parameters $\theta_3$	31
4.2.4	Betrachtung des vierten Parameters $\theta_4$	33
4.2.5	Deskriptive Betrachtung der Residuen	33
4.3	Vergleich der Tests	36
4.3.1	Bei explosiv wachsenden Prozessen	37
4.3.2	Bei wenig Einfluss der Brownschen Bewegung auf die stochastischen Prozesse	42

4.4	Vergleich der Tests mit Ausreißern . . . . .	45
4.4.1	Hinzufügen der Ausreißer bei gleichen Testverfahren . . . . .	45
4.4.2	Neue Modellierung der Tests auf die Erreichung einer Robustheit gegenüber Ausreißern . . . . .	47
4.5	Vergleich der Ergebnisse mit denen einer leicht abgewandelten Modellgleichung . . . . .	53
5	Zusammenfassung	58
	Literaturverzeichnis	60
	Abbildungsverzeichnis	62
	Anhang	68
A	Zusätzliche Abbildungen	68

# 1 Einleitung

Die Menschheit baut seit mehreren tausend Jahren Brücken aus verschiedensten Materialien und versucht seither den Brückenbau immer weiter zu verbessern. Seit der Industrialisierung wurde versucht mit neuen Materialien wie Beton und Stahl den Brücken mehr Stabilität zu verleihen (Dacque 2012). Leider kommt es durch unterschiedlichste Ursachen immer wieder zu schlimmen Katastrophen bei Brückeneinstürzen, wie bei dem Einsturz der Autobahnbrücke „Polcevera-Viadukt“ in Genua, Italien im Jahr 2018 (Kölner Rundschau 2018). Durch solche Katastrophen bleibt die Frage nach der Verbesserung des Brückenbaus und einer möglichen Methode der Vorhersage nach dem Zeitpunkt von Materialversagen immer aktuell. In der Statistik wird versucht ein Materialversagen anhand von Ermüdungsrissen und ihrem Wachstum zu modellieren, um somit Rückschlüsse auf den Zeitpunkt des Materialversagens ziehen zu können. Dabei wird besonders das Material Stahlbeton betrachtet.

In dieser Arbeit wird eine stochastische Differentialgleichung aus deterministischen Gleichungen zur Modellierung solcher Ermüdungsrisse aufgestellt. Auf Grundlage dieser werden Tests anhand ihrer Ergebnisse in verschiedenen Ausgangssituationen verglichen. Der Vergleich der Tests ist dabei wichtig, da es noch keinen richtigen Test gibt, welcher diese Modellierung von Rissen exakt bestimmt. In dieser Arbeit werden deswegen zwei mögliche Methoden für die Konstruktion eines solchen Testes betrachtet. Mithilfe der Tests können Konfidenzintervalle, zu den Vermutungen bezüglich der Parameter der stochastischen Differentialgleichung, welche das Risswachstum beschreibt, aufgestellt werden und dadurch Prognosen gegeben werden. Die hergeleitete stochastische Differentialgleichung wird mittels einer Approximation implementiert und anschließend mit verschiedenen Zufallszahlen simuliert. Zunächst werden die Tests nur anhand dieser sich ergebenden Werte mit der stochastischen Differentialgleichung verglichen. Im Weiteren werden in die Werte der stochastischen Differentialgleichung zusätzlich additive Ausreißer integriert. Mittels dieser Ausreißer wird die Robustheit der Tests gegenüber diesen getestet und verglichen. Somit können sowohl die Vorteile als auch die Nachteile des jeweiligen Testes in den vorliegenden Ausgangssituationen ermittelt werden.

Für die Beantwortung dieser Fragestellung werden in Kapitel 2 zunächst eine Einführung und praktische Einordnung des Themenfeldes erfolgen. Daraufhin folgt im selben Kapitel die Erläuterung der Problemstellung, sowie die ausführliche Definition der Ziele des Berichtes. In dem darauf folgenden Kapitel 3 „Statistische Methoden“ werden die verwendeten Methoden ausführlich definiert und hergeleitet.

Zunächst wird die Gleichung für das Wachstum von Ermüdungsrissen eingeführt, sowie die benötigten Methoden zur Modellierung der Rissentstehung. Anschließend wird die verwendete stochastische Differentialgleichung aufgestellt und die angewendeten Tests erklärt. Im vierten Kapitel „Statistische Auswertung“ werden zunächst die Implementierungen in dem Software-Programm R (R Core Team 2021) erklärt. Anschließend erfolgt eine deskriptive Analyse der Ergebnisse, sowie der direkte Vergleich der Tests in verschiedenen Ausgangssituationen. Zusammengefasst und eingeordnet werden die Ergebnisse anschließend im Kapitel „Zusammenfassung“.

## 2 Problemstellung

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine praktische Einordnung des Themas, sowie die Hinführung zum Thema. Darauf folgt die Erläuterung der Problemstellung, welche in dieser Arbeit betrachtet wird, und eine genaue Definition der Ziele dieser Abschlussarbeit.

### 2.1 Hinführung zum Thema

Die Zuverlässigkeit von technischen Produkten hängt stark von der Ermüdung des Materials ab. Materialermüdung ist vor allem gegeben durch Risse, welche im Material entstehen und schließlich das Material sprengen werden lassen. Diese Risse werden auch Ermüdungsrisse genannt. Neben dem Risswachstum gibt es noch Korrosion, die ebenfalls zu einer Materialermüdung führen kann. In dieser Arbeit wird sich jedoch nur mit der Materialermüdung verursacht durch Risswachstum beschäftigt. Bei dieser Art der Materialermüdung entstehen Mikrorisse im Material, welche mithilfe eines Mikroskopes sichtbar gemacht werden können. Diese Mikrorisse werden nach bestimmten Lastzyklen betrachtet und ausgewertet, wodurch das jeweilige Risswachstum dokumentiert und analysiert werden kann. Neben Mikrorissen können aber auch deutlich größere Risse betrachtet werden, die sogenannten Makrorisse. Aus einem Mikroriss wird schließlich im Laufe der Zeit ein Makroriss, welcher mit dem bloßen Auge erkennbar ist. Durch das Wachstum von Ermüdungsrissen kommt es schlussendlich zum Scheitern beziehungsweise zum Bruch des Materials (Sobczyk und Spencer, Jr. 1992, S. 9). Dieses Materialversagen kann katastrophale Auswirkungen haben und zum Beispiel den Einsturz einer Brücke verursachen. Damit solche Katastrophen verhindert werden können, beschäftigt sich die Wissenschaft mit sogenannten Risswachstumsgleichungen. Diese Risswachstumsgleichungen ver-

suchen das Wachstum von Rissen beziehungsweise Ermüdungsrissen approximativ zu beschreiben. In diesem Bericht wird eine stochastische Differentialgleichung betrachtet, welche das Wachstum von Ermüdungsrissen beschreiben soll.

Auf Grund der Tatsache, dass dieses Themenfeld sehr groß ist, kann in dieser Arbeit nur ein kleiner Teil dessen betrachtet werden. Dazu wird im folgenden Unterkapitel die betrachtete Problemstellung erläutert.

## 2.2 Problemstellung

Bei der Betrachtung von entstehenden Ermüdungsrissen ist es wichtig Annahmen darüber zu treffen, wie sich diese Risse ausbreiten und zu versuchen, diese in mathematischen Gleichungen zu modellieren. Zusätzlich zu dem Problem der mathematischen Approximation des Risswachstums, existiert noch kein richtiges Testverfahren für die modellierten Risswachstumsgleichungen. Deswegen besteht das Ziel dieser Abschlussarbeit darin, die ausgewählten Testverfahren zu untersuchen, um festzustellen wie geeignet diese sind. Anhand von Tests mit Punkthypothesen lassen sich im Weiteren Konfidenzintervalle konstruieren, welche für eine Prognose des Materialversagens verwendet werden könnten.

In dieser Arbeit wird für die Simulation der Risse eine Modellierung mittels stochastischer Differentialgleichungen auf Grundlage einer der bekanntesten Risswachstumsgleichungen, der Paris-Erdogan Gleichung, gewählt. Anschließend werden mittels dreier Tests verschiedene Annahmen über die Parameter der modellierten Differentialgleichungen getestet. Dabei wird überprüft, wie gut der jeweilige Test anhand der simulierten Daten die wahren Parameter im Vergleich zu den zu testenden Parametern erkennt. Auf diese Weise lässt sich für die Daten eines echten Ermüdungsrisses herausfinden, welche Modellierung mit den entsprechenden Parametern den betrachteten Ermüdungsriss am besten beschreibt.

Somit ist es möglich, Aussagen zu dem weiteren Wachstum des interessierenden Risses zu treffen. Weitergehend können Schätzungen aufgestellt werden wann, nach diesem vermuteten Wachstum, das Material versagt.

## 2.3 Ziel des Berichtes

Das Ziel dieser aufgestellten stochastischen Differentialgleichung ist es eine Vorhersage zu treffen in Bezug auf das Risswachstum der Ermüdungsrisse. Beispielsweise wann eine bestimmte Risslänge zu einem bestimmten Zeitpunkt erreicht ist. Um somit abschätzen zu können, wie lange ein Material oder Produkt funktionsfähig ist.

---

In dieser Arbeit werden die verschiedenen Parameter dieser stochastischen Differentialgleichung analysiert. Anschließend sollen drei Tests auf die stochastische Differentialgleichung angewendet und anhand ihrer jeweiligen Güte verglichen werden. Die betrachteten Tests prüfen, ob der zu testende Parametervektor, mit möglichen Parametern der stochastischen Differentialgleichung, zu den gegebenen Residuen passen könnte. Praktisch angewendet werden zu gegebenen Risswachstumsdaten entsprechende Parameter für die stochastische Differentialgleichung gesucht, damit das Risswachstum mit diesen Parametern approximiert werden kann. Wenn bekannt ist, wie ein Risswachstum annähernd mittels mathematischen Formeln beschrieben werden kann, ist es möglich dieses Wachstum zu simulieren. Ziel dieser Abschlussarbeit ist es, anhand der Güte der Tests ihre Genauigkeit beim Testen der verschiedenen Parameter zu ergründen. Außerdem werden in verschiedenen Ausgangssituationen sowohl die Stärken als auch Schwächen der Tests erprobt und hervorgehoben.

### 3 Statistische Methoden

In diesem Kapitel werden die verwendeten statistischen Methoden, die dieser Arbeit zugrunde liegen, eingeführt. Dafür wird zunächst die berühmteste Gleichung, die Paris-Erdogan Gleichung, für das Wachstum von Ermüdungsrissen sowie ihre Lösungen eingeführt. Anschließend wird die Risswachstumsvorhersage auf Grundlage der zuvor aufgestellten Lösungen über nicht-lineare Modelle definiert. Daraufhin werden im Allgemeinen stochastische Differentialgleichungen sowie Diffusionsprozesse erklärt. Im Anschluss folgt die Definition der Brownschen Bewegung, ebenso wie die der Euler-Maruyama-Approximation. Mittels dieser wird die zu testende stochastische Differentialgleichung konkret aufgestellt, sowie die Berechnung der Residuen eingeführt. Abschließend werden die zu vergleichenden Tests hergeleitet und erläutert. Dabei wird der Residuen-Momenten-Test, sowie der Tiefe-Test 1 und 2 betrachtet.

#### 3.1 Gleichung für das Wachstum von Ermüdungsrissen

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Ermüdungsrissen, weswegen zunächst erklärt wird, was genau ein Ermüdungsriss ist. Im Grunde entstehen Ermüdungsrisse durch eine sich zyklisch ändernde Belastung. Das Material ist also sich ständig änderndem Druck ausgesetzt, wodurch zunächst Mikrorisse und anschließend Makrorisse entstehen. Für die Vorhersage des Risswachstums wird eine stochastische Differential-

gleichung verwendet, welche im Folgenden ausführlich erklärt wird.

Die berühmteste Gleichung für das Wachstum von Ermüdungsrissen ist die Paris-Erdogan Gleichung, welche gegeben ist durch:

$$\frac{da}{dN} = C(K)^m;$$

wobei  $a$  die Risslänge und  $N$  die Anzahl der Lastwechsel ist. Dies bedeutet, dass die Zeit mittels der Anzahl, wie oft ein Lastwechsel erfolgt ist, definiert wird, welches die Ermüdung darstellt. Weiterhin sind  $C$  und  $m$  Materialkonstanten und  $K$  der Faktor der Belastungsintensität. Damit folgt, dass  $K = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{2}$  die Spannweite des Stressintensitätsfaktors bildet. Dieser Faktor hängt unter anderem von der Risslänge  $a$  ab und ist wie folgt definiert:

$$K = Y \sqrt{P a};$$

wobei  $Y$  ein Geometrieparameter und  $P$  die Belastung darstellt. Die Belastung, dem das Material ausgesetzt ist, schwankt zwischen der maximalen Belastung  $P_{\max}$  und der minimalen Belastung  $P_{\min}$ , wodurch sich  $\frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}$  als Bereich der zyklischen Spannungsamplitude ergibt. Durch Verwendung dieser Schreibweise ergibt sich folgende Gleichung:

$$K = Y \sqrt{P a};$$

Mithilfe der vorherigen Ausführung lässt sich die Wachstumsgleichung wie folgt schreiben:

$$\frac{da}{dN} = C(Y \sqrt{P a})^m a^{m=2};$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Anzahl der Lastwechsel ein Maß für die Zeit ist, wird im Folgenden  $t$  statt  $N$  verwendet. Außerdem wird die Länge im Folgenden durch die Variable  $l$  anstatt  $a$  dargestellt. Darüber hinaus wird zur Vereinfachung der Differentialgleichung  $\gamma_1 = C(Y \sqrt{P})^m$  und  $\gamma_2 = \frac{m}{2}$  gesetzt, sodass sich daraus eine gewöhnliche Differentialgleichung mit zwei unbekanntem Parametern ergibt:

$$\frac{dl}{dt} = \gamma_1 l^{\gamma_2};$$

Diese beiden unbekanntem Parameter  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  können anhand von Daten gesetzt werden. Kurz noch zur Interpretation dieser deterministischen Differentialgleichung: Diese Ableitung  $\frac{dl}{dt}$  nach der Zeit  $t$  stellt im Grunde genommen den Zuwachs des



Risses dar, welcher von der Risslänge selber abhängt. Anders ausgedrückt kann man sagen, dass je größer der Riss ist, umso größer ist auch der Zuwachs (Paris und Erdogan 1963, Sobczyk und Spencer, Jr. 1992, S. 23 f).

### 3.1.1 Lösungen der Differentialgleichung

Im Folgenden werden die Lösungen dieser zuvor in Kapitel 3.1 definierten Differentialgleichung betrachtet. Dies bedeutet, es wird betrachtet, welche Funktionen in Abhängigkeit von  $t$  als Lösungen der aufgestellten Differentialgleichung in Frage kommen.

Aus der Gleichung  $\frac{dl}{dt} = \gamma_1 l^2$  lassen sich die folgenden Lösungen in Abhängigkeit von  $\gamma_2$  bestimmen (Gerard 2021, S. 7.):

$$(i) \quad \gamma_2 = 1 \quad ) \quad l = l(t) = l_0 \exp(\gamma_1 t) \quad \text{mit} \quad l_0 > 0;$$

$$(ii) \quad \gamma_2 < 1 \quad ) \quad l = l(t) = \gamma_1 (t - t_0)^2 \quad \text{mit} \quad t_0 < t; \quad \gamma_1 = \left( \gamma_1 (1 - \gamma_2) \right)^{\frac{1}{1-\gamma_2}};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{1-\gamma_2} > 0;$$

$$(iii) \quad \gamma_2 > 1 \quad ) \quad l = l(t) = \gamma_1 (t_0 - t)^2 \quad \text{mit} \quad t_0 > t; \quad \gamma_1 = \left( \gamma_1 (\gamma_2 - 1) \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_2-1} > 0;$$

Bei diesen Lösungen kommt ein zusätzlicher Parameter  $t_0$  beziehungsweise  $l_0$  in (i) hinzu, welcher als Startbedingung fungiert. Betrachtet man die Lösung (ii) mit  $l(t) = \gamma_1 (t - t_0)^2$  so erhält man ein Polynom in  $t$ , welches um  $t_0$  verschoben ist. Dieses Polynom wächst unter der Bedingung  $t_0 < t$  polynomial um den Koeffizienten  $\gamma_2$ . In dem Fall (iii), wenn  $\gamma_2 > 1$  ist, gilt  $t_0 > t$ . Dies bedeutet, dass der Wert  $l$  über die Zeit sich dem Wert  $t_0$  nähert, wodurch über die Zeit eine Explosion mit Explosionspunkt  $t_0$  entsteht. Dieses explosive Wachstum wird zur Verdeutlichung in Abbildung 1 beispielhaft dargestellt.

Abbildung 1: Beispielhaftes explosives Risswachstum.

Alternativ kann auch die inverse Funktion  $t(l)$  betrachtet werden, wobei die Anzahl der Lastwechsel in Abhängigkeit der Risslänge aufgefasst wird. Hierbei gilt ebenfalls die Gesetzmäßigkeit von Paris-Erdogan, jedoch besteht ein umgekehrtes Verhältnis.

Dieses Aufstellen der Funktion  $t(l)$  ist nicht intuitiv, aber sinnvoll, da so eine kritische Grenze der Risslänge festgelegt werden kann und somit eventuell prognostiziert werden kann, zu welchem Zeitpunkt diese bestimmte Risslänge erreicht wird. Mit dieser Funktion könnte also praktisch die ungefähre Lebensdauer eines Materials bis zum Materialversagen prognostiziert werden. In dieser Betrachtung von der Länge des Risses in Abhängigkeit von der Zeit existiert der bekannte Datensatz von Virkler, Hillberry und Goel 1979. Bei der Erhebung dieser Daten wurde Material zyklischen Belastungen ausgesetzt, wobei gemessen wurde, wie viele Lastwechsel bis zu einer vorher festgelegten Risslänge benötigt wurden.

Die Lösungen der inversen Funktion  $t(l)$  der Funktion  $l(t)$  lauten wie folgt (Gerard 2021, S. 11 f.):

$$(i) \quad \alpha_2 = 1 \quad ) \quad t = t(l) = t_0 + \alpha_1 \ln(l) \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{1}{\alpha_1} \ln(t_0); \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1};$$

$$(ii) \quad \alpha_2 < 1 \quad ) \quad t = t(l) = t_0 + \alpha_1 l^{\alpha_2} \quad \text{mit} \quad t_0 = t_0 < t; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2} > 0; \\ \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_2} > 0;$$

$$(iii) \quad \alpha_2 > 1 \quad ) \quad t = t(l) = t_0 + \alpha_1 l^{\alpha_2} \quad \text{mit} \quad t_0 = t_0 > t; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2} < 0; \\ \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_2} < 0;$$

Bei den vorherigen Lösungen ist im Fall (ii) ein polynomiales Wachstum erkennbar, welches hier ebenfalls in der zweiten Lösung (ii) mit  $\alpha_2 < 1$  erkennbar ist. Im Fall (iii) der Lösung mit  $\alpha_2 > 1$  ist im Gegensatz zum explosiven Wachstum der Lösung von  $l(t)$  mit  $\alpha_2 < 0$  ein beschränktes Wachstum mit der Schranke  $t_0$  zu erkennen; vergleiche dazu die Abbildung 2.

Abbildung 2: Beispielhaftes beschränktes Risswachstum.

### 3.1.2 Nicht-lineare stochastische Modelle zur Beschreibung des Risswachstums

Aus den zuvor aufgeführten Lösungen lassen sich die stochastischen Modelle zur Risswachstumsvorhersage aufstellen. Da das Wachstum von Rissen nicht deterministisch ist, wird den zuvor aufgestellten Lösungsfunktionen  $l(x)$  ein zufälliger Fehler hinzugefügt. Damit ergeben sich die folgenden nicht-linearen Modelle zur Risswachstumsvorhersage (Falkenau 2016, S. 18):

$$Y_n^{(1)} = \alpha_0 \exp(\alpha_1 x_n) + E_n;$$

$$Y_n^{(2)} = \alpha_1 (x_n - \alpha_0)^2 + E_n;$$

$$Y_n^{(3)} = \alpha_1 (\alpha_0 x_n)^2 + E_n;$$

$$Y_n^{(4)} = \alpha_0 + \alpha_1 x_n^2 + E_n;$$

In diesen Modellen zeigt der Term  $E_n$  den zufälligen Fehler an. Das erste angegebene Modell  $Y_n^{(1)}$  beschreibt ein exponentielles Wachstum, zu dem der Fehlerterm  $E_n$  addiert wird. Ein polynomiales Wachstum mit einem zufälligen Fehler ist im zweiten Modell  $Y_n^{(2)}$  definiert. Das dritte Modell  $Y_n^{(3)}$  stellt ein explosives Wachstum dar. In diesen Modellen und im zukünftigen Verlauf wird die Zeit  $t$  mit  $x$  bezeichnet. Aus den zuvor betrachteten inversen Lösungen der Differentialgleichung lässt sich das vierte Modell  $Y_n^{(4)}$  aufstellen. In diesem Modell wird  $l$  als  $x$  dargestellt, sodass alle Modelle einheitlich formuliert sind. Betrachtet man das vierte Modell genauer, so fällt auf, dass ein begrenztes Risswachstum vorliegt, wenn  $\alpha_1 < 0$ ;  $\alpha_2 < 0$  und ein unbegrenztes Wachstum, wenn  $\alpha_1 > 0$  und  $\alpha_2 > 0$  gilt. Diese Modelle bilden das Risswachstum nicht wirklich gut ab, da eine deterministische Funktion nur mit einem Fehler addiert wird. Ein additiver Fehler ist allerdings nur sinnvoll, wenn es sich

um Messfehler handelt. Bei stochastischen Prozessen ändert sich die Dynamik und beeinflusst damit die nächste Dynamik. Deswegen werden im Weiteren stochastische Prozesse zur Modellierung des Risswachstums betrachtet.

## 3.2 Bessere Modellierung des stochastischen Risswachstums

### 3.2.1 Stochastische Prozesse

Für die folgenden Definitionen, wie zum Beispiel der Brownschen Bewegung, muss zunächst ein stochastischer Prozess definiert werden. Anwendungen finden die stochastischen Prozesse in mathematischen Modellen zur Beschreibung von Objekten und Systemen, die scheinbar zufällig variieren. Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ , wobei  $\Omega$  ein Ergebnisraum,  $\mathcal{F}$  die  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  und  $P$  das Wahrscheinlichkeitsmaß sind. Weiterhin gegeben ist ein Messraum  $(S; \mathcal{S})$  mit dem Zustandsraum  $S$ . Zudem sei  $I = [0; 1)$  eine Indexmenge. Damit ergibt sich, dass ein stochastischer Prozess eine Familie  $X = (X_t)_{t \in I}$  messbarer Abbildungen  $X_t : \Omega \rightarrow S; t \in I$  ist (Meintrup und Schauer 2005, S. 268).

### 3.2.2 Brownsche Bewegung

Damit ein stochastischer Prozess als Brownsche Bewegung  $B = (B(x); x \geq 0)$  bezeichnet werden kann, muss dieser folgende Eigenschaften erfüllen (Meintrup und Schauer 2005, S. 342 und Jacus 2008, S. 18):

- $B(0) = 0$  fast sicher,
- $B$  hat unabhängige Zuwächse, diese Zuwächse  $B(x) - B(y);$  für  $0 \leq y < x$  sind normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz  $x - y$ ,
- $B = (B(x); x \geq 0)$  ist ein stetiger Prozess, das bedeutet, fast alle Pfade von  $B$  sind stetig.

Eine weitere Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist, dass sie ein Gauß'scher Prozess ist. Dies bedeutet, dass folgendes gilt:

$$(B(x_1); \dots; B(x_n)) \sim N_n(0_n; \Sigma);$$

wobei  $0_n$  ein  $n$ -dimensionaler Nullvektor und die Matrix  $\Sigma$  gegeben durch  $\Sigma = (\min(x_i; x_j))_{i,j=1,\dots,n}$  ist. Bekannt ist, dass gilt  $B(x) \sim N(0; x)$  und  $B(x_2) - B(x_1) \sim N(0; x_2 - x_1)$ . Aus der Eigenschaft des Gauß'schen Prozesses folgt,

dass ebenfalls  $B(x_2 - x_1) = B(x_2) - B(x_1)$  gilt (Meintrup und Schöer 2005, S. 344 f.).

Eine Realisation  $b = f(b(x); x \geq 0)$  einer Brownschen Bewegung  $B = f(B(x); x \geq 0)$  ist eine stetige Funktion  $b : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und wird als Pfad bezeichnet. Ein solcher möglicher Pfad der Brownschen Bewegung ist in Abbildung 3 dargestellt.

Abbildung 3: Ein möglicher Pfad der Brownschen Bewegung.

### 3.2.3 Stochastische Differentialgleichung

Eine stochastische Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung, in der einer oder mehrere der Terme ein stochastischer Prozess sind, welches zu einer Lösung führt, die ebenfalls ein stochastischer Prozess ist. Der nun folgende Abschnitt wurde dem Iacus 2008, S. 29 f. entnommen.

Ist die Größe  $Y(x)$  mit  $x \geq 0$  gegeben, lässt sich der Zuwachs von  $Y$  auf einem kleinen Zeitintervall  $[x; x + \Delta x)$  wie folgt darstellen:  $Y = Y(x + \Delta x) - Y(x)$ . Damit kann das Verhältnis von  $\Delta Y$  zu  $Y$  wie folgt definiert werden:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \text{deterministischer Term} + \text{stochastischer Term}$$

In dem deterministischen Term wird die Veränderung proportional zur Zeit mit einer gewissen Konstante verrechnet, so dass gilt:

$$\text{deterministischer Term} = \alpha t;$$

wobei  $\alpha$  als eine Funktion zu einer Funktion von entweder  $x$  oder  $Y(x)$  gewählt werden kann. In dem stochastischen Term der stochastischen Differentialgleichung

wird eine natürliche Schwankung der Werte angenommen, die sogenannte Volatilität

$$\text{stochastischer Term} = \sigma Y(x) dE(x);$$

wobei  $\sigma$  ebenfalls eine Funktion von  $x$  oder  $Y(x)$  sein kann. Hierbei wird meist ein Gauß'sches Verhalten der Schwankung angenommen, welches bedeutet, dass gilt:

$E \sim N(0; 1)$ . Diese Annahme führt dazu, dass  $E$  als die Brownsche Bewegung  $B$  (Definition siehe Kapitel 3.2.2) gewählt wird, wenn die Schritte der Schwankung unabhängig sein sollen. Insgesamt ergibt sich die folgende Formel:

$$\frac{dY}{Y} = \mu dx + \sigma dE(x);$$

Im Unterschied zur gewöhnlichen Differentialgleichung kann die stochastische Differentialgleichung nicht im Sinne eines Differentialkalküls interpretiert werden. Mit dieser allgemeinen Schreibweise einer stochastischen Differentialgleichung:

$$dY(x) = \mu Y(x)dx + \sigma Y(x)dE(x);$$

ist eigentlich die folgende Integralgleichung gemeint:

$$Y(x) = Y(0) + \int_{u=0}^x \mu Y(u)du + \int_{u=0}^x \sigma Y(u)dE(u);$$

wobei  $\mu$  und  $\sigma$  mit  $\mathbb{R}_+$   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$  jeweils geeignete Funktionen bilden.

### 3.2.4 Diffusionsprozesse

Die in dieser Arbeit betrachteten stochastischen Differentialgleichungen sind ein Spezialfall von Diffusionsprozessen. Ist ein realwertiger stochastischer Prozess  $Y(x); x \in \mathbb{R}_+$  gegeben, so ist dieser ein Diffusionsprozess, wenn gilt:

$$dY(x) = b(x; Y(x))dx + \sigma(x; Y(x))dE(x);$$

mit einer Driftfunktion  $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , einer Diffusionsfunktion, auch Volatilität genannt  $\sigma: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und einem Startwert  $Y(0)$ . Interpretiert wird diese Gleichung mit der folgenden Integralgleichung:

$$Y(x) = Y(0) + \int_{u=0}^x b(u; Y(u))du + \int_{u=0}^x \sigma(u; Y(u))dE(u);$$

wobei  $b$  und  $\sigma$  mit  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  jeweils geeignete Funktionen bilden (Meintrup und Schauer 2005, S. 447).

Der Fehlerterm  $E$  wird als die Brownsche Bewegung gewählt, also gilt nun  $E(x) = B(x)$ .

### 3.3 Euler-Maruyama-Approximation

Die Euler-Maruyama-Approximation dient dem numerischen Lösen von stochastischen Differentialgleichungen. Zudem ermöglicht diese Approximation die Simulation der stochastischen Differentialgleichung in einer Software wie zum Beispiel (R Core Team 2021). Gegeben ist ein Diffusionsprozess  $Y = f(Y(x)); 0 \leq x \leq T$  mit:

$$dY(x) = b(x; Y(x))dx + \sigma(x; Y(x))dB(x)$$

und es gilt, dass  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = T$  eine Partition von  $[0; T]$  ist. Dann ist die Euler-Maruyama-Approximation von  $Y$  auf  $[0; T]$  durch das folgende iterative Schema gegeben:

$$Y(x_{i+1}) = Y(x_i) + b(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \sigma(x_i; Y(x_i))(B(x_{i+1}) - B(x_i));$$

für  $i = 0; 1; \dots; N-1$  und mit dem Startwert  $Y(x_0) = Y(0)$  (Jacobs 2008, S. 62). So ergibt sich die Approximation des stochastischen Prozesses  $\tilde{Y}(x_1); \dots; \tilde{Y}(x_N)$ , für die Zeitpunkte  $x_1; \dots; x_N$ . Die Werte des stochastischen Prozesses werden im Weiteren auch in ihrer Kurzform angegeben, bei der gilt  $\tilde{Y}(x_i) = Y_i$  für alle  $i = 0; 1; \dots; N$ . Dabei kann  $Y(x_0)$  als Startwert frei gewählt werden. Im folgenden Unterkapitel wird zunächst die konkrete stochastische Differentialgleichung aufgestellt, welche im weiteren Verlauf der Arbeit betrachtet wird, und anschließend die entsprechende Euler-Maruyama-Approximation aufgestellt.

#### 3.3.1 Aufstellen der stochastischen Differentialgleichung

Zunächst ergibt sich aus den errechneten Lösungen der Differentialgleichung in Kapitel 3.1.1 mit  $s = 2, f = 1, g$  die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dY(x) = \mu_1(s(Y(x) - \mu_0))^{-2}dx + \sigma_3(x; Y(x))dB(x);$$

wobei der Prozess  $Y = f(Y(x)); x \geq 0$  ein stochastischer Prozess ist.

Die zugrunde liegende Idee der in dieser Arbeit betrachteten stochastischen Differentialgleichung lautet wie folgt: Wenn der Driftterm groß ist, dann ist die Volatilität

ebenfalls groß. Dies bedeutet, dass die Funktionen des allgemeinen Diffusionsprozesses  $\mu$  und  $\sigma$  fast identisch gewählt werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird nur ein explosives Wachstum betrachtet. Deswegen wird  $\mu = 1$  gewählt und es ergibt sich die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dY(x) = \mu(Y(x)) dx + \sigma(Y(x)) dB(x);$$

mit  $\mu = (\mu_0; \mu_1; \mu_2; \dots) \in \mathbb{R}^4$  und  $B$  der Brownschen Bewegung.

Nun wird diese gewählte Gleichung mithilfe der Euler-Maruyama-Methode approximiert. Der Driftterm lautet  $\mu(x; Y(x)) = \mu_0 + \mu_1 Y(x)$  und der Volatilitätsterm  $\sigma(x; Y(x)) = \sigma_0 + \sigma_1 Y(x)$ . Folglich ergibt sich mit der oben genannten Formel die Approximation für  $i = 1; \dots; N-1$ :

$$Y(x_{i+1}) = Y(x_i) + \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \sigma(x_i; Y(x_i))(B(x_{i+1}) - B(x_i));$$

Die Formel der Approximation der stochastischen Differentialgleichung lässt sich zur Berechnung der Residuen im folgenden Unterkapitel verwenden.

### 3.3.2 Berechnung der Residuen

Die Idee zur Berechnung der Residuen ist, dass die einzig nicht kontrollierbare Größe der stochastischen Differentialgleichung die Brownsche Bewegung ist. Die Residuen lassen sich also berechnen, indem die Formel der Euler-Maruyama-Approximation nach der Brownschen Bewegung umgestellt und normiert wird. Diese Rechnung mit  $i = 1; \dots; N-1$  lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} Y(x_{i+1}) &= Y(x_i) + \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \sigma(x_i; Y(x_i))(B(x_{i+1}) - B(x_i)) \\ , \quad Y(x_{i+1}) - Y(x_i) &= \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \sigma(x_i; Y(x_i))(B(x_{i+1}) - B(x_i)) \\ , \quad Y(x_{i+1}) - Y(x_i) - \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i) &= \sigma(x_i; Y(x_i))(B(x_{i+1}) - B(x_i)) \\ , \quad \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i) - \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i)}{\sigma(x_i; Y(x_i))} &= \frac{B(x_{i+1}) - B(x_i)}{\sigma(x_i; Y(x_i))} \end{aligned}$$

$\frac{B(x_{i+1}) - B(x_i)}{\sigma(x_i; Y(x_i))} = \frac{1}{\sigma(x_i; Y(x_i))} \underbrace{(B(x_{i+1}) - B(x_i))}_{\substack{N(0; x_{i+1} - x_i) \\ \text{mit } Z_i \sim N(0; 1) \\ \text{normierte Residuen}}}$

$$\begin{aligned} , \quad \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i) - \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i)}{\sigma(x_i; Y(x_i))} &= \rho \frac{Z_i}{\sqrt{x_{i+1} - x_i}} \\ , \quad \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i) - \mu(x_i; Y(x_i))(x_{i+1} - x_i)}{\sigma(x_i; Y(x_i)) \sqrt{x_{i+1} - x_i}} &= Z_i \end{aligned}$$



Somit ist die Formel für die Residuen hergeleitet. In dem Fall der betrachteten stochastischen Differentialgleichung:

$$dY(x) = \mu(Y(x)) dx + \sigma(Y(x)) dB(x);$$

ist die Formel für die Residuen gegeben durch:

$$\text{Res}_n(\theta) = \frac{Y(x_{i+1}) - Y(x_i) - \mu(Y(x_i)) \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}}{\sigma(Y(x_i)) \sqrt{\Delta t}};$$

mit  $i = 1; 2; \dots; N$  und  $\theta = (\mu; \sigma) \in \mathbb{R}^2$ .

### 3.4 Die verwendeten Tests

In diesem Kapitel werden die zu vergleichenden Tests für  $H_0: \theta = \theta_0$  definiert und erklärt. Angefangen mit dem Residuen-Momenten-Test, gefolgt von dem Tiefe-Test 1 und dem Tiefe-Test 2.

#### 3.4.1 Residuen-Momenten-Test

Zuerst wird der Residuen-Momenten-Test für die Nullhypothese  $H_0: \theta = \theta_0$  eingeführt. Dieser Test beruht auf der Idee, dass die Momente der Residuen mit denen einer Standardnormalverteilung verglichen werden. Zunächst werden für den Residuen-Momenten-Test die Residuen  $\text{Res}_n(\theta)$  für  $i = 1; 2; \dots; N$  mit der hergeleiteten Formel aus Kapitel 3.3.2 und einem gegebenen Parametervektor  $\theta$  berechnet. Anschließend werden die folgenden Summen als Teststatistiken betrachtet:

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Res}_n(\theta); \\ S_2(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{Res}_n(\theta)^2 - 1); \\ S_3(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Res}_n(\theta)^3; \\ S_4(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{Res}_n(\theta)^4 - 3); \end{aligned}$$

An dieser Stelle folgen einige Anmerkungen zu den zuvor genannten Summen. Zunächst lässt sich mithilfe der Konvergenz der Euler-Maruyama-Approximation gegen den eigentlichen Prozess zeigen, dass die Residuen  $\text{Res}_n(\theta)$  mit  $n = 1; 2; \dots; N$  approximativ standardnormalverteilt sind. Weiterhin folgt mit der Unabhängigkeit

der Residuen, welche sich aus den Eigenschaften der Brownschen Bewegung ergibt (vergleiche Kapitel 3.2.2), dass die Summe der Residuen  $\sum_{h=1}^P \text{Res}_h(\cdot)$  approximativ  $N(0; N)$ -verteilt ist. Dies impliziert, dass die Summe  $S_1(\cdot)$  approximativ standardnormalverteilt ist.

Wenn mit  $Z_1; \dots; Z_N$  (stochastisch) unabhängig  $N(0; 1)$ -verteilte Zufallsvariablen gegeben sind, dann ist die Summe dieser normalverteilt. Weiterhin gilt, dass der Erwartungswert  $E(Z_1^2) = 1$  und die Varianz  $\text{Var}(Z_1^2) = 2$  beträgt (Hartung, Elpelt und Klösener 2009, S. 152 f.). Somit gilt, dass  $Z_1^2 - 1; \dots; (Z_N^2 - 1)$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz Zwei sind. Für die Standardisierung der Zufallsvariablen ist es erforderlich, dass diese durch  $\sqrt{2}$  geteilt wird. Daraus ergibt sich, dass die Zufallsvariablen den Erwartungswert Null und die Varianz Eins besitzen. Mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes auf diese Verteilung folgt, dass die Summe  $S_2(\cdot)$  gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Für die Herleitung von  $S_3(\cdot)$  und  $S_4(\cdot)$  werden die Momente der Standardnormalverteilung für  $Z_n$  betrachtet. Dafür ergeben sich die folgenden Erwartungswerte (Hartung, Elpelt und Klösener 2009, S. 144):

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= 0; & E(Z_n^2) &= 1; & E(Z_n^3) &= 0; \\ E(Z_n^4) &= 3; & E(Z_n^6) &= 15; & E(Z_n^8) &= 105; \end{aligned}$$

Zudem ergeben sich die benötigten Varianzen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n^3) &= E((Z_n^3 - E(Z_n^3))^2) = E((Z_n^3 - 0)^2) = E(Z_n^6) = 15; \\ \text{Var}(Z_n^4) &= E((Z_n^4 - E(Z_n^4))^2) = E((Z_n^4 - 3)^2) \\ &= E(Z_n^8) - 6 E(Z_n^4) + 9 = 105 - 18 + 9 = 96; \end{aligned}$$

Mittels Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes folgt, dass die Summe  $S_3(\cdot)$  und  $S_4(\cdot)$  ebenfalls asymptotisch standardnormalverteilt sind (Gerard 2021, S. 28).

Aus diesen Teststatistiken lässt sich nun der Residuen-Momenten-Test formulieren: Die Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  wird zum Signifikanzniveau  $\alpha$  abgelehnt, wenn ein  $j = 1; 2; 3; 4$  existiert, mit dem gilt:

$$|jS_j(\cdot)| > q_{N(0; 1); (1 - \frac{\alpha}{j})}$$

Der Betrag der Summen wird jeweils mit dem  $(1 - \frac{\alpha}{j})$ -Quantil der Standardnormalverteilung verglichen, welches aus der Bonferroni-Korrektur (vergleiche Hedderich und Sachs 2018, S. 600) resultiert.

Insgesamt gilt, dass der Residuen-Momenten-Test ein asymptotischer Test zum Niveau  $\alpha$  ist. Bei den späteren Simulationen wird das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt.

### 3.4.2 Tiefe-Tests

Die Tiefe-Tests beruhen auf einer anderen Art die Residuen zu betrachten als es beim Residuen-Momenten-Test der Fall ist. Bei den Tiefe-Tests werden nicht die jeweiligen Abstände der Residuen zur Null betrachtet, sondern lediglich, ob die Residuen ober- oder unterhalb Null liegen. Diese Lage zur Null wird zur Vereinfachung mittels + und - kodiert und als Vorzeichen bezeichnet. Zur Verdeutlichung der Idee der Datentiefe ist in Abbildung 4 ein Beispiel abgebildet. Durch die Betrachtung der alternierenden Vorzeichen und die Vernachlässigung der Abstände ergibt sich der Vorteil, dass Ausreißer nicht mehr Einfluss als andere Beobachtungen auf das Ergebnis haben.

Abbildung 4: Beispielhafte Daten zur Verdeutlichung der Idee der Datentiefe.

Die betrachteten Residuen für diese Tests werden mittels der folgenden Formel für  $n = 1; \dots; N$  berechnet:

$$\begin{aligned} R_n(\cdot) &= Y(x_n) - Y(x_{n-1}) - b(x; Y(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) \\ &= Y(x_n) - Y(x_{n-1}) - \frac{1}{n} (0 - Y(x_{n-1}))^2 (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Dabei gilt, dass  $Y(x_n) = Y_n$  als Kurzform festgelegt wird. Mithilfe von Tests auf Grundlage der Datentiefe ist es möglich die Teststatistiken zu reduzieren (Kustos, Müller und Wendler 2016). Für die später aufgeführten Teststatistiken müssen zunächst zwei Möglichkeiten definiert werden, um einen sogenannten Tiefewert zu berechnen. Die volle Tiefe von  $y$  in den Daten  $Y_0; Y_1; \dots; Y_N$  in Bezug auf die

stochastische Differentialgleichung wird wie folgt gemessen:

$$d_3(\beta; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) = \frac{1}{\binom{N}{3}} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq N} (1_{f_{R_{n_1}(\beta)} > 0; R_{n_2}(\beta) < 0; R_{n_3}(\beta) > 0} + 1_{f_{R_{n_1}(\beta) < 0; R_{n_2}(\beta) > 0; R_{n_3}(\beta) < 0}});$$

Bei dieser Berechnung des Tiefwertes werden alle möglichen Dreier-Tupel betrachtet, wobei 1 eine Indikatorfunktion darstellt. Weiterhin wird der vereinfachte Vier-Tiefwert benötigt, welcher nur die aufeinander folgenden Tupel betrachtet:

$$d_4(\beta; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) = \frac{1}{\binom{N}{3}} \sum_{n=1}^{N-3} (1_{f_{R_n(\beta) > 0; R_{n+1}(\beta) < 0; R_{n+2}(\beta) > 0; R_{n+3}(\beta) < 0}} + 1_{f_{R_n(\beta) < 0; R_{n+1}(\beta) > 0; R_{n+2}(\beta) < 0; R_{n+3}(\beta) > 0}});$$

In der Veröffentlichung von Kustosz, Müller und Wendler 2016 wird gezeigt, dass eine Tiefe mit  $K + 1$  Residuen angewendet werden sollte, wenn der zu untersuchende Parameter die Dimension  $K$  aufweist. Das verwendete  $\beta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2)$  ist dreidimensional, weswegen in diesem Fall eigentlich nur die Tiefe angewendet werden sollte. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Tiefe ebenfalls sehr gute Resultate bei Parametern der Dimension 2 oder höher erzielt. Der Grund dafür ist, dass  $d_3$  auf deutlich mehr Teilmengen, in Zahlen  $\binom{N}{3}$ , basiert als  $d_4$  mit  $N - 3$  Teilmengen.

Für die beiden später definierten Tiefe-Tests werden die folgenden Teststatistiken für den zu testenden Parametervektor  $\beta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2)$  beziehungsweise  $\beta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2)$  definiert:

$$S_2(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{Res}_n(\beta))^2 - 1);$$

$$S_3(\beta) = \frac{1}{\binom{N}{3}} (d_3(\beta; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) - \frac{1}{4});$$

$$S_4(\beta) = \frac{1}{\binom{N-3}{3}} (d_4(\beta; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) - \frac{1}{8});$$

Bei Betrachtung der Teststatistiken ist außerdem zu allend, dass die Datentiefen und damit  $S_3(\beta)$  und  $S_4(\beta)$  robust gegen Ausreißer sind, welches bei  $S_2(\beta)$  nicht der Fall ist.

Nun lässt sich der Tiefe-Test 1 formulieren. Dieser Test lehnt die Nullhypothese  $H_0: \theta = \theta_0$  mit  $\theta = (\theta_0; \theta_1; \theta_2; \dots)$  ab, falls gilt:

$$|S_2(\hat{\theta})| > q_{N(0;1);(1-\frac{\alpha}{4})} \text{ oder } S_4(\hat{\theta}) < q_{N(0;1);\frac{\alpha}{2}}$$

Wenn gilt  $B_n = B_{n-1} = B_0$  für alle  $n = 1; \dots; N$  und  $\text{med}(B_0) = 0$ ;

$E(B_0^2) = 1$ ;  $E(B_0^4) = 3$ , dann ist der Tiefe-Test 1 ein asymptotischer Test zum Signifikanzniveau  $\alpha$ . Die Bedingungen, dass gelten muss  $E(B_0^2) = 1$  und  $E(B_0^4) = 3$ ,

sind nur notwendig, weil die nicht ausrecherbuste Güte  $S_2(\hat{\theta})$  verwendet wird. In

der Veröffentlichung von Kustosz, Müller und Wendler 2016 wird gezeigt, dass für

$N \gg 1$  gilt  $S_4(\hat{\theta}) \xrightarrow{D} N(0;1)$ : Weiterhin spricht sich die Teststatistik  $S_4(\hat{\theta})$  gegen

die Nullhypothese aus, wenn diese zu klein ist, das heißt die Tiefe des Parameters

im Datensatz ist zu klein. Die Konvergenz der Teststatistik  $S_2(\hat{\theta}) \xrightarrow{D} N(0;1)$

wurde bereits in Kapitel 3.4.1 gezeigt.

Der Tiefe-Test 2 lehnt die Nullhypothese  $H_0: \theta = \theta_0$  mit  $\theta = (\theta_0; \theta_1; \theta_2; \dots)$  ab, wenn gilt:

$$|S_2(\hat{\theta})| > q_{N(0;1);(1-\frac{\alpha}{4})} \text{ oder } S_3(\hat{\theta}) < q_{\frac{\alpha}{2}};$$

wobei  $q$  das  $\alpha$ -Quantil der asymptotischen Verteilung von  $S_3(\hat{\theta})$  ist. Auch dieser

Test ist ein asymptotischer Test zum Signifikanzniveau  $\alpha$ , wenn  $B_n = B_{n-1} = B_0$  für

alle  $n = 1; \dots; N$  und  $\text{med}(B_0) = 0$ ;  $E(B_0^2) = 1$ ;  $E(B_0^4) = 3$  gilt. Aus den Ergeb-

nissen von Kustosz, Leucht und Müller 2016 folgt die asymptotische Verteilung von

$S_3(\hat{\theta})$ . Weil dieser Beweis nur auf der Unabhängigkeit und identischen Verteilung

der Residuen beruht, gilt das Ergebnis für unabhängig identisch verteilte Residuen.

Im Speziellen: diese asymptotische Verteilung ist keine Normalverteilung.

## 4 Statistische Auswertung

Dieses Kapitel, welches die statistische Auswertung beinhaltet, ist in fünf Unterkapitel

geteilt. Zunächst wird im ersten Unterkapitel die Implementierung der zuvor

erklärten Methoden und die jeweilige Simulation erklärt. Im zweiten Unterkapitel

wird eine deskriptive Auswertung vorgenommen. Im dritten Unterkapitel werden die

betrachteten Tests miteinander verglichen und die Vorteile beziehungsweise Nach-

teile der Tests herausgestellt. Im darauf folgenden Unterkapitel werden den stochas-

tischen Prozessen Ausrecher hinzugefügt und die Güte der Tests erneut verglichen.

Abschließend wird im letzten Unterkapitel eine leicht abgewandelte Modellgleichung

betrachtet.

## 4.1 Implementierung in R

Die Implementierung der Methoden sowie die Simulation werden im Software-Programm R unter Version 4.1.0 (R Core Team 2021) programmiert. Als Erweiterung wird das Paket devtools (Wickham, Hester und Chang 2021) für das Laden des Paketes GSignTest (Horn 2021) verwendet. Für die Erstellung einiger Grafiken wurde zusätzlich das Paket ggplot2 (Wickham 2016) verwendet.

Im Folgenden werden die Implementierungsmethoden ausführlich erklärt, beginnend mit der Brownschen Bewegung. Der Algorithmus für die Implementierung der Brownschen Bewegung ist Iacus 2008, S. 19 entnommen und im Folgenden aufgeführt:

---

### Simulation der Brownschen Bewegung

---

```

Eingabe: N; T
1 Setze  $\Delta t = \frac{T}{N}$ 
2 Generiere  $0 = t_1; t_2; \dots; t_N; t_{N+1} = T$  mit gleichem Abstand
3 Setze  $B_{t_1} = 0$ 
4 Für  $i = 2; \dots; N + 1$  tue:
5   Generiere eine neue zufällige Zahl  $Z_{i-1}$  aus Standardnormalverteilung
6   Setze  $B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + Z_{i-1} \sqrt{\Delta t}$ 
7 Gebe  $B_{t_1}; B_{t_2}; \dots; B_{t_{N+1}}$  aus

```

---

Bei diesem Algorithmus werden zuvor die Parameter  $N$  als Schrittzahl und  $T$  als Intervalllänge festgelegt, wobei das Intervall  $[0, T]$  in  $N$  gleichgroße Intervalle von der Länge  $\Delta t$  aufgeteilt wird. Nach der ersten Bedingung der Definition der Brownschen Bewegung soll der erste Punkt Null sein. Dies wird zu Beginn des Algorithmus mit  $B_{t_1} = 0$  festgelegt. Anschließend können die weiteren Punkte der Brownschen Bewegung durch  $B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + Z_{i-1} \sqrt{\Delta t}$  mit  $Z_{i-1} \sim N(0, 1)$  generiert werden. Der Pfad einer Brownschen Bewegung kann mittels linearer Interpolation zwischen den Punkten simuliert werden.

Es gilt noch die weiteren Bedingungen der Definition der Brownschen Bewegung zu prüfen. Die Bedingung, dass fast alle Pfade stetig sind, ist nicht erfüllt, da der vorgestellte Algorithmus nur Punkte des Pfades simuliert. Allerdings kann von dieser Bedingung abgesehen werden, da die Punkte zwischen den simulierten Punkten mittels linearer Interpolation angenähert werden. Somit kann die Bedingung als erfüllt angesehen werden.

Es bleibt die folgende Bedingung zu prüfen: Für alle  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$  sind die Zuwächse  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  unabhängig und normalverteilt. Durch Umstellen der Formel im Algorithmus ist bekannt dass gilt:  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = Z_{i-1} \sqrt{\Delta t}$

---

für  $2 \leq i \leq N+1$ . Diese Zuwächse sind unabhängig, weil  $\frac{p}{t}$  eine feste Größe und  $Z_{i-1}$  eine zufällige Größe ist. Weiterhin soll für alle  $t_i < t_j$  gelten, dass  $B_{t_j} - B_{t_i} \sim N(0; t_j - t_i)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} B_{t_j} &= B_{t_{j-1}} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \\ &= B_{t_{j-2}} + Z_{j-2} \frac{p}{t} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \\ &= B_{t_{j-3}} + Z_{j-3} \frac{p}{t} + Z_{j-2} \frac{p}{t} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \\ &\vdots \\ &= B_{t_{i+1}} + Z_{i+1} \frac{p}{t} + Z_{i+2} \frac{p}{t} + \dots + Z_{j-2} \frac{p}{t} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \\ &= B_{t_i} + Z_i \frac{p}{t} + Z_{i+1} \frac{p}{t} + Z_{i+2} \frac{p}{t} + \dots + Z_{j-2} \frac{p}{t} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \end{aligned}$$

Aus dieser Überlegung folgt:

$$\begin{aligned} B_{t_j} - B_{t_i} &= Z_i \frac{p}{t} + Z_{i+1} \frac{p}{t} + Z_{i+2} \frac{p}{t} + \dots + Z_{j-2} \frac{p}{t} + Z_{j-1} \frac{p}{t} \\ &= \underbrace{(Z_i + Z_{i+1} + \dots + Z_{j-2} + Z_{j-1})}_{(j-i) \text{ Summanden}} \frac{p}{t} \end{aligned}$$

Folglich gilt  $B_{t_j} - B_{t_i} \sim N(0; (j-i)t)$ , weil  $Z_i; Z_{i+1}; \dots; Z_{j-2}; Z_{j-1}$  standard-normalverteilt sind. Weiterhin gilt  $t_j - t_i = (j-i)t$ , womit auch diese Bedingung erfüllt ist.

Für die Implementierung des stochastischen Prozesses, welcher in 3.3.1 aufgestellt wurde, wird die Form der Euler-Maruyama-Approximation verwendet. Somit ergibt sich die folgende Simulation:

---

#### Simulation des stochastischen Prozesses

---

```

Eingabe: = (  $\sigma_0; \sigma_1; \sigma_2$  );  $x$ ;  $B$ ; Ausreisser
1 Setze  $Y_1 = 1$ 
2 Für  $i = 1; \dots; N$  tue:
3   Setze  $\text{drift} = \sigma_1 ( \sigma_0 - Y_i )^2$ 
4   Setze  $Y_{i+1} = Y_i + \text{drift} (x_{i+1} - x_i) + \text{drift} (B_{i+1} - B_i)$ 
5 Wähle jede 10te Beobachtung von  $Y$ :  $Y_1; Y_{11}; Y_{21}; \dots; Y_{N+1}$ 
6 Wenn Ausreisser = Ja dann:
7   Wähle zufällig 10% von  $Y$  aus
8   An diesen Stellen werden die Werte zufällig, aber im Gesamten
   gleichmäßig, auf den minimalen oder maximalen Wert von  $Y$  gesetzt
9 Gebe  $Y_1; Y_{11}; Y_{21}; \dots; Y_{N+1}$  aus

```

---

Die zuvor festgelegten Eingabewerte dieser Simulation sind der Parametervektor  $\sigma = ( \sigma_0; \sigma_1; \sigma_2 )$ , sowie der Vektor  $x$ , welcher die betrachteten Zeitpunkte

---

zu den Werten der Brownschen Bewegung enthält. Weiter wird mit der Eingabe Ausreisser festgelegt, ob zusätzliche additive Ausreißer in den stochastischen Prozess eingefügt werden sollen.

Die Simulation beginnt mit dem Festlegen des ersten Wertes von  $Y$  als Eins, dieser Wert also, die erste Stelle im Vektor  $Y$ , bildet das  $Y_0$ . Danach können die weiteren Werte  $Y_1; Y_2; \dots; Y_N$  des stochastischen Prozesses mit Verwendung von  $Y_0$  mittels der Formel der Euler-Maruyama-Approximation errechnet werden:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{\Delta t} (0 - Y_i)^2 (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{\Delta t} (0 - Y_i)^2 (B_{i+1} - B_i);$$

für  $i = 0; 1; \dots; N - 1$  oder anders formuliert:

$$Y_i = \frac{1}{\Delta t} (0 - Y_i)^2 x + \frac{1}{\Delta t} (0 - Y_i)^2 B_i;$$

Aus den errechneten Werten für den stochastischen Prozess wird für den endgültigen stochastischen Prozess nur jede zehnte Beobachtung gewahrt, sodass gilt:

$Y = (Y_0; Y_{10}; Y_{20}; \dots; Y_{N-10}; Y_N)$ . Im Weiteren wird dieser Vektor wie folgt bezeichnet:  $Y = (Y_0; Y_1; Y_2; \dots; Y_{\frac{N}{10}})$ . Diese Verringerung der zu betrachtenden Werte erfolgt, da ein stochastischer Prozess stetig ist, aber nur an endlich vielen Stellen ausgewertet werden kann. Eine graphische Darstellung dieser Verringerung der betrachteten Datenpunkte ist in der Abbildung 5 dargestellt.

Abbildung 5: Ein möglicher Pfad des stochastischen Prozesses.

Der Eingabeparameter Ausreisser bestimmt in der Simulation, ob dem stochastischen Prozess zusätzlich additive Ausreißer hinzugefügt werden. Diese Ausreißer werden zufällig an der jeweiligen Stelle von den ausgewählten zehn Prozent der Werte eingefügt. Dazu werden die Stellen zufällig ausgewählt und der ursprüngliche



Wert auf den minimalen oder maximalen Wert des stochastischen Prozesses  $Y$  gesetzt. Diese Auswahl vom minimalen oder maximalen Wert erfolgt im einzelnen Fall zufällig, jedoch ist sie im Gesamten gleichmäßig. Dafür wird ein Vektor mit der Länge der ausgeählten Stellen erzeugt, welcher in der ersten Hälfte an jeder Stelle den maximalen Wert und in der zweiten Hälfte an jeder Stelle den minimalen Wert von  $Y$  enthält. Anschließend werden die Einträge des Vektors mit der Funktion `sample` zufällig vertauscht und an den ausgeählten Stellen im stochastischen Prozess  $Y$  eingelegt. Mit dieser Methode soll später die Robustheit der Tests gegen Ausreißer getestet und analysiert werden.

Im Weiteren wird die Berechnung der Residuen kurz erläutert. Diese werden mittels der errechneten Formel aus Kapitel 3.3.2, mit einem zuvor festgelegten Parametervektor  $\theta = (\theta_0; \theta_1; \theta_2)$ , dem Vektor  $x$  mit den betrachteten Zeitpunkten sowie den Werten des stochastischen Prozesses  $Y$  ermittelt. Im Folgenden ist dies kurz zusammengefasst:

---

#### Berechnung der Residuen

---

- Eingabe:  $Y; x; \theta = (\theta_0; \theta_1; \theta_2)$
- 1 Berechnung der Residuen: `for n = 1; ::::; N tue:`
  - 2     Setze  $\text{drift} = \theta_0 + Y_{n-1}$
  - 3     Setze  $\text{Res}_n = \frac{Y_n - Y_{n-1} - \text{drift} \cdot (x_n - x_{n-1})}{\text{drift} \cdot (x_n - x_{n-1})}$
  - 4 Gebe Residuen  $\text{Res}_2; \text{Res}_3; \dots; \text{Res}_N$  aus
- 

Nun werden die betrachteten Tests und die jeweilige Implementierung vorgestellt, beginnend mit dem Residuen-Momenten-Test. Für diesen Test werden zunächst wieder die Parametervektoren  $\theta$  mit den Zeitpunkten und  $Y$  mit den Werten des stochastischen Prozesses  $Y$  eingelegt. Weiterhin bedarf es dem zu testenden Parametervektor  $\theta = (\theta_0; \theta_1; \theta_2)$ , sowie dem Signifikanzniveau  $\alpha$ . Zunächst werden die Residuen des gegebenen stochastischen Prozesses mit den zu testenden Parametern von `res` berechnet. Anschließend werden mit den Residuen die Teststatistiken, welche in Kapitel 3.4.1 definiert und hergeleitet wurden, berechnet und in den Betrag gesetzt. Für die Durchführung des Residuen-Momenten-Tests wird ein kritischer Wert berechnet, das  $(1 - \frac{\alpha}{8})$  Quantil der Standardnormalverteilung. Bei gegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  lässt sich das Quantil der Standardnormalverteilung mit der R-Funktion `qnorm` berechnen. Um zu einer Testentscheidung zu gelangen, wird geprüft, ob eine der Teststatistiken größer als der kritische Wert ist. Sollte dies der Fall sein, so wird die Nullhypothese abgelehnt. Es folgt eine Übersicht der Implementierung des Residuen-Momenten-Tests:

---

---

Programmierung des Residuen-Momenten-Tests für $H_0: =$	
Eingabe: $Y; x; = (x_0; x_1; x_2; \dots)$ ;	
1	Berechnung der Residuen $Res_2; Res_3; \dots; Res_N$
2	Berechnung der Teststatistiken: $S_1 = \sum_{n=1}^N Res_n$ $S_2 = \sum_{n=1}^N (Res_n^2 - 1)j$ $S_3 = \sum_{n=1}^N Res_n^3$ $S_4 = \sum_{n=1}^N (Res_n^4 - 3)j$
3	Berechne kritischen Wert $q$ ; das $(1 - \frac{\alpha}{8})$ Quantil der Standardnormalverteilung
4	Überprüfe: $9j = 1; 2; 3; 4$ mit $S_j > q$ .
5	Gebe Entscheidung bezüglich der Nullhypothese aus

---

Für die Durchführung der Tiefe-Tests müssen zunächst die Residuen, wie sie in Kapitel 3.3.2 definiert sind, berechnet werden. Diese werden anschließend die Aufstellung der Teststatistik  $S_2$  benötigt. Ein Schema der Programmierung des Tiefe-Tests 1 folgt:

---

Programmierung des Tiefe-Tests 1 für $H_0: =$	
Eingabe: $Y; x; = (x_0; x_1; x_2; \dots)$ ;	
1	Berechnung der Residuen $Res_2; Res_3; \dots; Res_N$
2	Berechnung der Teststatistiken: $S_2 = \sum_{n=1}^N (Res_n^2 - 1)j$ $S_4 = \sum_{n=1}^N (d_4(x; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) - \frac{1}{8}),$ $d_4(x; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) \text{ aus dem Paket GSignTest (Horn 2021)}$
3	Überprüfe: $S_2 > (1 - \frac{\alpha}{4})$ Quantil oder $S_4 < (\frac{\alpha}{2})$ Quantil jeweils der Standardnormalverteilung
4	Gebe Entscheidung bezüglich der Nullhypothese aus

---

In der Programmierung wurde das R-Paket `GSignTest` (Horn 2021) verwendet für die Berechnung der Teststatistik  $S_4$ . Der Tiefewert  $d_4(x; Y_0; Y_1; \dots; Y_N)$  lässt sich mittels der R-Funktion `calcSimpDepth(Res, K = 4)` berechnen, wobei `Res` ein Vektor mit den berechneten Residuen und `K` der Parameter für die Vorzeichentiefe ist. Für eine Testentscheidung bezüglich der Nullhypothese wird überprüft, ob die Teststatistik  $S_2$  im Betrag größer als das  $(1 - \frac{\alpha}{4})$  Quantil der Standardnormalverteilung oder  $S_4$  kleiner als das  $(\frac{\alpha}{2})$  Quantil der Standardnormalverteilung ist. Sollte eins von beiden der Fall sein, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

Die Programmierung des Tiefe-Tests 2 unterscheidet sich nur geringfügig von der Programmierung des Tiefe-Tests 1. Für die Berechnung der Teststatistik  $S_3$  wird der Tiefewert  $d_3(x; Y_0; Y_1; \dots; Y_N)$  mithilfe der Funktion `calcDepth(Res,`

---

$K = 3$ ) ermittelt, wobei  $\text{Res}$  der Vektor mit den Residuen und  $K$  der Parameter für die Vorzeichentiefe ist. Die Funktion stammt ebenfalls aus dem R-Paket `SignTest` (Horn 2021). Diese Programmierung ist in dem folgenden Schema zusammengefasst:

---

Programmierung des Tiefe-Tests 2 f $\mu$ $H_0: \mu =$	
Eingabe: $Y; x; \mu = (\mu_0; \mu_1; \mu_2; \dots)$ ;	
1	Berechnung der Residuen $\text{Res}_2; \text{Res}_3; \dots; \text{Res}_N$
2	Berechnung der Teststatistiken: $S_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{Res}_n^2 - 1)}$ $S_3 = N \cdot (d_3(\mu; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) - \frac{1}{4}),$ $d_3(\mu; Y_0; Y_1; \dots; Y_N) \text{ aus dem Paket } \text{GSignTest} \text{ (Horn 2021)}$
3	Überprüfe: $S_2 > (1 - \frac{\alpha}{4})$ Quantil der Standardnormalverteilung oder $S_3 < (\frac{\alpha}{2})$ Quantil der asymptotischen Verteilung von $S_3$
4	Gebe Entscheidung bezüglich der Nullhypothese aus

---

Bei diesem Test wird die Teststatistik  $S_2$  wieder im Betrag mit dem  $(1 - \frac{\alpha}{4})$ -Quantil der Standardnormalverteilung verglichen. Zudem wird die Teststatistik  $S_3$  mit dem  $(\frac{\alpha}{2})$  Quantil der asymptotischen Verteilung von  $S_3$  verglichen. Der Wert des zu vergleichenden Quantils der asymptotischen Verteilung wird aus Falkenau 2016, S. 76 entnommen. Im Folgenden wird das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt, sodass das  $(\frac{\alpha}{2})$  Quantil einen Wert von  $1:6791727$  besitzt.

## 4.2 Deskriptive Auswertung

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Parameter der zuvor in Kapitel 3.3.1 aufgestellten stochastischen Differentialgleichung analysiert. Dies vermittelt ein Gespür dafür, wie die jeweilige Veränderung der Parameter die simulierten stochastischen Prozesse beeinflussen. Dafür wurde für den jeweiligen betrachteten Parameter von  $\mu = (\mu_0; \mu_1; \mu_2; \dots)$  eine Abbildung erstellt, welche jeweils vier Grafiken enthält. In diesen Grafiken sind jeweils vier stochastische Prozesse simuliert, welche sich nur anhand des veränderten und betrachteten Parameters unterscheiden. Für die Simulation der verwendeten Brownschen Bewegung wurde jeweils der gleiche `set.seed` gewählt. In allen Grafiken sind auf den horizontalen Achsen die betrachteten Zeitpunkte und auf den vertikalen Achsen die Werte des stochastischen Prozesses abgetragen. Die für die Simulation verwendeten Parameter werden jeweils in den Überschriften angegeben. Zudem werden danach die Residuen kurz graphisch betrachtet.

Die Parameter der gewählten Differentialgleichung werden für diese Auswertung und Analyse der Parameter graphisch begutachtet. Aufgrund dessen wird die Di-

rentialgleichung in der Form der Euler-Maruyama-Approximation betrachtet. Diese lautet für  $i = 0; 1; \dots; N - 1$  wie folgt:

$$Y(x_{i+1}) = Y(x_i) + \mu_1 (Y(x_i) - \mu_2(x_{i+1} - x_i)) + \sigma_1 (Y(x_i) - \mu_2(x_{i+1} - x_i)) \cdot B(x_{i+1}) - B(x_i)):$$

#### 4.2.1 Betrachtung des ersten Parameters $\mu_1$

Als erstes wird der Parameter  $\mu_1$  betrachtet. Für die Analyse der Auswirkung dieses Parameters auf den Verlauf der aufgestellten Differentialgleichungen sind zwei verschiedene Fälle betrachtet worden. Der erste Fall tritt ein, wenn  $\mu_2 > 0$  ist. In der Abbildung 6 sind jeweils vier verschiedene Pfade des stochastischen Prozesses für jeweils vier verschiedene Werte von  $\mu_1$  simuliert. In der Abbildung sind auf den horizontalen Achsen die betrachteten Zeitpunkte und auf den vertikalen Achsen die Werte des stochastischen Prozesses abgetragen. Die Zeitpunkte liegen in einem Intervall zwischen Null und Drei. Jede der vier Grafen der Abbildung 6 enthält jeweils vier mögliche Pfade eines stochastischen Prozesses mit den Parametern  $\mu_1 = 0:9; \mu_2 = 0:5; \mu_3 = 0:9$ : Diese Parameter wurden beispielhaft gewählt.

Abbildung 6: Analyse des Parameters  $\mu_1$  bei explosivem Wachstum des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Grafik wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert.

Dabei wurde der Parameter  $\mu_1$  in jeder der Grafen anders gewählt, sodass sein Einfluss auf den Verlauf des stochastischen Prozesses zu erkennen ist. Zudem wurde für die Simulation der Brownschen Bewegung jeweils der gleiche Seed gewählt,

sodass die Werte der Brownschen Bewegung keinen Einfluss auf die Analyse des Parameters haben.

Außerdem in der Abbildung 6 ist, dass die simulierten Prozesse ein explosives Wachstum aufweisen. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Werte der Prozesse bei kleinem  $\rho_0$  stärker steigen und größer sind, als bei großem  $\rho_0$ . Allerdings ist es nicht möglich einen parameterspezifischen Einfluss festzustellen.

Der zweite Fall dieses Parameters gilt, wenn  $\rho_2 < 0$  ist. Diese zwei Fälle wurden durch verschiedenes Ausprobieren der Parameter gefunden. Hierfür wurden ebenfalls mögliche Verläufe der stochastischen Prozesse simuliert und graphisch dargestellt (vergleiche Abbildung 7). Die Abbildung 7 ist genau so aufgebaut, wie die Abbildung zuvor. Die für die Simulation verwendeten Parameter finden sich oberhalb der Grafiken, wobei wieder der Parameter  $\rho_0$  in allen vier Grafiken variiert wurde. In den Grafiken mit  $\rho_0 = 1$  ist ein beschränktes Wachstum der Prozesse mit der Schranke  $\rho_0$  zu erkennen. Die abgebildeten Prozesse nähern sich mit zunehmender Zeit immer mehr dem Wert von  $\rho_0$  an. Wenn dies passiert, wird zudem auch die Oszillation innerhalb dieser Prozesse weniger.

Abbildung 7: Analyse des Parameters  $\rho_0$  bei beschränktem Wachstum des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Grafik wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert.

In der Grafik rechts unten aus der Abbildung 7 ist nur eine gerade Linie für alle vier Prozesse auf Höhe des vertikalen Wertes Eins zu erkennen. Dies hängt mit der Wahl des  $\rho_0 = 1$  zusammen, welches sich anhand der aufgestellten Formel ergibt

lasst. Eine entscheidende Rolle dabei spielt das bei der Implementierung ~~gleite~~  $Y_0$ , in dieser Arbeit  $Y_0 = 1$ . Dann passiert beim Ausrechnen des  $Y_1$  folgendes:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + \underbrace{1}_{=0} \underbrace{0}_{\{Z\}} \underbrace{Y_0}_{=0} (x_1 - x_0) + \underbrace{1}_{=0} \underbrace{0}_{\{Z\}} \underbrace{Y_0}_{=0} (B(x_1) - B(x_0)) \\ &= Y_0 + \underbrace{1}_{=0} \underbrace{0}_{\{Z\}} (x_1 - x_0) + \underbrace{1}_{=0} \underbrace{0}_{\{Z\}} (B(x_1) - B(x_0)) \\ &= Y_0: \end{aligned}$$

Dieses Wegfallen der Terme setzt sich in der weiteren Berechnung die Werte des Prozesses  $Y_i$  für  $i = 2; \dots; N - 1$  durch. Demnach gilt bei dieser Wahl des Parameters  $\theta_0 = Y_0$  für alle  $Y_i = Y_0$  für  $i = 1; \dots; N - 1$ . Dies ist unabhängig von der Wahl der weiteren Parameter, da die Terme, die diese Parameter enthalten, immer wegfallen.

#### 4.2.2 Betrachtung des zweiten Parameters $\theta_1$

Für die deskriptive Analyse des Parameters  $\theta_1$  wurde ebenfalls eine Abbildung, welche gleich aufgebaut ist, wie die Abbildungen zuvor, erstellt: Abbildung 8. Die gewählten Parameter für die Simulation der in Abbildung 8 abgebildeten Prozesse lauten  $\theta_0 = 30$ ;  $\theta_2 = 0.9$  und  $\theta_3 = 0.9$ .

Abbildung 8: Analyse des Parameters  $\theta_1$  des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Grafik wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert.

Mit der Wahl des Parameters  $\alpha_2 < 0$  wird ein beschränktes Wachstum der Prozesse erwartet. Dies tritt für  $\alpha_1 > 0$  zu und ist in den beiden unteren Grafiken und in der Grafik rechts oben von Abbildung 8 zu erkennen. Werden nur diese drei Grafiken betrachtet, so ist zu erkennen, dass sich die Prozesse bei  $\alpha_1 = 0,5$  langsamer über den betrachteten Zeitraum dem Wert  $\alpha_0$  annähern, als die Prozesse bei denen  $\alpha_1 = 1,7$  gewählt wurde. Es kann geschlossen werden, dass der Parameter einen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Annäherung an den Grenzwert hat. Bei der Wahl eines größeren  $\alpha_1 > 0$ , erreicht der Prozess den jeweiligen Grenzwert zu einem früheren Zeitpunkt, als dies bei einem kleineren  $\alpha_1 < 0$  der Fall gewesen wäre.

Wird der Parameter  $\alpha_1 < 0$  gewählt, so entwickeln sich die stochastischen Prozesse ohne Grenzwert ins Negative (siehe dazu die Grafik links oben in Abbildung 8). Dieser Verlauf der stochastischen Prozesse lässt sich nicht aus der Gleichung ablesen. Da aber in dieser Abschlussarbeit das Wachstum von Erdungsrissen betrachtet werden sollen, wird dieser Fall im Weiteren außer Acht gelassen. Im Anwendungsbezug ist es für einen Riss nicht möglich unendlich zu schrumpfen.

#### 4.2.3 Betrachtung des dritten Parameters $\alpha_2$

Bei der Betrachtung des Parameters  $\alpha_0$  wurde festgestellt, dass der Parameter  $\alpha_2$  hauptsächlich dafür verantwortlich ist, ob eher ein beschränktes oder explosives Wachstum vorliegt. Für eine genauere Untersuchung dieser Annahme wurden in Abbildung 9 verschiedene Pfade des stochastischen Prozesses mit unterschiedlichen Werten für  $\alpha_2$  simuliert. Die weiteren Parameter für diese Simulationen lauten  $\alpha_0 = 30$ ;  $\alpha_1 = 0,9$  und  $\alpha_3 = 0,9$ .

In der Abbildung 9 ist in den beiden oberen Grafiken ein eher explosives Wachstum der stochastischen Prozesse zu erkennen. Auffallend ist, dass dies bei den Werten für  $\alpha_2 = 0,7$  und  $\alpha_2 = 0,1$  vorkommt. Zuvor wurde angenommen, dass die Grenze zwischen explosivem und beschränktem Wachstum bei  $\alpha_2 = 0$  liegen würde. Diese Annahme lässt sich nicht mit Bestimmtheit bestätigen.

Abbildung 9: Analyse des Parameters  $\alpha_2$  des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Grafik wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern und gleichem `set.seed` simuliert.

Wird der Parameter  $\alpha_2$  kleiner als Eins gewählt, kann es zu einem mathematischen Problem führen, wenn  $\mu_0 < Y(x)$  ist. Dafür wird die Formel des stochastischen Prozesses in Form der Euler-Maruyama-Approximation herangezogen. Weiter soll gelten, dass  $\mu_0 < Y(x)$  ist und zum Beispiel  $\alpha_2 = 0.5$ . Dann gilt für den Driftterm folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mu_0 - Y(x)) \alpha_2^2 &= \frac{1}{2}(\mu_0 - Y(x)) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\mu_0 - Y(x)) \end{aligned}$$

mit  $\mu_0 - Y(x) < 0$ : E

Dies kann nicht berechnet werden, da in den reellen Zahlen keine Wurzel aus negativen Zahlen gezogen werden kann. Also kann  $\alpha_2 < 1$  nur gewählt werden, wenn  $\mu_0 > Y(x)$  ist.

In den zwei unteren Grafiken von Abbildung 9 ist ein beschränktes Wachstum der stochastischen Prozesse zu erkennen. Weiter ist festzustellen, dass die Prozesse ihren Grenzwert von  $\mu_0$  früher bei einem höheren negativen Wert von  $\alpha_2 = 0.9$  erreichen, als bei einem kleineren negativen  $\alpha_2$  mit  $\alpha_2 = 0.5$ .



#### 4.2.4 Betrachtung des vierten Parameters

Zuletzt wird der Parameter  $\sigma$ , welcher den Einfluss der Brownschen Bewegung auf den Verlauf des stochastischen Prozesses bestimmt, betrachtet. In Abbildung 10 sind jeweils für vier verschiedene Werte von  $\sigma$  verschiedene Pfade des stochastischen Prozesses simuliert. Diese Pfade unterscheiden sich lediglich durch die Wahl des Parameters  $\sigma$  und es wurde darauf geachtet, dass der gleiche `set.seed` verwendet wurde. Werden stochastische Prozesse mit  $\sigma = 0.1$  betrachtet, so unterscheiden diese

Abbildung 10: Analyse des Parameters des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Grafik wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern und gleichem `set.seed` simuliert.

sich kaum voneinander (siehe Abbildung 10 Grafik oben links). Dies tritt auf, da der Einfluss der Brownschen Bewegung auf die stochastischen Prozesse sehr klein gehalten wurde. Wird  $\sigma = 0$  gewählt, dann wird der stochastische Term der Differentialgleichung Null werden und nur der deterministische Term übrig bleiben. Wird der Parameter  $\sigma$  jedoch sehr groß gewählt, zum Beispiel  $\sigma = 1.5$ , so unterscheiden sich die stochastischen Prozesse sehr voneinander (vergleiche Abbildung 10 Grafik unten rechts).

#### 4.2.5 Deskriptive Betrachtung der Residuen

In diesem Unterkapitel werden die Residuen deskriptiv betrachtet. Dafür wurden Abbildungen erstellt, welche auf der horizontalen Achse die Beobachtungsnummern und auf der vertikalen Achse die Werte der Residuen abgetragen haben. Die am

meisten abweichenden Werte zur Null sind Rot eingefärbt. Zudem sind die eingezeichneten Punkte mit einer Linie jeweils orthogonal mit der Nulllinie der vertikalen Achse verbunden.

Abbildung 11: Darstellung der Residuen an allen Zeitpunkten von der Brownschen Bewegung. Die stochastische Differentialgleichung wurde mit den Parametern  $\theta = (45; 1; 3; 0; 5; 0; 7)$  simuliert und die Residuen mit den selben Parametern berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingefärbt.

Zunächst werden die Residuen des ursprünglichen stochastischen Prozesses betrachtet, also bevor nur jede zehnte Beobachtung ausgeglichen wurde. Damit wurde der stochastische Prozess an allen Zeitpunkten der Brownschen Bewegung berechnet. Diese Zeitpunkte werden in der Abbildung 11 der Einfachheit halber mit Beobachtungsnummern von Null bis Eintausend dargestellt. Für die Entstehung dieser Abbildung wurde zunächst ein stochastischer Prozess mit den beispielhaften Parametern  $\theta = (45; 1; 3; 0; 5; 0; 7)$  simuliert. Anschließend wurden die Residuen mit dem zur Simulation verwendeten Parametervektor berechnet und die Werte in der Abbildung 11 abgetragen. Zu erkennen ist, dass die Residuen gleichmäßig um die Null schwanken. Die Werte der Residuen liegen zwischen circa 4 und 6,5. Die etwas höheren Werte der Residuen belaufen sich auf circa 15 Prozent und sind in einem hellen Rot als Punkt markiert.

Aus den simulierten Daten des stochastischen Prozesses wird eigentlich nur jede zehnte Beobachtung betrachtet (vergleiche Kapitel 4.1). Die Abbildung 12 stellt die Residuen der hundert ausgeglichenen Beobachtungen des zuvor betrachteten Prozesses dar. In dieser Abbildung sind die berechneten Residuen des ursprünglichen stochastischen Prozesses mit den Parametern  $\theta = (45; 1; 3; 0; 5; 0; 7)$  dargestellt. Die Werte der Residuen liegen zwischen 3,5 und 3, also ist die Spanne der Werte etwas klei-

ner als zuvor. Die Anzahl der rot markierten hohen Werte beträgt hier nur circa 6 Prozent.

Abbildung 12: Darstellung der Residuen eines stochastischen Prozesses. Der Prozess wurde mit dem Parameter  $\theta = (45; 1:3; 0:5; 0:7)$  simuliert und die Residuen mit den selben Parametern berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingezeichnet.

Im Vergleich zur Abbildung 12 wird nun in Abbildung 13 der gleiche stochastische Prozess mit den Parametern  $\theta = (45; 1:3; 0:5; 0:7)$  betrachtet, allerdings werden die Residuen für den falschen Parametervektor  $\theta = (17; 0:6; 1:2; 0:2)$  berechnet. Dies wird als Vorarbeit für die Tests betrachtet. Die Tests entscheiden anhand der Residuen und der entsprechenden Summen aus Kapitel 3.4, weshalb der deskriptive Vergleich der Residuen mit richtigem und falschem Parameter von Interesse ist.

Außerdem ist in der Abbildung 13 zu sehen, dass die Spanne der Werte deutlich größer ist und von circa -80 bis 80 reicht. Zudem ist eine Ähnlichkeit in den Verläufen der Residuen zu erkennen, zum Beispiel, wann eher hohe positive oder negative Werte erreicht werden. Jedoch scheinen die Residuen der zwei Parametervektoren sich deutlich in ihren Werten zu unterscheiden.

Abbildung 13: Darstellung der Residuen eines stochastischen Prozesses, welche mit einem falschen Parametervektor berechnet wurden. Der Prozess wurde mit dem Parametervektor  $\theta = (45; 1:3; 0:5; 0:7)$  simuliert und die Residuen mit den Parametern  $\theta = (17; 0:6; 1:2; 0:2)$  berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingefärbt.

### 4.3 Vergleich der Tests

In diesem Kapitel erfolgt ein Vergleich anhand der Güte der ausgewählten Tests: der Residuen-Momenten-Test, der Tiefe-Test 1 und der Tiefe-Test 2. Für das Berechnen der Gütefunktionen wird jeweils ein kleinschrittig unterteilter Sequenzbereich (100 Schritte) um den wahren Parameter gelegt. An jedem Schritt des Sequenzbereiches werden ein tausend Mal stochastische Prozesse simuliert und mit den Tests jeweils getestet. Dabei bleiben die anderen drei verwendeten Parameter unverändert. Anschließend wird die Anzahl der abgelehnten Nullhypothesen gezählt und durch die Anzahl der insgesamt simulierten stochastischen Prozesse geteilt. So entsteht ein Wert für die Güte des Testes an jedem Schritt der Sequenz. Hierbei wird die Brownsche Bewegung und der stochastische Prozess jeweils einmal auf dem Intervall von Null bis Eins und einmal auf dem Intervall von Null bis Zwei simuliert. Für das Intervall  $[0; 1]$  werden 1000 Schritte simuliert und für das Intervall  $[0; 2]$  jeweils 2000 Schritte. So können Unterschiede in Bezug auf das betrachtete Intervall untersucht werden.

Nun folgt eine allgemeine Beschreibung der in den folgenden Kapiteln verwendeten Abbildungen. Abgebildet sind jeweils die Gütefunktionen, links die Gütefunktionen für das Intervall von Null bis Eins und rechts die Gütefunktionen von Null bis Zwei. Auf der horizontalen Achse ist die Sequenz der zu testenden Parameter

abgetragen und auf der vertikalen Achse der zugehörige Gutewert. Zusätzlich ist das Signifikanzniveau von  $\alpha = 0:05$  mit einer roten horizontalen Linie eingezeichnet. Die Gutefunktion des Residuen-Momenten-Testes hat die Farbe Schwarz, die des Tiefe-Tests 1 Blau und die Funktion des Tiefe-Tests 2 Violett. Die zusätzlichen drei Parameter, die für die Simulation verwendet wurden, sind oben in der Abbildung angegeben.

#### 4.3.1 Bei explosiv wachsenden Prozessen

Für die Betrachtung der Gutefunktion wird der Parametervektor  $\theta^{(1)} = (35; 0:9; 0:7; 0:9)$  betrachtet. Die getestete Nullhypothese lautet  $H_0: \theta = \theta^{(1)}$ . Zusätzlich wurden auch Gutefunktionen für den Parametervektor  $\theta^{(2)} = (45; 1:3; 0:5; 1:2)$  simuliert. Die Gutefunktionen dieses Parameters  $\theta^{(2)}$  haben sich kaum merklich von denen von  $\theta^{(1)}$  unterschieden, weswegen hier primär nur die Gutefunktionen des Parametervektors  $\theta^{(1)} = (35; 0:9; 0:7; 0:9)$  analysiert werden.

Abbildung 14: Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_1 = 0:9$ ;  $\theta_2 = 0:7$ ;  $\theta_3 = 0:9$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$  von  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 35$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

In der Abbildung 14 werden zunächst die Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  betrachtet. Für jede Stelle der Sequenz von  $\theta_0$  wurde der Prozess mit dem Parametervektor  $\theta = (\theta_0; 0:9; 0:7; 0:9) = (\theta_0; \theta_1; \theta_2; \theta_3)$  simuliert und die Nullhypothese  $H_0: \theta = \theta^{(1)}$  getestet. Außerhalb in der Abbildung 14 ist, dass die umgedrehte Glo-

Glockenkurve für das Intervall  $[0; 2]$  deutlich schmaler ist, als für das Intervall  $[0; 1]$ . Wird der stochastische Prozess nur auf dem Intervall von Null bis Eins betrachtet, so erreichen alle drei Graphen der Gütefunktion ihr Minimum kurz nach dem wahren Parameter auf der Sequenz  $\tau_0$ . An der Stelle des wahren Parameters  $\theta_0 = 35$  ist der Tiefe-Test 1 zu konservativ, dies bedeutet, dass er die Nullhypothese häufiger annimmt als vom Signifikanzniveau vorgegeben ist. Sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 2 halten das Signifikanzniveau  $= 0:05$  in diesem Fall genau ein. Wird das Intervall von Null bis Zwei betrachtet, so liegen die Minima der Gütefunktionen genau bei dem wahren Parameter  $\theta_0 = 35$ . Alle drei Tests halten das Signifikanzniveau ein.

Werden die Gütefunktionen für den Parametervektor  $\theta^{(2)}$  in Abbildung 33 (siehe Anhang A) betrachtet, so fällt auf, dass die Glockenkurven ausladender verlaufen als zuvor. Auf dem Intervall  $[0; 1]$  halten der Tiefe-Test 2 und der Residuen-Momenten-Test das Testniveau ein. Zu konservativ verhält sich jedoch der Tiefe-Test 1. Alle drei Tests halten jedoch das Signifikanzniveau auf das Intervall  $[0; 2]$  ein.

Abbildung 15: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_1 = 35$ ;  $\theta_2 = 0:7$ ;  $\theta_3 = 0:9$ . Getestet wird eine Sequenz  $\tau_1$ , wobei unter  $H_0 : \theta_1 = 0:9$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

Bei Betrachtung der Gütefunktion für den Parameter  $\theta_1$  auf dem Intervall  $[0; 1]$  in Abbildung 15 scheinen sich die Funktionen kaum merklich zu unterscheiden. Es fällt auf, dass der Residuen-Momenten-Test links vom wahren Parameter unterhalb

der Tiefe-Tests liegt. Auf der rechten Seite vom wahren Parameter verlaufen die Graphen der drei Tests jedoch fast genau gleich. Alle drei Gütefunktionen erreichen den Wert 1:0 bei 0:63 und 1:2 der Sequenz von  $\theta_1$ .

Wird der Bereich um den wahren Parameter von:0 bis 1:0 betrachtet, so verlaufen die drei Graphen dort unterschiedlich. Alle drei Graphen erreichen ihren tiefsten Punkt kurz vor dem wahren Parameter. An der Stelle des wahren Parameters halten der Tiefe-Test 2 und der Residuen-Momenten-Test das Signifikanzniveau ein. Der Tiefe-Test 1 verhält sich auf Höhe des wahren Parameters,  $\theta_1 = 0:9$  zu konservativ, da die Gütefunktion an diesem Punkt bei circa  $\theta_1 = 0:3$  liegt.

Werden mit diesen Ergebnissen die Ergebnisse des Intervalls  $[0, 2]$  verglichen, so fällt sofort auf, dass die Gütefunktionen wieder deutlich schmaler verlaufen. Diese erreichen den Wert Eins circa bei den Punkten:0 und 1:1 der Sequenz von  $\theta_1$ . Auch bei diesem Intervall fällt der Graph des Residuen-Momenten-Tests auf der linken Seite eher ab, als die Graphen der Tiefe-Tests. Die Tiefpunkte der Graphen liegen nun fast genau über dem wahren Parameter. Allerdings ist der Tiefe-Test 1 erneut zu konservativ für das Signifikanzniveau und der Residuen-Momenten-Test ein wenig zu liberal.

Ähnliches wird für den Parametervektor  $(2) = (45; 1:3; 0:5; 1:2)$  in Abbildung 34 (siehe Anhang A) beobachtet. Im Intervall  $[0, 1]$  erreichen alle Graphen ihren Tiefpunkt bei einem niedrigeren  $\theta_1$  als der wahre Parameter. Jedoch erreichen die Graphen den Punkt Eins erst in einem Abstand von circa:0 um den wahren Parameter  $\theta_1 = 1:3$ . Bei der Betrachtung des Intervalls  $[0, 2]$  werden auch bei diesen Parametern die Graphen schmaler und der Tiefpunkt rückt näher an den wahren Parameter. Auch hier ist der Tiefe-Test 1 zu konservativ bezüglich des Signifikanzniveaus.

Nun werden die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_2$  in Abbildung 16 betrachtet. Auallend ist, dass diese Graphen den Wert Eins schon bei den Punkten:0 und 0:8 der Sequenz von  $\theta_2$  für das Intervall  $[0; 1]$  erreichen. Der Residuen-Momenten-Test erreicht den Tiefpunkt des Graphen bei circa:02. Beide Tiefe-Tests erreichen ihr Minimum bei dem wahren Parameter  $\theta_2 = 0:7$ . An dem Punkt des wahren Parameters hält der Residuen-Momenten-Test das Signifikanzniveau von  $\alpha = 0:05$  ein. Die beiden Tiefe-Tests sind zu konservativ.

Auch auf dem Intervall  $[0; 2]$  ist der Tiefe-Test 1 zu konservativ gegenüber dem Niveau. Auch der Residuen-Momenten-Test verhält sich zu konservativ gegenüber dem Signifikanzniveau bei dem wahren Parameter  $\theta_2 = 0:7$ . Der Graph des Tiefe-Tests 2 erreicht das Minimum bei dem wahren Parameter und hält das Niveau genau ein.

Im Vergleich wird nun die Abbildung 35 (siehe Anhang A) betrachtet. Für den Parametervektor  $\theta^{(2)}$  ist sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 1 zu konservativ auf dem Intervall von Null bis Eins für das Signifikanzniveau bei dem wahren Parameter  $\theta_2 = 0.5$ . Für den Residuen-Momenten-Test und den Tiefe-Test 2 erreichen die Graphen das Minimum auf dem Intervall  $[0; 2]$  nach dem wahren Parameter. Zudem sind beide Tests in diesem Fall zu konservativ. Jedoch hält der Tiefe-Test 2 das Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  genau ein.

Insgesamt scheinen die Tests sehr sensibel in Bezug auf den Parameter zu sein, da die Graphen der Gütefunktionen sehr schmal um den wahren Parameter verlaufen.

Abbildung 16: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_2$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_1 = 0.9$ ;  $\theta_2 = 0.9$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0: \theta_2 = 0.7$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.

Zuletzt werden die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  betrachtet. Dieser Parameter legt die Größe des Einusses der Brownschen Bewegung auf den stochastischen Prozess fest. In der Abbildung 17 wird die Gütefunktion für den wahren Parameter  $\theta = 0.9$  dargestellt. Die umgedrehte Glockenkurve ist auf dem Intervall  $[0; 1]$  deutlich breiter, als für das Intervall  $[0; 2]$ . Für die Gütegraphen in Abbildung 17 fällt für das Intervall von Null bis Eins auf, dass alle drei Gütefunktionen ihr Minimum kurz vor und nicht genau bei dem wahren Parameter  $\theta = 0.9$  erreichen. Das Signifikanzniveau am wahren Parameter in der Sequenz auf der horizontalen Achse wird von



dem Tiefe-Test 2 und dem Residuen-Momenten-Test eingehalten. Wie schon zuvor ist der Tiefe-Test 1 zu konservativ.

Die Minima der Tiefe-Tests liegen für das Intervall von Null bis Zwei bei dem wahren Parameter von  $\theta = 0:9$ . Der Graph der Gütefunktion des Residuen-Momenten-Tests erreicht sein Minimum schon vor dem wahren Parameter. Jedoch halten alle drei Tests das Signifikanzniveau bei dem wahren Parameter ein.

Ähnliches lässt sich in Abbildung 36 (siehe Anhang A) für den Parametervektor <sup>(2)</sup> erkennen. Auf dem Intervall von Null bis Eins werden die Minima aller drei Tests kurz vor dem wahren Parameter erreicht. Am Punkt des wahren Parameters von  $\theta = 1:2$  erreichen der Residuen-Momenten-Test und der Tiefe-Test 2 das vorgegebene Signifikanzniveau. Der Tiefe-Test 1 ist auch bei diesem Parametervektor zu konservativ.

Das vorgegebene Signifikanzniveau wird von allen drei Tests auf dem Intervall von Null bis Zwei für den selben wahren Parameter eingehalten. Allerdings erreicht auch in diesem Fall der Residuen-Momenten-Test sein Minimum früher, also weiter links der Sequenz von dem wahren Parameter.

Abbildung 17: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 35$ ;  $\theta_1 = 0:9$ ;  $\theta_2 = 0:7$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0 : \theta = 0:9$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

#### 4.3.2 Bei wenig Einuss der Brownschen Bewegung auf die stochastischen Prozesse

In diesem Unterkapitel werden im Vergleich zu Kapitel 3.3.1 Gutfunktionen betrachtet, bei denen der Einuss der Brownschen Bewegung auf die stochastischen Prozesse reduziert wurde, indem der Parameter deutlich kleiner gewählt wird. Simuliert werden die nun betrachteten stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(3)} = (40; 0.1; 0.8; 0.1)$ .

Abbildung 18: Gutfunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_1 = 0.1$ ;  $\theta_2 = 0.8$ ;  $\theta_3 = 0.1$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 40$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.

In der Abbildung 18 sind die Gutfunktionen für den Parameter  $\theta_0$  dargestellt. Dabei wurden die stochastischen Prozesse jeweils mit dem Parametervektor  $\theta^{(3)}$  simuliert. Alle drei Gutfunktionen erreichen ihr Minimum für das Intervall  $[0; 1]$  nach dem wahren Parameter  $\theta_0 = 40$ . An der Stelle von  $\theta_0 = 40$  halten sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 2 das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  ein. Der Tiefe-Test 2 ist in Bezug auf das Testniveau zu konservativ und das Intervall  $[0; 2]$  halten alle drei Gutfunktionen der Tests das Signifikanzniveau ein.

Bei der Betrachtung der Gutfunktionen für den wahren Parameter  $\theta_1 = 0.1$  in Abbildung 19 fällt zunächst auf, dass diese sehr schmal sind. Der Wert Eins wird auf beide Intervalle spätestens bei den Werten 10 und 0.2 der Sequenz von  $\theta_1$  erreicht.

Abbildung 19: Gütefunktionen für den Parameter  $\mu_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\mu_2 = 0:8$ ;  $\sigma = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0 : \mu_1 = 0:1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

Auf dem Intervall von Null bis Eins haben alle drei Gütefunktionen der Tests ihr Minimum auf Höhe des wahren Parameters. Dabei verhält sich der Tiefe-Test 1 bezüglich des Signifikanzniveaus von  $\alpha = 0:05$  zu konservativ. Der Tiefe-Test 2 hält das Niveau genau ein. Der Residuen-Momenten-Test verhält sich zu liberal für das Testniveau an der Stelle des wahren Parameters. Das Minimum der Gütefunktion für den Residuen-Momenten-Test liegt wieder vor dem wahren Parameter bei circa  $\mu_1 = 0:09$ .

Im Gegensatz dazu erreicht der Tiefe-Test 2 das Signifikanzniveau auf dem Intervall  $[0; 2]$  nicht und ist damit zu liberal. Sowohl der Tiefe-Test 1 als auch der Residuen-Momenten-Test halten das Niveau ein.

In Abbildung 20 werden die Gütefunktionen für den wahren Parameter  $\mu_2 = 0:8$  dargestellt. Im Vergleich zu der Abbildung 16 sind die Gütefunktionen ungefähr gleich schmal. Für das Intervall  $[0; 1]$  in der Abbildung 20 hält der Tiefe-Test 2 das Signifikanzniveau genau ein. Sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 1 sind zu konservativ für das gewählte Niveau. Wird das Intervall von Null bis Zwei begutachtet, so ist zu erkennen, dass der Tiefe-Test 2 auch hier das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  einhält. Die beiden weiteren Tests, also der Residuen-Momenten-Test und der Tiefe-Test 1 verhalten sich zu konservativ. Die Minima der Gütefunktionen liegen bei dem wahren Parameter  $\mu_2 = 0:8$ .

Abbildung 20: Gutefunktionen für den Parameter  $\mu_2$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\mu_1 = 0:1$ ;  $\mu_2 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0 : \mu_2 = 0:8$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

Abbildung 21: Gutefunktionen für den Parameter  $\mu_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\mu_1 = 0:1$ ;  $\mu_2 = 0:8$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0 : \mu_1 = 0:1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt.

---

Zuletzt werden die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  betrachtet. Dabei wurde dieser Parameter bewusst klein gewählt, um den Einfluss der Brownschen Bewegung auf den stochastischen Prozess zu minimieren. Ausgehend in der Abbildung 21 sind die zwei Minima der Gütefunktionen. Sie liegen zum einen bei dem wahren Parameter  $\theta = 0:1$  und zum anderen bei  $\theta = 0:1$ . Dieses Phänomen ist vorher nicht aufgetreten, da die betrachteten Sequenzen nicht groß genug waren. Dies tritt auf, da die Brownsche Bewegung normalverteilt ist und damit symmetrisch um Null. Allerdings darf der Parameter  $\theta$  laut Definition nur aus den positiven reellen Zahlen stammen.

Wird nun jeweils das Minimum am wahren Parameter  $\theta = 0:1$  betrachtet, so hält der Tiefe-Test 2 auf dem Intervall  $[0, 1]$  das gewählte Signifikanzniveau genau ein. Der Tiefe-Test 1 und der Residuen-Momenten-Test hingegen verhalten sich zu konservativ für das Niveau, auch für diesen betrachteten Parametervektor.

Sowohl der Tiefe-Test 1 als auch der Tiefe-Test 2 halten das Signifikanzniveau für das Intervall von Null bis Zwei für den wahren Parameter  $\theta = 0:1$  ein. Anders als bei den letzten Tests ist in dieser Situation der Residuen-Momenten-Test zu konservativ bezüglich des Niveaus  $\alpha = 0:05$ .

Zusammenfassend ist festzustellen, dass der Tiefe-Test das Signifikanzniveau meist zu konservativ ist, während der Residuen-Momenten-Test sich in den meisten Fällen zu liberal verhält. Der Tiefe-Test 2 scheint das gewählte Signifikanzniveau in fast allen betrachteten Fällen genau einzuhalten.

#### 4.4 Vergleich der Tests mit Ausreißern

In diesem Kapitel werden den simulierten stochastischen Prozessen additive Ausreißer hinzugefügt. Die Vorgehensweise des Einfügens der Ausreißer wird in Kapitel 4.1 erläutert. Mit dieser Methode soll die Robustheit der Tests gegenüber diesen Ausreißern getestet werden. Im folgenden Unterkapitel 4.4.1 werden die simulierten stochastischen Prozesse zunächst mit den Ausreißern auf die gleiche Weise wie in Kapitel 4.3.1 getestet. Anschließend wird in Unterkapitel 4.4.2 eine weitere Möglichkeit für die Durchführungen der Tests betrachtet. Beide Verfahren zielen darauf ab, die Robustheit der Tests zu ergänzen und den möglichst robustesten Test zu ermitteln.

##### 4.4.1 Hinzufügen der Ausreißer bei gleichen Testverfahren

Die ursprüngliche Idee bezüglich der Ausreißer war es, diese einzufügen, um somit den robustesten Test zu ermitteln. Dies hat nicht so funktioniert wie geplant. Das

Einfügen der Ausreißer in den stochastischen Prozess ist ohne weiteres möglich, genauso wie die Durchführung der Tests. Allerdings lehnen nun alle drei Tests die Nullhypothese für  $\theta^{(1)}$  für die gesamte getestete Sequenz ab, also auch den wahren Parametervektor. Die Gütefunktionen für den Parametervektor  $\theta^{(2)}$  verhalten sich ebenfalls so. Diese Gütefunktionen sind für alle drei getesteten Parameter von  $\theta^{(1)}$  in den Abbildungen 22, 37, 23 und 38 dargestellt. Die Abbildungen 37 und 38 befinden sich im Anhang A.

Abbildung 22: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(1)}$ . Getestet wird eine Sequenz auf  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 35$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Außerdem ist die Abbildung 23, da in dieser die Gütefunktionen in der rechten Grafik für das Intervall  $[0; 1]$  am Anfang der getesteten Sequenz einen Knick nach unten aufweisen. Dabei liegen die Tiefe-Tests niedriger als der Residuen-Momenten-Test. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass aufgrund der verschiedenen Adjustierung die Tiefe-Tests schlechter reagieren als der Residuen-Momenten-Test.

Annahme war, dass die Tiefe-Tests robuster als der Residuen-Momenten-Test sind, da diese Tests die Datentiefe betrachten und diese Ausreißer nicht erkennt. Jedoch aufgrund des jeweils zweiten Entscheidungskriteriums der Tiefe-Tests mit  $S_2$  wird die Nullhypothese trotzdem abgelehnt. Die Größe  $S_2$  ist nicht robust gegen Ausreißer, weshalb die Nullhypothese immer abgelehnt werden.

Allgemein ist festzuhalten, dass alle drei Tests unrobust gegenüber Ausreißern

in dem stochastischen Prozess sind. Es muss also eine Möglichkeit gefunden werden, dass diese Tests robuster gegen Ausreißer werden. Die Idee für dieses Problems wird im folgenden Unterkapitel 4.4.2 betrachtet.

Abbildung 23: Gütefunktionen für den Parameter  $\beta_2$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(1)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $\beta_2$ , wobei unter  $H_0: \beta_2 = 0.7$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

#### 4.4.2 Neue Modellierung der Tests für die Erreichung einer Robustheit gegenüber Ausreißern

Im vorherigen Unterkapitel wurde festgestellt, dass unter anderem das Entscheidungskriterium  $S_2 = S_2$  dafür verantwortlich ist, dass die Nullhypothesen beim Testen der stochastischen Prozesse mit Ausreißern abgelehnt werden. Die daraus resultierende Idee lautet, dass die Tests ohne das Entscheidungskriterium neu modelliert werden. Durch diese neue Modellierung der Tests soll eine Robustheit der Tests gegenüber Ausreißern demonstriert werden.

Die Tests werden dann mit adjustiertem Testniveau wie folgt formuliert:

Der Residuen-Momenten-Test lehnt die Nullhypothese  $H_0: \beta_2 = \beta_2$  zum Signifikanzniveau  $\alpha$  ab, wenn ein  $j = 1; 3; 4$  existiert, mit dem gilt:

$$|s_j(\hat{\beta}_2)| > q_{N(0; 1); (1 - \frac{\alpha}{6})}$$

Der Tiefe-Test 1 lehnt die Nullhypothese  $H_0 : =$  zum Signi kanzniveau ab, wenn gilt:

$$S_4(\ ) < q_{N(0; 1)} ;$$

Der Tiefe-Test 2 lehnt die Nullhypothese  $H_0 : =$  zum Signi kanzniveau  $= 0:05$  ab, wenn gilt:

$$S_3(\ ) < q ;$$

wobei  $q = 1:2545411$  (Falkenau 2016, S. 76).

Mit diesen neu modellierten Tests wurden die Simulationen der Tests mit additiven Ausreißern für den Parametervektor <sup>(1)</sup> erneut durchgeführt. Die Gütefunktionen für die getesteten Parameter von <sup>(1)</sup> sind in den Abbildungen 39, 40, 41 und 42 im Anhang A dargestellt. Das gewünschte Ergebnis blieb jedoch aus.

In den Abbildungen 39, 40 und 42 wird die Nullhypothese auf die gesamte getestete Sequenz jeweils vom Residuen-Momenten-Test abgelehnt. Die Gütefunktionen der Tiefe-Tests verlaufen für die gesamte Sequenz des jeweiligen Parameters unter dem Signi kanzniveau. Wird die Abbildung 41 betrachtet, so fällt auf, dass sich die Gütefunktionen der Tests wie in den Abbildungen 40 und 42 verhalten, jedoch die Gütefunktion des Tiefe-Tests 2 auf der rechten Seite der Sequenz  $f_2$  über dem Signi kanzniveau verläuft und anschließend unter das Niveau sinkt. Für dieses Verhalten ist bis jetzt keine Lösung meinerseits gefunden worden.

Nun wurden die gleich modifizierten Tests auch für den Parametervektor <sup>(3)</sup> durchgeführt. Hierbei ergab sich ungewöhnlicher Weise ein ganz anderes Ergebnis. Zunächst wird die Abbildung 24 betrachtet, welche die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  der drei Tests enthält. Außerhalb in der Abbildung 24 ist, dass der Tiefe-Test 2 als einziger Test zu funktionieren scheint. Die Gütefunktion dieses Testes erreicht ihr Minimum beim wahren Parameter  $\theta_0 = 40$ . An dieser Stelle ist der Test allerdings zu konservativ bezüglich des Signi kanzniveaus von  $= 0:05$ . Der Residuen-Momenten-Test lehnt die Nullhypothese immer ab, sodass die Gütefunktion dieses Testes bei  $G(\theta_0) = 1$  verläuft. Im Gegensatz dazu nimmt der Tiefe-Test 1 die Nullhypothese immer an und verläuft bei  $G(\theta_0) = 0$ .



Abbildung 24: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(3)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 45$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Nun werden in der Abbildung 25 die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  der drei Tests betrachtet. Die Gütefunktionen des Residuen-Momenten-Tests lehnen die Nullhypothese für beide Intervalle in Abbildung 25 jedes mal ab. Im Gegensatz dazu verläuft die Gütefunktion des Tiefe-Tests 2 fast so wie eine Gütefunktion verlaufen sollte. Die Graphen sind allerdings auf der linken Seite deutlich steiler als auf der rechten Seite. Zudem ist der Test für das Signifikanzniveau von  $\alpha = 0:05$  für beiden Intervallen zu konservativ. Ganz anders als erwartet, verlaufen die Graphen des Tiefe-Tests 1. Auf dem Intervall von Null bis Zwei verläuft der Graph bis zum wahren Parameter von  $\theta_1 = 0:1$  fast wie eine zu erwartende Gütefunktion. Ab dem wahren Parameter in der Sequenz ist die Steigung des Graphen sehr niedrig. Das Testniveau ist an der Stelle des wahren Parameters deutlich zu konservativ. An dieser Stelle liegt die Gütefunktion des Tiefe-Tests 1 bei Null, welches bedeutet, dass die Nullhypothese jedes Mal angenommen wird.

Für die Testung auf diesen Parameter scheint in dieser Ausgangssituation der Tiefe-Test 2 der einzige Test zu sein, der wie erwünscht funktioniert. Wird nur die linke Seite der Sequenz von  $\theta_1 = 0:1$  betrachtet, so scheint auch der Tiefe-Test 1 sinnvoll. Warum dieser auf der rechten Seite der Sequenz von  $\theta_1 = 0:1$  nicht mehr so verläuft konnte noch nicht geklärt werden. Der Residuen-Momenten-Test lehnt die Nullhypothese immer ab, da die weiteren Teststatistiken des Tests nicht robust gegen

Ausreier sind, weswegen bei diesem Test das Weglassen der einen Teststatistik also nichts verändert hat.

Abbildung 25: Gütefunktionen für den Parameter  $\mu_1$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreibern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(3)</sup>. Getestet wird eine Sequenz auf  $\mu_1$ , wobei unter  $H_0: \mu_1 = 0:1$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Als nächstes wird der Parameter  $\mu_2$  aus dem Parametervektor<sup>(3)</sup> mit den neu formulierten Tests getestet. Diese Ergebnisse in Form der Gütefunktionen sind in Abbildung 26 dargestellt. Auch für diesen Parameter lehnt der Residuen-Momenten-Test die Nullhypothesen jedes mal ab und verläuft somit als horizontale Gerade auf Höhe des Wertes Eins. Die Gütefunktion des Tiefe-Test 1 startet am Anfang der Sequenz von  $\mu_2$  bei einem Wert von  $\text{circa } G(\mu_2) = 0:05$ . Die Gütefunktion fällt dann bis der Graph den Wert Null erreicht hat. Ab dem Wert  $\mu_2 = 0:9$  steigt die Gütefunktion an, sodass diese bis zum Ende der betrachteten Sequenz das Intervall  $[0; 1]$  einen Wert von 075 erreicht hat. Wird das Intervall von Null bis Zwei betrachtet, so verhalten sich die Gütefunktionen des Residuen-Momenten-Tests fast genau so, wie für das Intervall von Null bis Eins. Die Gütefunktion des Tiefe-Tests 1 startet jedoch am Anfang der Sequenz kurz über dem Signifikanzniveau und erreicht den Wert Eins bei  $\mu_2 = 1:1$ . Wie eine tatsächlich zu erwartende Gütefunktion verläuft der Graph für den Tiefe-Test 2, auch wenn der Graph rechts deutlich steiler ist als auf der linken Seite. Für das Intervall  $[0; 2]$  erreicht die Gütefunktion den Wert Eins auf der rechten Seite vom wahren Parameter bei  $\text{circa } \mu_2 = 0:9$ . Auf der linken

Seite vom wahren Parameter sinkt die Funktion von Eins auf unter das Niveau innerhalb von einem Schritt der Sequenz. Für beide Intervalle ist der Tiefe-Test 2 zu konservativ für das Signifikanzniveau des wahren Parameters.

Abbildung 26: Gütefunktionen für den Parameter  $\beta_2$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(3)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $\beta_2$ , wobei unter  $H_0: \beta_2 = 0.8$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

Zuletzt wird noch der Parameter  $\beta_3$  des Parametervektors<sup>(3)</sup> betrachtet und getestet. Dargestellt ist dies in Abbildung 27. Auch für diesen Parameter lehnt der Residuen-Momenten-Test die Nullhypothese immer ab und verläuft horizontal bei dem Wert  $G(\beta_3) = 0$ . Die Graphen der Tiefe-Tests verhalten sich ganz anders. Diese verlaufen für den Tiefe-Test 1 knapp über Null und für den Tiefe-Test 2 bei circa 0.3. Kurz vor  $\beta_3 = 0$  steigen beide Graphen bis zur 1, um dann sofort wieder auf ihren ursprünglichen Wert zu sinken.

Aufgrund des Verhaltens der Gütefunktionen für die Tiefe-Tests in der Abbildung 27 wird für diesen speziellen Fall das gleiche Testverfahren, also ohne die Teststatistik  $S_2$  und ohne Ausreißer betrachtet. Diese Gütefunktionen sind in Abbildung 28 dargestellt. In dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Gütefunktionen der Tiefe-Tests genau so verlaufen wie zuvor. Dies hat als Grund, dass die Tiefe-Tests als einziges Entscheidungskriterium den jeweiligen Tiefewert haben. Im Vergleich dazu ist der Residuen-Momenten-Test in dieser Situation ohne Ausreißer deutlich besser, da die Gütefunktion dieses in einer Glockenkurve mit dem Minimum beim

wahren Parameter verläuft. Für den wahren Parameter  $\theta = 0:1$  ist der Residuen-Momenten-Test zu konservativ für das gewählte Signifikanzniveau.

Abbildung 27: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(3)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0: \theta = 0:1$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Auch die neue Modellierung der Tests hat nicht zum erwünschten Ergebnis geführt, sowohl bei viel Einuss der Brownschen Bewegung auf den stochastischen Prozess, als auch bei wenig Einuss auf diesen. Jedoch scheint der Tiefe-Test 2 bei kleinem  $\alpha$  für die Parameter  $\theta_1$  und  $\theta_2$  ganz gut zu funktionieren. Es sollte aber weiter nach einer Verbesserung der Tests gesucht werden, da nur ein Entscheidungskriterium für die Tiefe-Tests sehr wenig ist.

Abbildung 28: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  für alle drei Tests ohne hinzugefügte Ausreißer bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(3)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0: \theta = 0:1$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

#### 4.5 Vergleich der Ergebnisse mit denen einer leicht abgewandelten Modellgleichung

In diesem Unterkapitel wird noch mal eine etwas abgewandelte stochastische Differentialgleichung betrachtet. Dafür wird eine etwas abgewandelte Form der zuvor verwendeten stochastischen Differentialgleichung aufgestellt. Anschließend werden die Gütefunktionen dieser stochastischen Differentialgleichung mit denen, der ursprünglichen stochastischen Differentialgleichung verglichen.

Die hier betrachtete neue stochastische Differentialgleichung lautet:

$$dY(x) = \alpha_1 (0 < Y(x))^\beta dx + \alpha_2 (0 < Y(x))^\beta dB(x);$$

mit  $\alpha = (\alpha_0; \alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$  und  $B$  der Brownschen Bewegung. Nun wird also ein positiver Exponent betrachtet, sodass eher ein beschränktes Wachstum simuliert wird (vergleiche 4.2). Auch diese stochastische Differentialgleichung wird mithilfe der Euler-Maruyama-Methode approximiert, sodass sich für  $i = 0; 1; \dots; N-1$  die folgende Approximation ergibt:

$$Y(x_{i+1}) = Y(x_i) + \alpha_1 (0 < Y(x_i))^\beta (x_{i+1} - x_i) + \alpha_2 (0 < Y(x_i))^\beta (B(x_{i+1}) - B(x_i));$$

Aufgrund der Tatsache, dass dieses Modell nur kurz beleuchtet werden soll, wird für dieses Modell die gleiche Programmierung wie zuvor verwendet. Jedoch wird der Parameter  $\beta_2$  negativ gewählt, sodass Folgendes auf den Driftterm gilt, für das Beispiel  $\beta_2 = -0.5$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \beta_0 \{Z\} Y(x)}{\text{voheriger Driftterm}} \right|^2 &= \left| \frac{1 - \beta_0 Y(x)}{\text{neuer Driftterm}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1 - \beta_0 Y(x)}{\text{neuer Driftterm}} \right|^{0.5} \\ &= \left| \frac{1 - \beta_0 Y(x)}{\text{neuer Driftterm}} \right|^2 : \end{aligned}$$

Es wird der Parametervektor  $\beta^{(3)}$  betrachtet, allerdings nun in etwas abgewandelter Form:  $\beta^{(4)} = (40; 0.1; -0.8; 0.1)$ . Für diesen Parametervektor wurden ebenfalls die Gütefunktionen für die verschiedenen Situationen erstellt. Zunächst werden die Gütefunktionen ohne Ausreißer betrachtet. Diese sind in Abbildung 43, 44, 45 und 46 im Anhang A dargestellt.

In Abbildung 43 ist zu erkennen, dass der Tiefe-Test für den wahren Parameter  $\beta_0 = 40$  zu konservativ bezüglich des Signifikanzniveaus von  $\alpha = 0.05$  ist. Für den Parameter  $\beta_1 = 0.1$  in Abbildung 44 ist der Tiefe-Test 1 für das Intervall  $[0; 1]$  zu konservativ. Jedoch halten für das Intervall  $[0; 2]$  sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 1 das Signifikanzniveau ein. Der Tiefe-Test 2 ist in diesem Fall zu liberal.

Werden die Gütefunktionen für den Parameter  $\beta_2$  in Abbildung 45 betrachtet, so ist zu allend, dass sowohl der Residuen-Momenten-Test als auch der Tiefe-Test 1 zu konservativ sind. Der Tiefe-Test 2 hält das Signifikanzniveau ein. In der Abbildung 46 ist zu erkennen, dass auf das Intervall von Null bis Eins der Residuen-Momenten-Test und der Tiefe-Test 1 sich zu konservativ verhalten auf den wahren Parameter  $\beta = 0.1$ . Für das Intervall  $[0; 2]$  halten beide Tiefe-Tests das Signifikanzniveau ein, der Residuen-Momenten-Test ist etwas zu konservativ.

Insgesamt konnten bis jetzt keine Unterschiede in den Gütefunktionen der unterschiedlichen stochastischen Differentialgleichungen gefunden werden. Nun wird ebenfalls die Situation betrachtet, in der additive Ausreißer hinzugefügt werden. Zudem werden die Tests ohne die Teststatistik  $S_2$  beziehungsweise  $S_2$  durchgeführt.

Die Gütefunktionen für den Parameter  $\beta_0$  (vergleiche Abbildung 29) verlaufen anders als die Gütefunktionen in Abbildung 24. Wie in Abbildung 29 zu erkennen ist, erreicht die Gütefunktion des Tiefe-Tests 2 auf der rechten Seite des wahren Parameters  $\beta_0 = 40$  die Eins nicht innerhalb der betrachteten Sequenz von  $n_0$ . Der Tiefe-

Test 1 verläuft in dieser Situation nicht nur bei Null, sondern startet etwas höher am Anfang der Sequenz von  $\theta_0$ . Für das Intervall  $[0; 2]$  beginnt die Gütefunktion bei  $G(\theta_0) = 0.2$  und sinkt dann auf Null. Auch der Residuen-Momenten-Test lehnt die Nullhypothese auch in dieser Situation immer ab.

Abbildung 29: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(4)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 40$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

Die Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  des Parametervektors<sup>(4)</sup> in Abbildung 30 unterscheiden sich kaum von denen zuvor (vergleiche Abbildung 25). Auch in dieser Situation lehnt der Residuen-Momenten-Test die Nullhypothese immer ab. Die Gütefunktion des Tiefe-Tests 1 beginnt für das Intervall  $[0; 2]$  bei  $G(\theta_1) = 0.9$  und steigt dann auf den Wert Eins. Ab  $\theta_1 = 0.05$  sinkt der Graph schnell bis auf den Wert Null. Auf der rechten Seite des wahren Parameters  $\theta_1 = 0.1$  steigt der Graph der Gütefunktion bis zum Ende der betrachteten Sequenz auf circa 0.5. Die Gütefunktion des Tiefe-Tests 2 sinkt auf der linken Seite der Sequenz des wahren Parameters sehr stark. Der Wert Eins wird von der Gütefunktion auf der rechten Seite des wahren Parameters am Ende der Sequenz erreicht. Auf Höhe des wahren Parameters  $\theta_1 = 0.1$  ist der Tiefe-Test 2 zu konservativ.

Abbildung 30: Gütefunktionen für den Parameter  $\mu_1$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(4)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $X_1$ , wobei unter  $H_0: \mu_1 = 0:1$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Abbildung 31: Gütefunktionen für den Parameter  $\mu_2$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(4)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $X_2$ , wobei unter  $H_0: \mu_2 = 0:8$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

---



Auch die Gütefunktionen für den Parameter  $\rho_2$  (vergleiche Abbildung 31) unterscheiden sich kaum von denen mit der vorherigen stochastischen Differentialgleichung. Zu Beachten ist hier jedoch, dass mit einer neuen Programmierung und einem wahren Parameter von  $\rho_2 = 0:8$  die Graphen vertikal bei  $\rho_2 = 0:8$  gespiegelt worden sind, da dann die Sequenz von  $\rho_2 = 0:5$  bis  $1:1$  gehen wurde.

Der Residuen-Momenten-Test lehnt auch hier die Nullhypothese immer ab. Der Graph der Gütefunktion des Tiefe-Tests 2 sinkt auf der linken Seite des wahren Parameters  $\rho_2 = 0:8$  nicht so stark, wie dieser auf der rechten Seite der Sequenz von  $\rho_2 = 0:8$  steigt. Die Gütefunktion des Tiefe-Tests 1 beginnt wie zuvor am Anfang der Sequenz von  $\rho_2$  auf Höhe des Signifikanzniveaus  $\alpha = 0:05$  und sinkt dann auf Null. Ab  $\rho_2 = 0:7$  steigt der Graph dieser Gütefunktion bis zu  $G(\rho_2) = 1$  bis zum Ende der betrachteten Sequenz an. An der Stelle des wahren Parameters  $\rho_2 = 0:8$  sind beide Tiefe-Tests zu konservativ. Es ist jedoch festzustellen, dass die Tiefe-Tests kleinere Werte als das wahre  $\rho_2$  eher als falsch erkennen und die Nullhypothese dadurch deutlicher ablehnen.

Abbildung 32: Gütefunktionen für den Parameter  $\rho_2$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(4)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $\rho_2$ , wobei unter  $H_0: \rho_2 = 0:1$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird.

Zuletzt werden die Gütefunktionen für den Parameter  $\rho_2$  in Abbildung 32 betrachtet. Auch für diesen Parameter lehnt der Residuen-Momenten-Test die Nullhypothese immer ab. Der Graph der Gütefunktion für den Tiefe-Test 1 verläuft fast

die ganze Sequenz von bei Null und der Graph des Tiefe-Tests 2 bei:03. Beide Graphen der Gütefunktionen der Tiefe-Tests steigen kurz vor  $\theta = 0$  schnell auf  $G(\theta) = 1$  an und sinken dann auch sofort wieder auf die ursprünglichen Werte.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass diese andere Wahl des Parameters mit dem eine neue stochastische Differentialgleichung entsteht, kaum einen Einfluss auf die Gütefunktionen der drei Tests hat. Es wurde jedoch gezeigt, dass die Tiefe-Tests bei kleineren getesteten Werten  $\theta_2$  als der wahre Parameter  $\theta_2$  die Nullhypothese deutlicher ablehnen, als bei zu großen getesteten Werten von  $\theta_2$ .

## 5 Zusammenfassung

In dieser Abschlussarbeit wird versucht das Wachstum von Ermüdungsrissen mithilfe von stochastischen Differentialgleichungen zu modellieren und weiter diese dieser Approximation zu testen. Diese Ermüdungsrisse entstehen zum Beispiel in Stahlbeton, welcher zur Konstruktion von Brücken eingesetzt wird. Die dahinter stehende Idee ist, dass, wenn eine mathematisch passende Form zur Beschreibung des jeweiligen Risswachstums gefunden ist, eine prognostische Aussage über den ungefähren Zeitpunkt des Materialversagens möglich wird. Zunächst wird in dieser Arbeit eine stochastische Differentialgleichung mittels der Paris-Erdogan Gleichung für das Risswachstum aufgestellt. Aus den Lösungen der aufgestellten stochastischen Differentialgleichung lassen sich nicht-lineare Modelle aufstellen, welche sowohl ein beschränktes als auch ein explosives Wachstum beschreiben.

Dem Aufstellen der konkret zu untersuchenden stochastischen Differentialgleichung liegt die Idee zu Grunde, dass wenn der deterministische Term des Drifts groß ist, dann auch der stochastische Term der Volatilität groß sein muss. Deswegen wird für die beiden Terme eine fast identische Funktion gewählt. Es werden dabei nur explosiv wachsende stochastische Prozesse betrachtet. Zusätzlich in dem stochastischen Term der stochastischen Differentialgleichung ein Gauß'sches Verhalten der Schwankungen der Werte angenommen wird, wird hierfür die Brownsche Bewegung verwendet.

Anschließend wird die Euler-Maruyama-Approximation angewendet, damit die aufgestellte stochastische Differentialgleichung in das Software-Programm für die weiteren Simulationen implementiert werden kann. Mithilfe des stochastischen Prozesses wird die Güte von zwei Testsverfahren geprüft. Zuerst wird der Residuen-Momenten-Test betrachtet, welcher auf den Momenten der Normalverteilung der Residuen beruht. Danach werden zwei Tiefe-Tests verwendet, von denen einer auf

der vollen Dreiertiefe und der andere auf der einfachen Vierertiefe beruht. Diese drei Tests werden miteinander verglichen in Bezug auf ihre jeweilige Güte für die Punkthypothese.

Die Tests erkennen den Parameter besser, wenn der Einuss der Brownschen Bewegung klein ist. Je größer der Einuss der Brownschen Bewegung wird, desto ungenauer werden die Tests.

Um die Robustheit der Tests zu überprüfen, werden in die simulierten stochastischen Prozesse additive Ausreißer eingefügt. Anschließend werden diese stochastischen Prozesse mit den drei Tests getestet und die dazugehörigen Gütefunktionen berechnet. Dieses Verfahren führt zu keinem Ergebnis, da alle drei Tests die Nullhypothese immer abgelehnt haben. Die Idee der Ursache des Ablehnens der Nullhypothese besteht darin, dass eine Teststatistik der Tiefe-Tests nicht robust ist. Daraufhin werden die Tests ohne diese Teststatistik neu modelliert, wodurch eine Robustheit der Tests gegenüber Ausreißern erreicht werden soll. Aber auch dies führt nicht zum erwarteten Ergebnis. Der Tiefe-Test 2 scheint jedoch auf die Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  in dieser Situation recht gut zu funktionieren. Es lässt sich feststellen, dass die Tiefe-Tests im Allgemeinen robuster als der Residuen-Momenten-Test sind, wenn der Einuss der Brownschen Bewegung klein ist.

Die Wahl der Tiefe-Tests erfolgte mit der Überlegung, dass diese durch die Verwendung der Tiefewerte robuster gegen Ausreißer werden als der Residuen-Momenten-Test. Dies hat sich nicht bestätigt. Grund dafür ist die Verwendung der Varianzsumme  $S_2$  in beiden Tiefe-Tests. Diese Teststatistik ist nicht robust gegen Ausreißer, da sie nicht mit der Datentiefe berechnet wird. In weiteren Untersuchungen scheint es sinnvoll für diese Teststatistik eine Alternative zu suchen, welche ebenfalls robust ist.

Außerdem ist die Wahl der Brownschen Bewegung kurz zu diskutieren. Diese ist eigentlich ungeeignet in Bezug auf das Modellieren von Risswachstum, da die Brownsche Bewegung negative Werte annehmen kann. Ein Riss kann sich zwar durch verschiedenste Einüsse wieder ein bisschen schließen, jedoch wird nicht beachtet, dass eine negative Rissbreite nicht möglich ist. Ein Gamma-Prozess würde hier vielleicht eine bessere Modellierung ermöglichen.

Als weiteren Ansatzpunkt für nachfolgende Überlegungen zu diesem Thema ist zu nennen, dass die weiteren aufgestellten Modelle simuliert und getestet werden können. Möglicherweise kann so bestimmt werden, welches Modell besser oder schlechter für die Beschreibung des Risswachstums geeignet ist.

## Literaturverzeichnis

- Dacque, J. (2012). Brücken url : <https://www.planet-wissen.de/kultur/architektur/bruecken/index.html> . (Zugegriffen am: 22.08.2021).
- Falkenau, C. (2016). Depth based estimators and tests for autoregressive processes with application on crack growth and oil prices Dissertation.
- Gerard, M. (2021). Analyse stochastischer Differentialgleichungen mittels der Residuen-Momenten-Methode und der k-Vorzeichen-Tiefen-Diplomarbeit. Technische Universität Dortmund.
- Hartung, J., B. Elpelt und K. H. Klösener (2009). Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik 15. Aufl. München: Oldenbourg Verlag.
- Hedderich, J. und L. Sachs (2018). Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R 16. Aufl. Berlin: Springer Verlag.
- Horn, M. (2021). GSignTest: Robust Tests for Regression-Parameters via Sign Depth R package version 1.0.8 url : <https://github.com/melaniehorn/GSignTest> .
- Iacus, S. M. (2008). Simulation and Inference for stochastic Differential Equations: With R Examples 1. Aufl. New York: Springer Verlag.
- Köln Rundschau (2018). Brückeneinsturz in Genua: 43 Todesopfer in Italien { Keine Vermissten mehr url : <https://www.rundschau-online.de/news/aus-aller-welt/brueckeneinsturz-in-genua-43-todesopfer-in-italien---keine-vermissten-mehr-31128826?cb=1661155104255&> (Zugegriffen am: 22.08.2021).
- Kustos, Ch. P., A. Leucht und Ch. H. Müller (2016). "Tests based on simplicial depth for AR(1) models with explosion". In: Journal of Time Series Analysis 37, S. 763-784.
- Kustos, Ch. P., Ch. H. Müller und M. Wendler (2016). "Simplified simplicial depth for regression and autoregressive growth processes". Journal of Statistical Planning and Inference 173, S. 125-146.
- Meintrup, D. und S. Schauer (2005). Stochastik: Theorie und Anwendungen 1. Aufl. Berlin: Springer Verlag.
- Paris, P. C. und F. Erdogan (1963). "A critical analysis of crack propagation laws". In: Journal of Basic Engineering 85.1, S. 528-534.
- R Core Team (2021). R: A Language and Environment for Statistical Computing R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. url : <https://www.R-project.org/> .
- Sobczyk, K. und B. F. Spencer, Jr. (1992). Random Fatigue: From Data to Theory San Diego: Academic Press, Inc.
-

- 
- Virkler, D. A., B. M. Hillberry und P. K. Goel (1979). "The Statistical Nature of Fatigue Crack Propagation". In: Journal of Engineering Materials and Technology 101, S. 148-153.
- Wickham, H. (2016). ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis Springer-Verlag New York. isbn: 978-3-319-24277-4 url : <https://ggplot2.tidyverse.org> .
- Wickham, H., J. Hester und W. Chang (2021) devtools: Tools to Make Developing R Packages Easier R package version 2.4.2 url : <https://CRAN.R-project.org/package=devtools> .
-

## Abbildungsverzeichnis

1	Beispielhaftes explosives Risswachstum. . . . .	9
2	Beispielhaftes beschränktes Risswachstum. . . . .	11
3	Ein möglicher Pfad der Brownschen Bewegung. . . . .	13
4	Beispielhafte Daten zur Verdeutlichung der Idee der Datentiefe. . . . .	19
5	Ein möglicher Pfad des stochastischen Prozesses. . . . .	24
6	Analyse des Parameters <sub>0</sub> bei explosivem Wachstum des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Gra k wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert. . . . .	28
7	Analyse des Parameters <sub>0</sub> bei beschränktem Wachstum des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Gra k wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert. . . . .	29
8	Analyse des Parameters <sub>1</sub> des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Gra k wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern simuliert. . . . .	30
9	Analyse des Parameters <sub>2</sub> des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Gra k wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern und gleichemset.seed simuliert. . . . .	32
10	Analyse des Parameters des stochastischen Prozesses. In jeder einzelnen Gra k wurden jeweils vier Prozesse mit den gegebenen Parametern und gleichemset.seed simuliert. . . . .	33
11	Darstellung der Residuen an allen Zeitpunkten von der Brownschen Bewegung. Die stochastische Differentialgleichung wurde mit den Parametern = (45; 1;3; 0;5; 0;7) simuliert und die Residuen mit den selben Parametern berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingefärbt. . . . .	34
12	Darstellung der Residuen eines stochastischen Prozesses. Der Prozess wurde mit dem Parameter = (45; 1;3; 0;5; 0;7) simuliert und die Residuen mit den selben Parametern berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingefärbt. . . . .	35
13	Darstellung der Residuen eines stochastischen Prozesses, welche mit einem falschen Parametervektor berechnet wurden. Der Prozess wurde mit dem Parametervektor = (45; 1;3; 0;5; 0;7) simuliert und die Residuen mit den Parametern = (17; 0;6; 1;2; 0;2) berechnet. Hohe Werte der Residuen sind in Rot eingefärbt. . . . .	36

14 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 0:9$ ;  $\theta_2 = 0:7$ ;  $\theta_3 = 0:9$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_0}$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 35$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 37

15 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 35$ ;  $\theta_2 = 0:7$ ;  $\theta_3 = 0:9$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_1}$ , wobei unter  $H_0: \theta_1 = 0:9$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 38

16 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_2$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 35$ ;  $\theta_1 = 0:9$ ;  $\theta_3 = 0:9$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_2}$ , wobei unter  $H_0: \theta_2 = 0:7$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 40

17 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_3$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 35$ ;  $\theta_1 = 0:9$ ;  $\theta_2 = 0:7$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_3}$ , wobei unter  $H_0: \theta_3 = 0:9$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 41

18 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 0:1$ ;  $\theta_2 = 0:8$ ;  $\theta_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_0}$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 40$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 42

19 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\theta_2 = 0:8$ ;  $\theta_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_1}$ , wobei unter  $H_0: \theta_1 = 0:1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 43

20 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_2$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\theta_1 = 0:1$ ;  $\theta_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_2}$ , wobei unter  $H_0: \theta_2 = 0:8$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 44

21 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_3$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\theta_1 = 0:1$ ;  $\theta_2 = 0:8$ . Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_3}$ , wobei unter  $H_0: \theta_3 = 0:1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 44

22 Gutefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor<sup>(1)</sup>. Getestet wird eine Sequenz  $z_{f_0}$ , wobei unter  $H_0: \theta_0 = 35$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0:05$  gewählt wird. . . . . 46

23	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r_2$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:7$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	47
24	Gutefunktionen für den Parameter $\sigma_0$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(3)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r_0$ , wobei unter $H_0 : \sigma_0 = 45$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	49
25	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(3)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r_1$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 0:1$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	50
26	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(3)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r_2$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:8$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	51
27	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(3)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r$ , wobei unter $H_0 : \mu = 0:1$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	52
28	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests ohne hinzugefügte Ausreißer bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(3)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r$ , wobei unter $H_0 : \mu = 0:1$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	53
29	Gutefunktionen für den Parameter $\sigma_0$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(4)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $r_0$ , wobei unter $H_0 : \sigma_0 = 40$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	55



30	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(4)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $z_{fr_1}$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 0:1$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	56
31	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(4)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $z_{fr_2}$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:8$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	56
32	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(4)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $z_{fr}$ , wobei unter $H_0 : \mu = 0:1$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	57
33	Gutefunktionen für den Parameter $\sigma_0$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $n = 45; \mu_2 = 0:5; \mu_1 = 1:2$ . Getestet wird eine Sequenz $z_{f_0}$ , wobei unter $H_0 : \sigma_0 = 45$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	68
34	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $n = 45; \mu_2 = 0:5; \mu_1 = 1:2$ . Getestet wird eine Sequenz $z_{f_1}$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 1:3$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	68
35	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $n = 45; \mu_1 = 1:3; \mu_2 = 1:2$ . Getestet wird eine Sequenz $z_{f_2}$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:5$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	69
36	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $n = 45; \mu_1 = 1:3; \mu_2 = 0:5$ . Getestet wird eine Sequenz $z_f$ , wobei unter $H_0 : \mu = 1:2$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	69
37	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $z_{fr_1}$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 0:9$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	70

38	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu = 0:9$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	70
39	Gutefunktionen für den Parameter $\sigma_0$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \sigma_0 = 35$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	71
40	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 0:9$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	71
41	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:7$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	72
42	Gutefunktionen für den Parameter $\mu$ für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor <sup>(1)</sup> . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu = 0:9$ gilt und das Signifikanzniveau $\alpha = 0:05$ gewählt wird. . . . .	72
43	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_0$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $\mu_1 = 0:1; \mu_2 = 0:8; \mu_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu_0 = 40$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	73
44	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_1$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $\mu_0 = 40; \mu_2 = 0:8; \mu_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu_1 = 0:1$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	73
45	Gutefunktionen für den Parameter $\mu_2$ für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern $\mu_0 = 40; \mu_1 = 0:1; \mu_3 = 0:1$ . Getestet wird eine Sequenz $Z_n$ , wobei unter $H_0 : \mu_2 = 0:8$ gilt. Das Signifikanzniveau wird $\alpha = 0:05$ gewählt. . . . .	74

- 46 Gütefunktionen für den Parameter  $\theta$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $n = 40$ ;  $\theta_1 = 0:1$ ;  $\theta_2 = 0:8$ . Getestet wird eine Sequenz  $Z_n$ , wobei unter  $H_0 : \theta = 0:1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0:05$  gewählt. . . . . 74

## A Zusätzliche Abbildungen

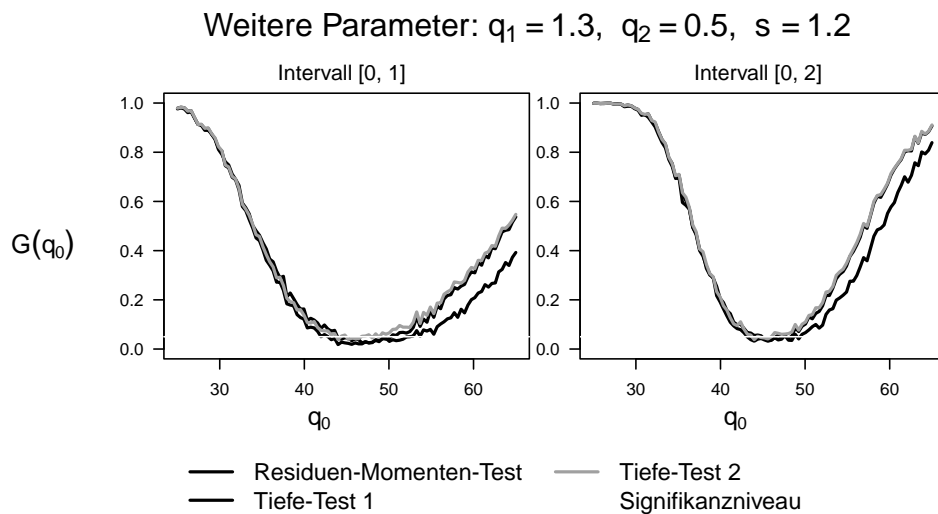


Abbildung 33: Gütefunktionen für den Parameter  $q_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $q_0 = 45$ ,  $q_2 = 0.5$ ,  $s = 1.2$ . Getestet wird eine Sequenz für  $q_0$ , wobei unter  $H_0 : q_0 = 45$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.

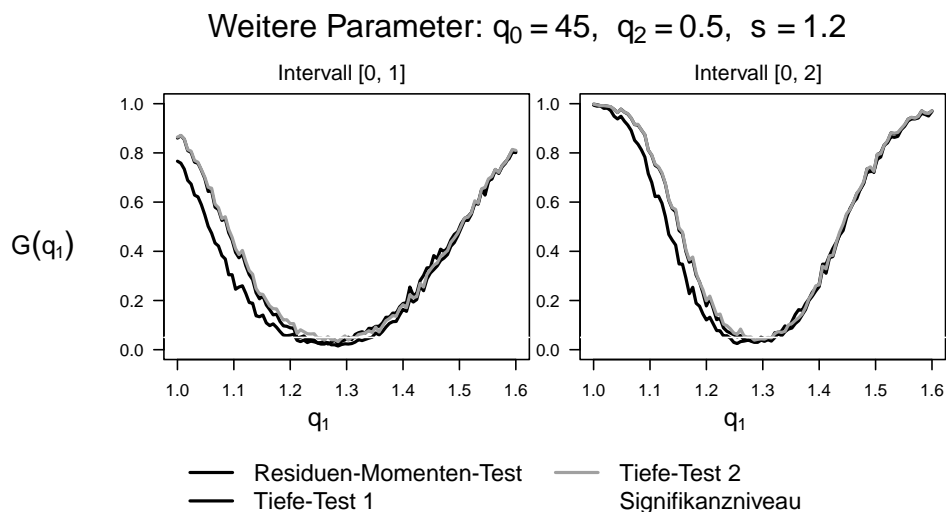


Abbildung 34: Gütefunktionen für den Parameter  $q_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $q_0 = 45$ ,  $q_2 = 0.5$ ,  $s = 1.2$ . Getestet wird eine Sequenz für  $q_1$ , wobei unter  $H_0 : q_1 = 1.3$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.



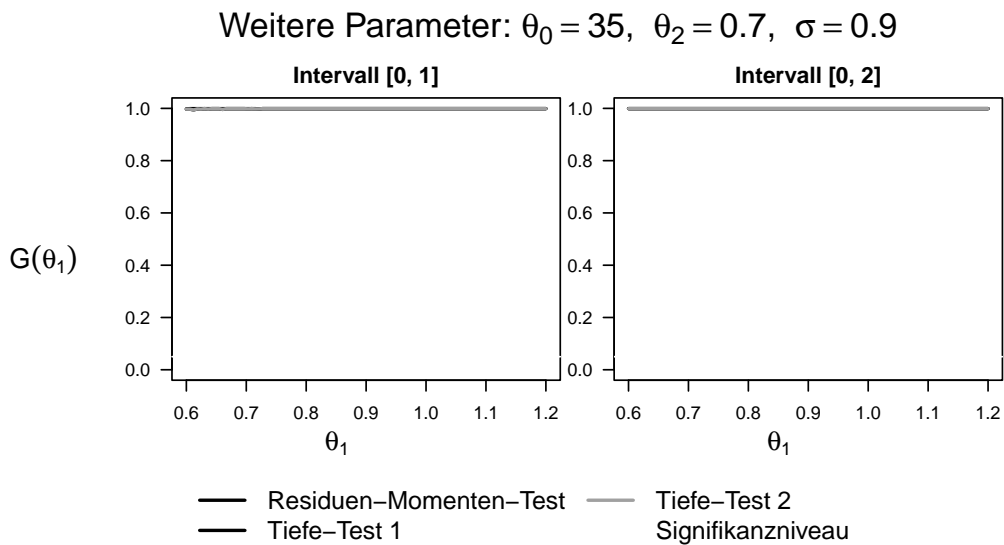


Abbildung 37: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(1)}$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\theta_1$ , wobei unter  $H_0$  :  $\theta_1 = 0.9$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

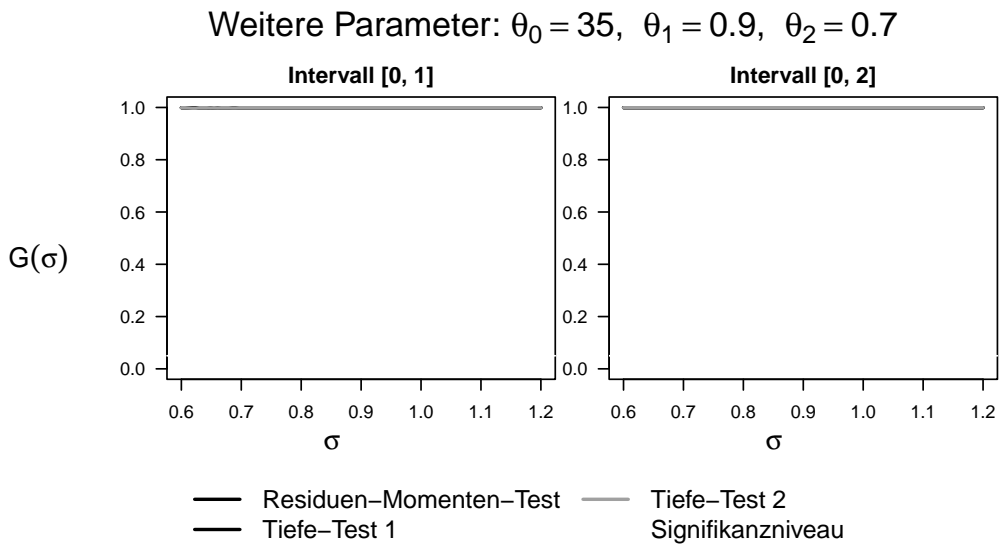


Abbildung 38: Gütefunktionen für den Parameter  $\sigma$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei gleichem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(1)}$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\sigma$ , wobei unter  $H_0$  :  $\sigma = 0.9$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

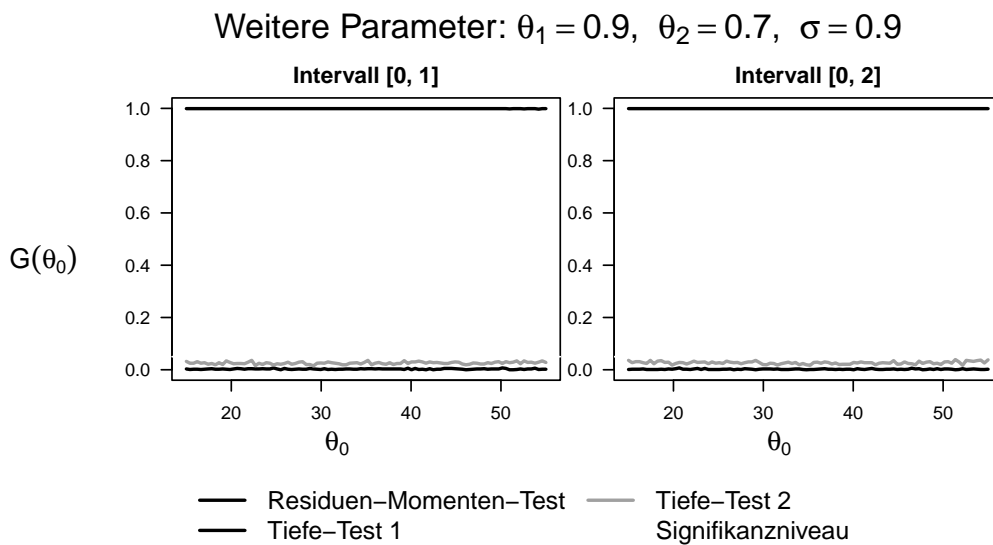


Abbildung 39: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(1)}$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0 : \theta_0 = 35$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.

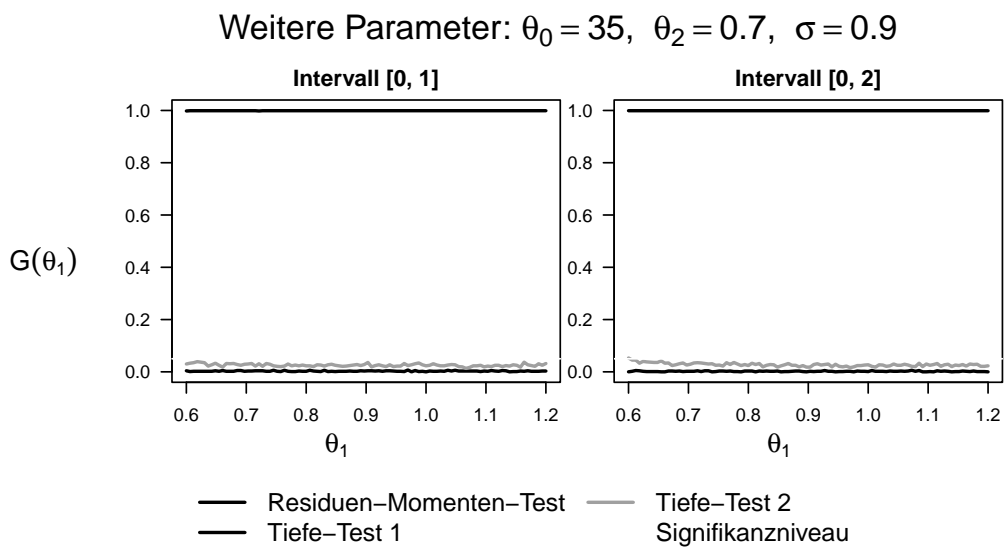


Abbildung 40: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests mit hinzugefügten Ausreißern bei geändertem Testverfahren. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit dem Parametervektor  $\theta^{(1)}$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\theta_1$ , wobei unter  $H_0 : \theta_1 = 0.9$  gilt und das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  gewählt wird.





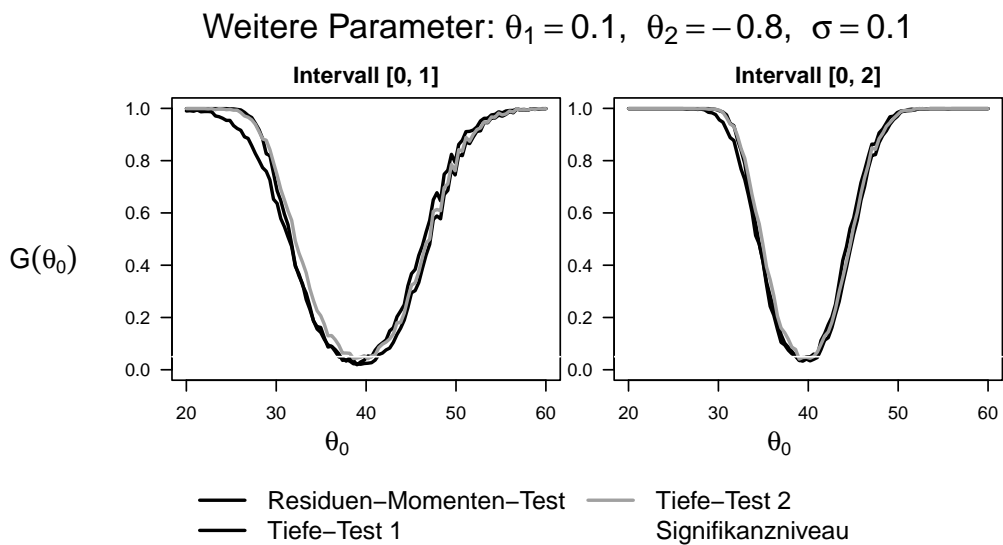


Abbildung 43: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_0$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_1 = 0.1$ ,  $\theta_2 = -0.8$ ,  $\sigma = 0.1$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\theta_0$ , wobei unter  $H_0 : \theta_0 = 40$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.

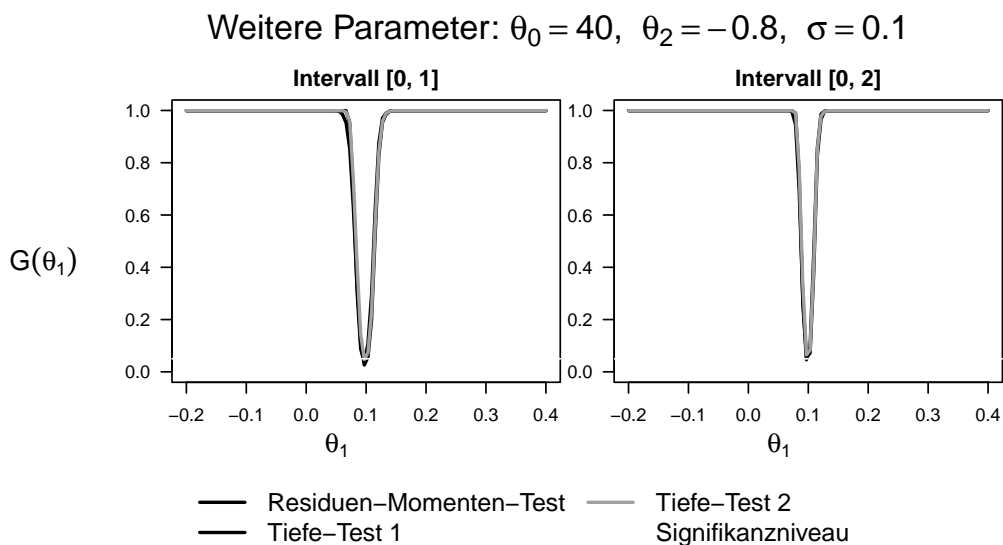


Abbildung 44: Gütefunktionen für den Parameter  $\theta_1$  für alle drei Tests. Simuliert werden die stochastischen Prozesse mit den Parametern  $\theta_0 = 40$ ,  $\theta_2 = -0.8$ ,  $\sigma = 0.1$ . Getestet wird eine Sequenz für  $\theta_1$ , wobei unter  $H_0 : \theta_1 = 0.1$  gilt. Das Signifikanzniveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.



