

BACHELORARBEIT

Analyse und Modellierung von Mehrkornritzversuchen mittels univariater und multivariater Methoden

Melissa Maria Mleczkowski

28. August 2022

Gutachter/-innen:

Dr. Dennis Andreas Malcherczyk

Prof. Dr. Christine Müller

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Problemstellung	2
2.1	Versuchsaufbau	2
2.1.1	Die Erzeugung der Ritzspuren	2
2.1.2	Die Vermessung der Ritzspuren & Kraftauswertung	3
2.2	Datenmaterial	6
2.3	Das Ziel dieser Auswertung	8
3	Statistische Methoden	9
3.1	Das Lineare Modell	9
3.1.1	Parameterschätzung	10
3.1.2	t-Test innerhalb der linearen Regression	10
3.2	Robuste Regression	11
3.2.1	Wald Test	12
3.3	Logistische Regression	12
3.3.1	Odds und Odds-Ratio	14
3.4	Multivariate Varianzanalyse (MANOVA)	14
3.4.1	Wilks Lambda	16
3.5	Modelldiagnose	18
3.5.1	Univariat: Residual- und QQ-Plot und Shapiro-Wilk Test	18
3.5.2	Multivariat: Energy-Statistic-Test und Box's M-Test	19
3.6	Kennzahlen für die Modellgüte: Das Bestimmtheitsmaß R^2 und das AIC	19
4	Statistische Auswertung	21
4.1	Deskriptive Analyse	21
4.1.1	Die Flächen und Tiefen	21
4.1.2	Die Krätemessungen	29
4.2	Modellierungen der Größen	34
4.2.1	<i>MedFläche</i>	34
4.2.2	<i>MedTiefe</i>	37
4.2.3	<i>MedKraftX</i>	41
4.2.4	<i>MedKraftY</i>	43
4.2.5	<i>MedKraftZ</i>	45
4.3	MANOVA	47
5	Zusammenfassung	50
	Literatur	54
	Anhang	55

1 Einleitung

Der Sonderforschungsbereich 823 untersucht und analysiert in zahlreichen Projekten die Modellierung statistischer, nichtlinearer dynamischer Prozesse. Eines dieser Projekte im Bereich der Technometrie ist das Projekt B4. Im Rahmen dieses Projektes werden mittels statistischer Verfahren Prozesse modelliert, welche sich auf das Bearbeiten inhomogener, mineralischer Untergründe konzentrieren. Genauer werden dabei physikalische Zersetzungsprozesse während des Bearbeitens von Stahlbeton untersucht. Bearbeitet wird der Beton von mit diamantbesetzten Werkzeugen. Das Ziel dieser Analysen ist es die genutzten Werkzeuge anhand der Ergebnisse zu optimieren.

In den letzten Arbeiten innerhalb dieses Projektes lag der Schwerpunkt auf der Modellierung des Diamantenausbruchs. Diese Diamanten, oder auch Körner genannt, lagen dabei in verschiedenen Konzentrationen vor und waren unterschiedlich verteilt. So wurde beispielsweise ein Modell entwickelt, das die Lebenszeiten dieser Diamanten während der Bohrung auf Beton untersucht und prognostiziert (Malevich et al., 2021). Ebenfalls untersucht wurden die automatischen Kräftermessungen die während der Bohrungen entstehen, um Ausbrüche zu erkennen. Analysiert wurden dafür die entsprechenden Kraftzeitreihen (Müller et al., 2022). Neben den Ausbrüchen der Diamanten ist es von Interesse, wie die abgetragene Fläche beeinflusst wird. So wurde bereits in einem Discussion Paper (Dreier et al., 2022) des Sonderfachbereichs der Einfluss des Abstandes von vier Diamanten auf die Lebenszeit und den Flächenabtrag untersucht.

Doch welche weiteren Konfigurationen des Werkzeugs beeinflussen die abgetragene Fläche und Tiefe? Spielt z.B. die Art des Betonblocks, auf der die Ritzungen durchgeführt werden eine Rolle? Diese und weitere Fragestellungen werden in dieser Arbeit mithilfe von verschiedenen Modellierungen und deren Verfahren anhand eines Datensatzes zu 34 Ritzspuren untersucht. Dafür werden in Kapitel 2 zunächst sowohl der Versuchsaufbau, der Datensatz, als auch die Ziele des Projektes tiefergehend beschrieben. Das dritte Kapitel „Statistische Methoden“ definiert die genutzten Verfahren für die Analyse des Datensatzes. In der statistischen Auswertung werden die für die Fragestellungen relevanten Variablen grafisch mithilfe von Boxplots und Tabellen zunächst veranschaulicht und beschrieben. Dies dient einem groben Überblick und ersten Vermutungen bezüglich der Ziele. Danach werden zu den interessierenden Größen Modelle erstellt, optimiert und interpretiert. Zusätzlich werden statistische Tests durchgeführt. Schließlich werden in der Zusammenfassung die zentralen Ergebnisse präsentiert und diskutiert.

2 Problemstellung

Dieses Kapitel dient zunächst zur Beschreibung des Versuchsaufbaus. Anschließend folgt die Beschreibung des Datenmaterials und zum Schluss werden die Ziele dieser Bachelorarbeit vorgestellt.

2.1 Versuchsaufbau

Das Experiment wurde von Julia Dreier M. Sc. vom Institut für Spanende Fertigung durchgeführt und entstand im Rahmen des Projektes B4 des SFB 823. Das Projekt B4 beschäftigt sich generell mit statistischen Methoden für Schädigungsprozesse unter wechselnder Belastung. So wird bei dem Projekt untersucht, wie eine Optimalität des Werkzeugs erreicht werden kann. Die Ausführungen dieses Versuchs wurden aus einem internen (nicht veröffentlichten) Bericht übernommen. Grundsätzlich bestand das Experiment aus einem mit Diamanten besetzten Werkzeug, welches auf einem Betonstück Ritzspuren erzeugte, die anschließend mit einer räumlichen Messtechnik vermessen wurden.

2.1.1 Die Erzeugung der Ritzspuren

Das Werkzeug (Berger Sondermaschine PFS 5558/1), welches diese Ritzspuren erzeugte, enthält vier gesetzte, künstliche Diamanten (auch Körner genannt), dessen Konfiguration der Abstände zwischen den Versuchen variiert wurde. Somit ergeben sich nach der Variation der horizontalen und vertikalen Abstände zwischen den Diamanten mehrere Setzmuster (vgl. Abbildung [1](#)). Im Rahmen dieses Versuchs wurden ausschließlich die Lochplatten Nr. 01, Nr. 08, Nr. 09 und Nr. 10 verwendet. Weiterhin gilt, dass nur zwei der in Abbildung [1](#) angegebenen Abstände relevant sind, da $A = C$, $B = E$ und $D = C/2$ gilt. Diese Diamanten sind aufgrund ihrer Härte primär für die Ritzung verantwortlich. Die Ritztiefe wurde während des gesamten Versuchs mit $50 \mu m$ vorgegeben. Ähnlich wie bei der Analyse der Abnutzung des Werkzeugs ([Malevich et al., 2021](#)) handelt es sich somit um einen wegeregeltten Versuch. Nahezu jedes Werkzeug wurde dabei zwei mal für die Ritzung genutzt und es wurde zwischen den Versuchen zwischen zwei verschiedenen Betonblöcken gewechselt.

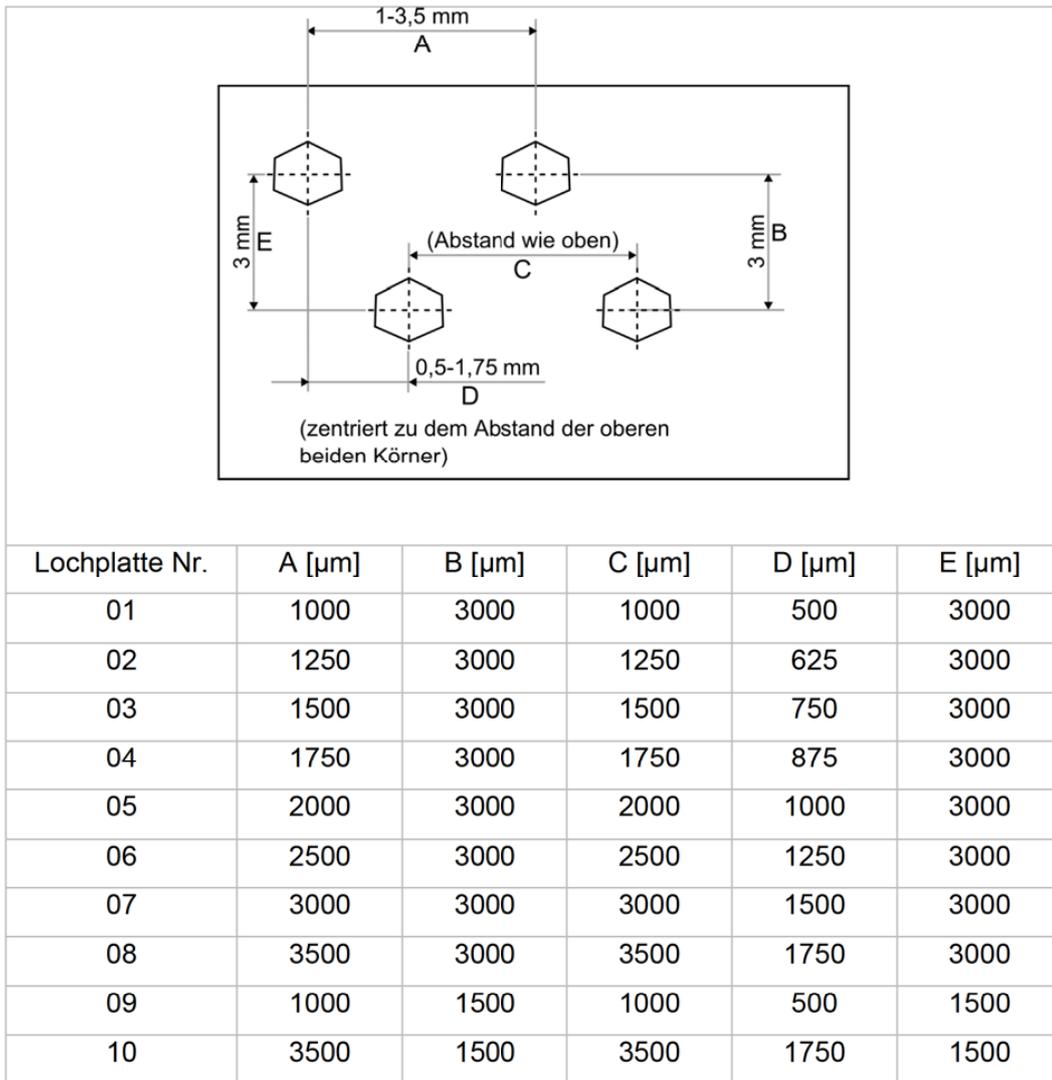


Abbildung 1: mögliche Anordnungsmuster der Diamanten

2.1.2 Die Vermessung der Ritzspuren & Kraftauswertung

Nach dem Erzeugen dieser Ritzspuren wurden deren Tiefen und Flächen mit der räumlichen Koordinatentechnik Alicona (Bruker alicona, 2022) gemessen. Genauer wurde dafür das optische Formmessgerät Alicona Infinite Focus G5 genutzt.

Für diese Messung wurde die Ritzspur in zwei Bereiche eingeteilt (vgl. Abbildung 2). Aus Zeit- und Kostengründen wurde anschließend jedoch nur im Bereich 1 gemessen. Dieser Bereich wurde erneut in drei Teilbereiche unterteilt. In jedem dieser Teilbereiche der Ritzspur wurden anschließend fünf senkrechte Profile gemessen, sodass sich pro Ritzspur 15 Messungen ergaben. Genauer wird an fünf unterschiedlichen Stellen des ersten Drittels des Bereichs 1 ein Profil extrahiert. In Abbildung 3 ist die erste Stelle dieser Profilextraktion dieses Bereichs anhand der senkrechten Linie erkennbar. Dies wurde so oft wiederholt, bis in jedem der drei Teilbereiche fünf Profile gemessen wurden. In Abbildung 4 ist ein resultierendes Profil dargestellt. Anhand eines

solchen Profils wurde die maximale Tiefe der tiefsten Mulde in μm , sowie die Gesamtfläche aller entstandenen Mulden in μm^2 bestimmt und dokumentiert. In dieser Abbildung ist die tiefste Mulde des Bereichs, welche durch senkrechte Striche eingegrenzt wurde rot markiert und hat eine Tiefe von $32.0\ \mu\text{m}$. Nach dieser Tiefenmessung wurden alle entstandenen Mulden des Bereichs ebenfalls markiert und mithilfe des verwendeten Messverfahrens vermessen. Die Summe dieser Flächen wird abschließend als Fläche der Mulden dokumentiert. Dieser Prozess wird so oft wiederholt, bis pro Bereich anhand von fünf Profilen gemessen wurde.

Neben der Messung der Ritzspuren wurden die Kräfte gemessen, die während der Ritzung entstanden sind. Dabei wurde die Normalkraft F_x (nach unten), die Querkraft F_y (orthogonal zum Schnitt) und die Schnittkraft F_z (in Richtung des Schnitts) anhand der Maschine gemessen.

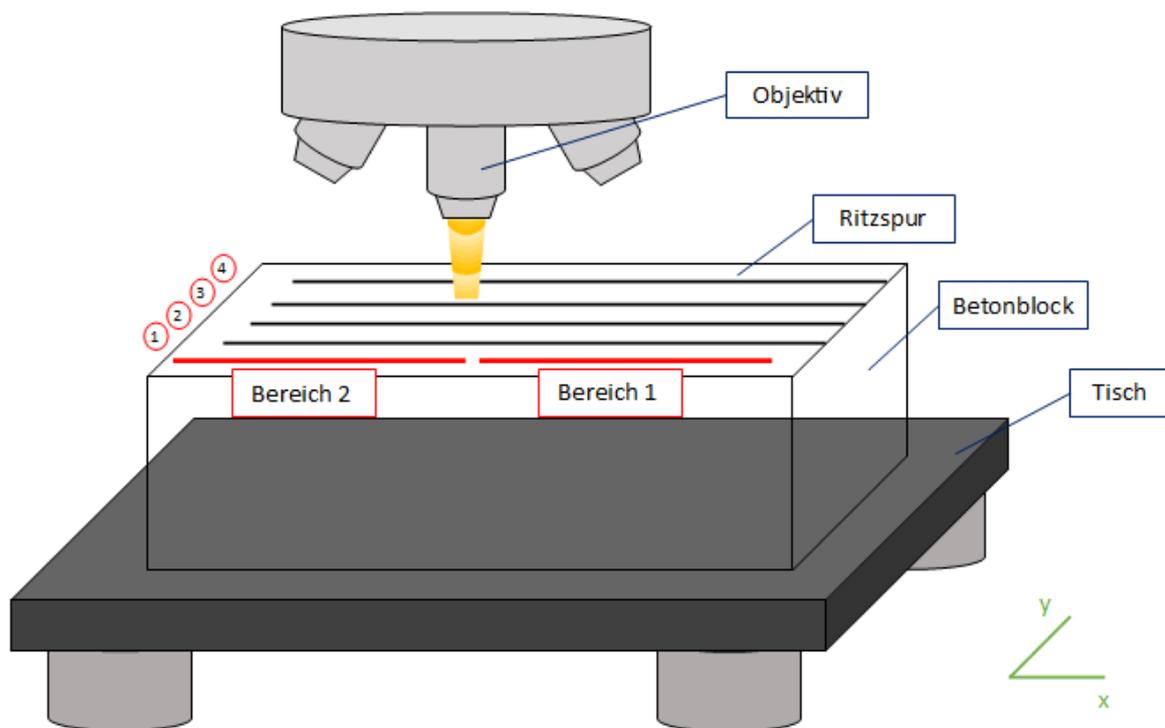


Abbildung 2: Skizze des Vorgangs

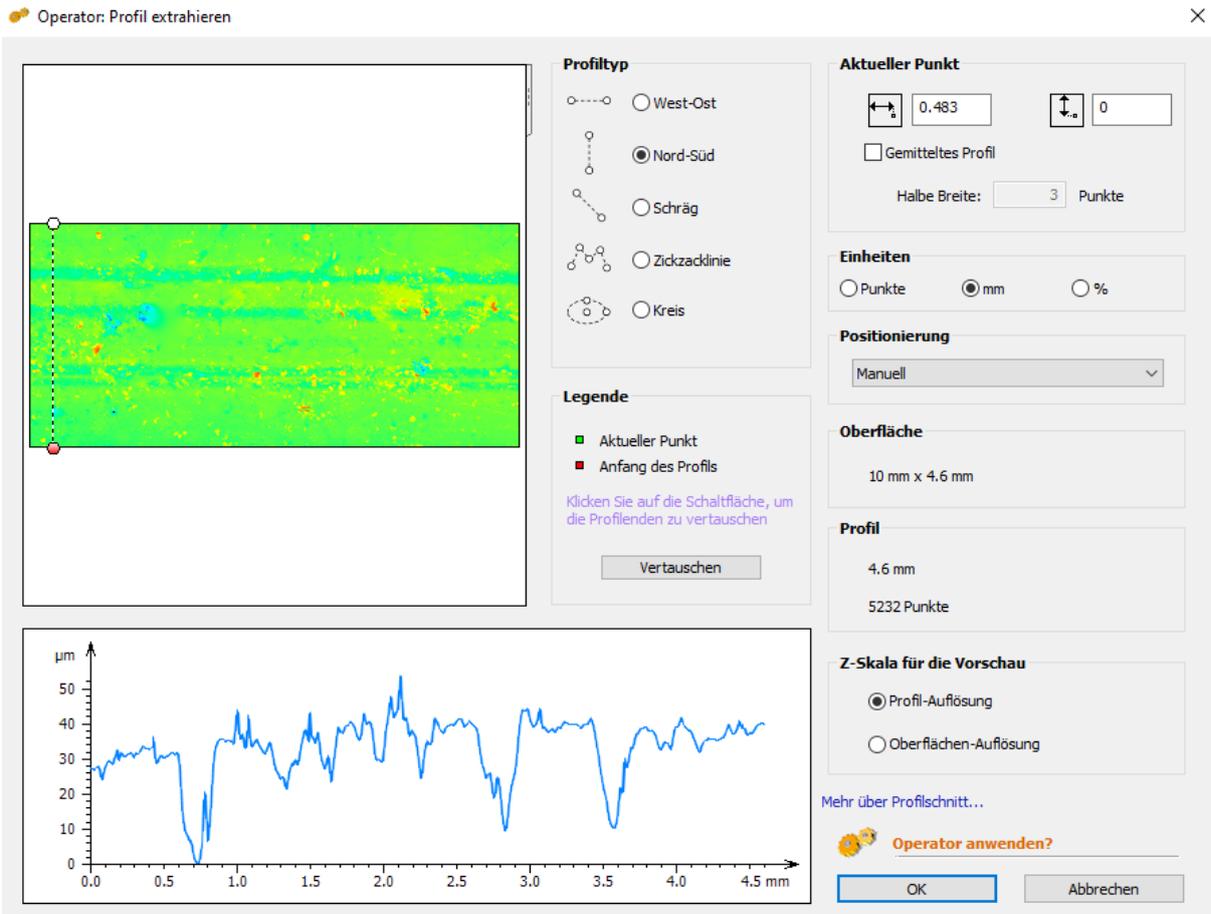


Abbildung 3: Beispielhafte Profilextraktion

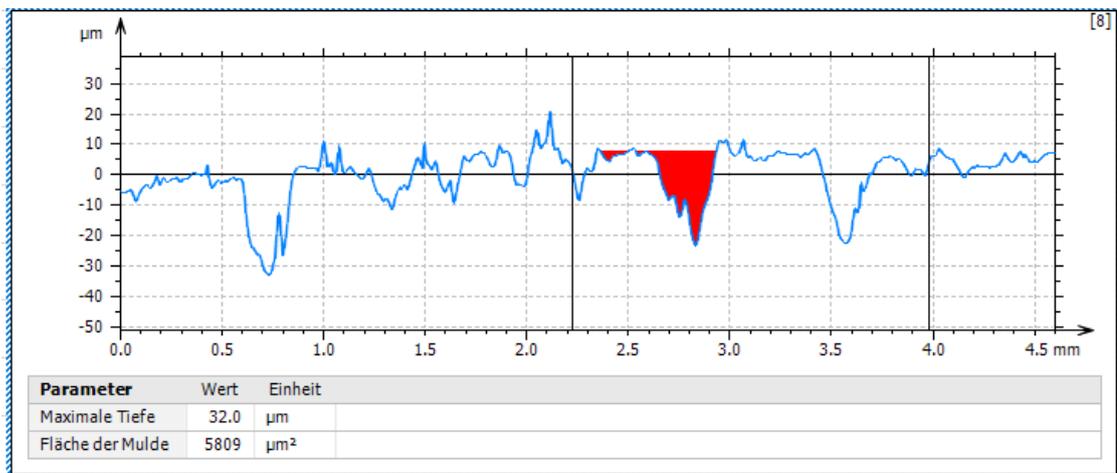


Abbildung 4: Beispiel für ein extrahiertes Profil

2.2 Datenmaterial

Der im Folgenden beschriebene Datensatz wurde aus zwei Datensätzen zusammengeführt. Weiterhin wurden die für diese Ausarbeitung irrelevanten Variablen entfernt und zusätzlich, aus dem Datensatz abgeleitete und für die spätere Analyse relevante Variablen hinzugefügt.

Zu diesen Variablen gehört die genutzte Lochplatten Nr. als „Lochplatte“, sowie das „Werkstück“, also der Betonblock Typ, welcher für den jeweiligen Versuch genutzt wurde. Dabei wird zwischen Block A und Block B unterschieden (vgl. Tabelle [1](#)). Für das Werkzeug wurde ebenfalls die Variable „Nutzung“ hinzugefügt, ob dieses zum ersten oder zweiten mal genutzt wurde (vgl. Tabelle [2](#)). Dies wurde anhand des Versuchsplans abgeleitet. Zudem wurde bei den „Anmerkungen“ festgehalten, wenn ein Versuch nicht nach Plan verlief oder unterbrochen bzw. wiederholt werden musste. Weiterhin wurde dort erfasst wie viele der Diamanten tatsächlich am Eingriff beteiligt waren, da anhand der Ritzspuren und der Staub-Schweifen oft erkennbar war, dass nicht jeder der vier Diamanten tatsächlich an der Ritzung mitgewirkt hat. Anhand dieser Anmerkungen wurde die Variable „Diamanten“ erstellt, welche mithilfe von Gruppierungen angibt wie viele der vier Diamanten am Eingriff beteiligt waren. Mögliche Ausprägungen der Variable „Diamanten“ sind: „1 oder 2“, „2 - 3 oder 3“ und „3 - 4 oder 4“ (vgl. Tabelle [1](#)).

Tabelle 1: Zeile 8-10 der ersten fünf Spalten des Datensatzes

	Lochplatte	Werkzeug	Werkstück	Anmerkungen	Diamanten	...
8	1	1_D	Block A	3-4 Diamanten im Eingriff	3-4 oder 4	...
9	1	1_D	Block B	alle Diamanten im Eingriff	3-4 oder 4	...
10	8	8_22	Block B	alle Diamanten im Eingriff	3-4 oder 4	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Neben der Lochplatten Nummer sind nach Abbildung [1](#) die Abstände zwischen den Diamanten notwendig. Dabei sind, wie bereits beschrieben die Angaben der Längen von A und B im Datensatz ausreichend. In Tabelle 2 sind diese zusätzlichen Informationen exemplarisch angegeben.

Tabelle 2: Zeile 8-10 der Diamantenkonfiguration

	Länge A	Länge B	Nutzung
8	1000	3000	1.
9	3500	3000	2.
10	3500	3000	2.

Weiterhin sind für die Kraftauswertungen der Ritzversuche jeweils das Minimum, das Maximum, der Mittelwert, das untere Quantil, der Median sowie das obere Quantil pro Kraftrichtung angegeben. So sind im Datensatz für die Normalkraft F_x , die Querkraft F_y und die Schnittkraft F_z jeweils diese sechs Werte angegeben. Tabelle [3](#) veranschaulicht dies exemplarisch für die Nor-

malkraft. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden jedoch nicht alle Werte für die Auswertung genutzt.

Tabelle 3: Zeile 8-10 der Kraftauswertung der Normalkraft F_x

	Minimum_x	Maximum_x	Mittelwert_x	LQuantil_x	Median_x	UQuantil_x	...
8	-537.509	-333.129	-459.729	-484.912	-460.489	-435.949	...
9	-145,908	65,872	-41,769	-60,575	-41,205	-22,835	...
10	-457,490	-23,804	-253,561	-284,710	-253,346	-222,664	...

Neben der Kräften wurden, wie bereits beschrieben, die entstandenen Muldentiefen und Muldenflächen im Bereich 1 (vgl. Abbildung 2) ausgewertet. Da dieser Bereich 1 erneut in drei Teilbereiche eingeteilt wurde, ergaben sich pro Ritzspur 15 Beobachtungen für die Tiefen, welche in Mikrometern (μm) angegeben sind und für die Flächen, angegeben in Quadratmikrometern (μm^2). So gibt *Fläche1.1* die gemessene Fläche am Beginn des ersten Teilbereichs an und *Tiefe1.1* die entsprechende maximale Tiefe, gemessen mit einem senkrechten Profil, wie in Abbildung 4 dargestellt. Als letzte Beobachtung ist pro Ritzspur abschließend die *Tiefe3.5* angegeben, welche die Tiefe am Ende des dritten Teilbereichs angibt (vgl. Tabelle 4). Im weiteren Verlauf dieser Arbeit, soll ein geeignetes Mittel genutzt werden, welches die Muldentiefe- und Fläche pro Ritzspur anhand der gemessenen Werte bestmöglich repräsentiert. Diese Wahl geschieht während der deskriptiven Analyse, um mögliche Muster der Flächen und Tiefen innerhalb der Ritzspuren auszuschließen, welche das gewählte Maß beeinflussen könnten.

Tabelle 4: Zeile 8-10 der Tiefen- und Flächenmessung

	<i>Fläche1.1</i>	<i>Tiefe1.1</i>	...	<i>Fläche1.5</i>	<i>Tiefe1.5</i>	...	<i>Tiefe3.5</i>
8	6560	28.1	...	6944	21.5	...	25.4
9	18517	44.3	...	15472	35.9	...	30.3
10	5982	23.3	...	14300	47.4	...	47.7

Da einige Messungen aufgrund von Komplikationen während der Versuche nicht durchführbar waren, ist keine Vollständigkeit des Datensatzes gegeben. Insgesamt besteht der Datensatz aus 34 geplanten Ritzversuchen. Drei dieser Versuche wurden wegen Komplikationen nicht durchgeführt, sodass zunächst 31 Beobachtungen zu den tatsächlich durchgeführten Versuchen vorliegen. Bei den Kraftauswertungen (Tabelle 3) fehlen zwei Beobachtungen. Somit liegen hierbei Daten zu 29 Ritzspuren vor. Weiterhin fehlen für drei der Ritzspuren die Anmerkungen, wieviele der Diamanten tatsächlich am Eingriff beteiligt waren, sodass für die Modellierung der Kraftauswertungen 26 vollständige Beobachtungen vorliegen. Für die spätere Modellierung der Flächen und Tiefen liegen demnach 28 vollständige Beobachtungen in allen Variablen vor.

2.3 Das Ziel dieser Auswertung

Das allgemeine Ziel des Projektes B4 ist es, bestimmte bestimmte Prozesse während der Bearbeitung von Stahlbeton zu untersuchen und das verwendete Diamanten-Werkzeug entsprechend der spezifischen Ziele des Experiments zu optimieren. In dieser Bachelorarbeit werden Daten eines Experimentes innerhalb des Projektes B4 untersucht. Ziel dieser Ausarbeitung ist es somit die verschiedenen Einstellungen des Werkzeugs bezüglich der interessierenden Variablen zu untersuchen. Genauer soll untersucht werden wie ein größtmöglicher Abtrag des Materials mit möglichst wenig Kraft entsteht.

Die Kräftemessungen, die Muldenflächen und Muldentiefen stellen dabei die abhängigen, interessierenden Zielvariablen dar. Da die Ritztiefe während des Experiments mit 50 μm vorgegeben wurde, wird ebenfalls untersucht, mit welchen Konfigurationen des Werkzeugs diese Tiefe erreicht wird. Zu diesen Konfigurationen gehört der Lochplattentyp, die Art des Betonblocks, die Anzahl der am Eingriff beteiligten Diamanten, sowie die Nutzung des Werkzeugs (1. oder 2. Nutzung). Diese stellen die unabhängigen Variablen dar, deren Auswirkung auf die Zielvariablen untersucht wird. So sollen für die Kräfte, Flächen und Tiefen trotz der sehr geringen Anzahl an Beobachtungen möglichst „gute“ Modellierungen erreicht werden. Zudem wird untersucht, inwieweit sich die Wahl der Lochplatte - und somit die Konfiguration der Diamanten auf diese abhängigen Variablen auswirkt und, ob sichtbare Unterschiede zwischen ihnen auftreten. Da wie beschrieben, nicht alle Diamanten tatsächlich an dem Ritzvorgang beteiligt waren, ist es ebenfalls von Interesse, ob sich die Anzahl dieser beteiligten Diamanten auf Kräfte, Flächen und Tiefen auswirkt. Weiterhin soll untersucht werden, inwieweit die Art des Betonblocks, auf dem die Ritzspur erstellt wurde, einen Einfluss auf die Kräfte, Tiefen und Flächen hat. Dies ist vor allem wegen des Materials der Blöcke interessant, da Stahlbeton als sehr spröde bzw. heterogen gilt. Da viele der Werkzeuge zweimal hintereinander für den Versuch genutzt werden (vgl. Tabelle [1](#)), wird zusätzlich untersucht, ob und inwieweit sich die Versuche wegen einer möglichen Veränderung des Werkzeugs bei der ersten bzw. zweiten Nutzung dieser Werkzeuge unterscheiden.

3 Statistische Methoden

In diesem Kapitel wird das lineare Modell mit der Parameterschätzung definiert. Um Modellvoraussetzungen zu überprüfen werden Residual- und Korrelationsplots vorgestellt. Außerdem werden Maßzahlen für die Modellgüte vorgestellt.

3.1 Das Lineare Modell

Im Folgenden bezeichnet A^T die Transponierte eines Vektors oder einer Matrix A . Sei $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ für $n \in \mathbb{N}$ ein reellwertiger Zufallsvektor mit den unabhängig verteilten Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n . Der Vektor $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ mit y_1, \dots, y_n stellt die Realisierung dar und x_i^T steht für den Vektor der Realisierungen der i -ten Zeile von \mathbf{X} . Außerdem werden die k Zufallsvektoren X_1, \dots, X_k betrachtet mit $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj})^T$, wobei X_{ij} Zufallsvariablen sind für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ und $k \in \mathbb{N}$. X_1, \dots, X_k sind hierbei metrisch oder kategorial. Die Realisierungen der k Zufallsvektoren werden mit $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})^T$ bezeichnet für $j = 1, \dots, k$. Interaktionen, welche entstehen, falls der Effekt einer Variablen von dem Wert einer weiteren unabhängigen Variablen abhängt, können ebenfalls als Variable in das Modell einfließen. Das lineare Modell hat nun die Form.

$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon.$$

Dabei ist $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ ein fester unbekannter Parametervektor und $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$ ist ein n -dimensionaler, metrischer Zufallsvektor der Messfehler, wobei die ϵ_i für $i = 1, \dots, n$ und $\sigma^2 > 0$ unabhängig $N(0, \sigma^2)$ -verteilt sind. Unter dieser Annahme ist die Schätzung optimal und die Varianz wird minimiert (vgl. [Czado and Schmidt, 2011](#), S. 193). Für spätere Tests ist diese Annahme zwingend notwendig. \mathbf{X} ist eine feste Designmatrix aus dem $\mathbb{R}^{n \times (k+1)}$, die die Realisierungen der Vektoren X_1, \dots, X_k enthält und folgende Form hat:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Dabei steht n für die Anzahl der Beobachtungen und \mathbf{X} habe einen vollen Spaltenrang von $k + 1$ (vgl. [Fahrmeir et al., 2003](#), S. 59-63).

3.1.1 Parameterschätzung

Für den unbekanntem Parametervektor β wird der sogenannte Kleinste-Quadrate-Schätzer (KQ-Schätzer) $\hat{\beta}$ bestimmt. Dieser lautet $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T y$ und löst das Minimierungsproblem: $\min_{\beta \in \mathbb{R}^{k+1}} (y - \mathbf{X}\beta)^T (y - \mathbf{X}\beta)$. Mithilfe dieses KQ-Schätzers können die geschätzten Werte \hat{y} des linearen Modells durch $\hat{y} = \mathbf{X}\hat{\beta}$ berechnet werden. Der n -dimensional Vektor $\hat{e} = y - \hat{y}$ wird dann als Vektor der Residuen bezeichnet und $RSS = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$ als Residuenquadratsumme, wobei \hat{e}_i für $i = 1, \dots, n$ die i -te Komponente des Residuenvektors ist. Das unbekanntem σ^2 wird durch den Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n - k - 1}$$

geschätzt. (vgl. [Fahrmeir et al., 2015](#), S. 97-98).

Ist eine Variable X_j kategorial mit $l \geq 2$ Ausprägungen, so wird sie durch $(l - 1)$ Dummy-Variablen $x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)}$ ersetzt, wobei für $j = 1, \dots, (l - 1)$ gilt:

$$x^{(j)} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls Kategorie } i \text{ beobachtet wird,} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(vgl. [Fahrmeir et al., 2015](#), S. 94).

3.1.2 t-Test innerhalb der linearen Regression

Soll überprüft werden, ob ein eine unabhängige Variable X_j Einfluss auf die abhängige Variable hat, so kann mithilfe des Koeffizienten β_j innerhalb der linearen Regression ein t -Test durchgeführt werden. Bei diesem Test wird die Hypothese $H_0 : \beta_j = 0$ gegen die die Alternativhypothese $H_1 : \beta_j \neq 0$, $j = 1, \dots, k$ getestet. Dafür wird die Normalverteilungsannahme der Residuen benötigt. Unter dieser Annahme gilt für die KQ-Schätzungen $\hat{\beta}_j$, dass

$$T_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \sim t_{n-k}$$

([Schlittgen, 2009](#), S. 157).

Dabei gibt der Ausdruck $\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$ im Nenner den Standardfehler des Koeffizienten $\hat{\beta}_j$ an, wobei C_{jj} dem passenden Diagonalelement der Matrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ entspricht. Trägt der Parameter zur Güte des Modells bei, so steigt der absolute Wert der Teststatistik $|T_j|$ ([Schlittgen, 2009](#), S. 158).

3.2 Robuste Regression

Da die Kleinste Quadrate Regression schon von wenigen Ausreißern beeinflussbar ist und wenig Aussagekraft besitzt, kann dieses Verfahren nicht als „robust“ bezeichnet werden. Die Robuste Regression hingegen reagiert nicht sensibel auf solche extremen Datenpunkte und kann diese Effekte somit reduzieren (vgl. [Wolf and Best, 2010](#), S. 707).

So besitzen robuste Schätzer einen Bruchpunkt, den maximalen Anteil an Verunreinigung, der von diesem Schätzer toleriert wird. Damit wird garantiert, dass es zur Begrenzung der Verzerrung kommt. So besitzen KQ-Schätzer beispielsweise einen Bruchpunkt von 0, robuste Schätzer sollten hingegen einen positiven Bruchpunkt haben (vgl. [Wolf and Best, 2010](#), S. 720-721).

Ein oft verwendeter Schätzer für die robuste Regression ist der M -Schätzer. Dieser Vektor $\hat{\beta}_M$ schätzt durch die Minimierung einer Abstandsfunktion der Residuen $\rho(e_v)$ das β durch

$$\sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{y_i - x_i^T \hat{\beta}_M}{s} \right) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{s} \right).$$

Der Skalenschätzer s ist nötig, um die oft nicht skaleninvarianten M -Schätzer zu normieren. Geschätzt werden kann s beispielsweise durch den normalisierten Median der absoluten Residuen

$$\hat{s}^{MADN} = \frac{MED(|e_1|, \dots, |e_n|)}{0.75}$$

geschätzt werden (vgl. [Wolf and Best, 2010](#), S. 726).

Ist die Funktion $\rho(e)$ differenzierbar und konvex, so kann mit diesem Ausdruck mit der Ableitung $\rho'(e) = \psi(e)$ durch

$$\sum_{i=1}^n \psi \left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{s} \right) x_i = 0$$

eine eindeutige Lösung bestimmt werden ([Schlittgen, 2009](#), S. 170).

Statt der Normalgleichung $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} = \mathbf{X}^T y$ einer Regression mit KQ-Schätzung, wird nun mit

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \hat{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} y$$

neu gewichtet, sodass beispielsweise Ausreißer weniger Einfluss auf die Schätzung haben.

Die Gewichte

$$w_i = \frac{\psi \left(y_i - \frac{x_i^T \hat{\beta}}{\hat{\sigma}} \right)}{\frac{y_i - x_i^T \hat{\beta}}{\hat{\sigma}}}$$

sind dabei die Diagonalelemente der Diagonalmatrix $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times (n)}$.

So können zunächst mithilfe einer ersten Schätzung $\hat{\beta}^{(0)}$ die Gewichte bestimmt werden. Diese Gewichte können anschließend in die gewichtete Normalengleichung $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \hat{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} y$ eingesetzt werden. Dieses Vorgehen wird so oft wiederholt, bis die Änderung der Schätzung unter einer bestimmten Grenze bleibt.

Eine oft genutzte Funktion nach Huber gleicht bis zu einem gewissen Punkt der „normalen“ Regression, bis sie linear wird. So fallen extreme Beobachtungen weniger ins Gewicht (vgl. [Wolf and Best, 2010](#), S. 713). Dieser differenzierbare M -Regressionschätzer nach Huber wird durch

$$\rho(e) = \begin{cases} 0.5e^2 & \text{für } |e| \leq k \\ k|e| - 0.5k^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ([Schlittgen, 2009](#), S. 171).

3.2.1 Wald Test

Soll innerhalb der robusten Regression überprüft werden, ob eine unabhängige Variable einen signifikanten Einfluss auf die abhängige Variable hat, kann der Wald-Test genutzt werden. Damit wird die Nullhypothese $\mathbf{H}_0 : \beta = 0$ gegen die Alternativhypothese $\mathbf{H}_1 : \beta \neq 0$ überprüft, falls der Parametervektor β durch einen M -Schätzer geschätzt wurde. Die Teststatistik W_n^2 lässt sich mithilfe der asymptotischen Kovarianzmatrix des M -Schätzers darstellen. Diese wird in einem Artikel von Heritier und Ronchetti genau definiert ([Heritier and Ronchetti, 1994](#), S. 898). Unter der Nullhypothese gilt, dass W^2 asymptotisch χ^2 -verteilt ist (vgl. [Huber and Ronchetti, 2009](#), S. 303).

3.3 Logistische Regression

Eine Zufallsvariable heißt binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in (0, 1)$ (kurz: $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$), wenn sie die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} & , x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien nun $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ ein Zufallsvektor mit den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n , die jeweils $\text{Bin}(1, \pi_i)$ -verteilt sind und der Realisierung $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ für $i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \pi_i \in [0, 1]$ und $Y_i \in \{0, 1\}$. Die Wahrscheinlichkeit π_i beziehungsweise $(1 - \pi_i)$

dafür, dass Y_i den Wert 1 oder 0 annimmt, hängt von m Einflussgrößen ab. X_1, \dots, X_m seien Zufallsvektoren mit $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj})$, wobei X_{1j}, \dots, X_{nj} Zufallsvariablen sind für $j = 1, \dots, m$ und $m \in \mathbb{N}$. Die Beobachtungen der Datenmatrix $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_m)$, welche die Einflussgrößen X_1, \dots, X_m und den Vektor $X_0 = (1, \dots, 1)$ enthält, können somit folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Dabei steht x_i^T für den Vektor der Realisierungen der i -ten Zeile von \mathbf{X} . Die Wahrscheinlichkeit π_i ergibt sich somit als $\pi_i = E(Y_i | \mathbf{X} = x_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Der zu den Einflussgrößen zugehörige Parametervektor wird mit $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ bezeichnet (vgl. [Fahrmeir et al., 2013](#), S. 33-35). Die Wahrscheinlichkeit π_i wird im Folgenden durch $\pi_i = F(x_i^T \beta)$ modelliert, wobei F in diesem Fall die Verteilungsfunktion der logistischen Verteilung ist, welche stetig ist und als Wertebereich das Intervall $[0, 1]$ hat. π_i wird nun anhand der Umkehrfunktion von F , welche als Logit-Funktion bezeichnet wird folgendermaßen modelliert:

$$\text{logit}(\pi_i) = F^{-1}(\pi_i) = \ln \left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = x_i^T \beta.$$

Durch Umformungen ergibt sich das Modell

$$\pi_i = \frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)}.$$

Zur Schätzung des Parametervektors β wird die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) genutzt. Die Likelihood-Funktion L gibt hierbei für spezielle Parameter die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der kombinierten Ereignisse $Y_i = 1$ und $Y_i = 0$ an. Bei Annahme von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n hat die Likelihood-Funktion folgende Form:

$$\begin{aligned} L(\beta_0, \dots, \beta_1, \dots, \beta_m | \mathbf{X} = x_i) &= \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | X_1 = x_{i1}, \dots, X_m = x_{im}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)}, \quad y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Um einen Parametervektor $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)$ zu bestimmen, bei dem die Likelihood-Funktion maximal ist, wird zur Vereinfachung der Bestimmung der Ableitungen durch das Logarithmieren

ren der Likelihood die Log-Likelihoodfunktion betrachtet. Für jedes Ereignis $Y_i = 1$ wird die Wahrscheinlichkeit π_i eingesetzt und für jedes Ereignis $Y_i = 0$ wird die Wahrscheinlichkeit $1 - \pi_i$ eingesetzt:

$$\ln L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m | \mathbf{X} = x_i) = \sum_{\{i:y_i=1\}} \ln \left(\frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)} \right) + \sum_{\{i:y_i=0\}} \ln \left(\frac{1}{1 + \exp(x_i^T \beta)} \right).$$

Die ML-Schätzung für β ist das Maximum der obigen Log-Likelihood-Funktion, welches nicht analytisch lösbar ist und durch Anwendung von numerischen Verfahren bestimmt werden muss (vgl. [Scheffner et al., 2002](#), S.4-7). Ein häufig genutztes Verfahren ist der Newton-Raphson Algorithmus (vgl. [Behnke, 2015](#), S.56-65).

3.3.1 Odds und Odds-Ratio

Zur Interpretation der Parameterschätzer können die sogenannten Odds (Chance) genutzt werden. Diese berechnen sich als

$$\text{Odds} = \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = \exp(\beta_0) \cdot \exp(\beta_1 x_{i1}) \cdot \dots \cdot \exp(\beta_m x_{im})$$

und geben die Chance $\frac{P(Y_i=1)}{P(Y_i=0)}$ an für $i = 1, \dots, n$.

Für zwei Beobachtungen $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{m1})$ und $x_2 = (x_{12}, \dots, x_{m2})$ lässt sich das Odds Ratio durch den Quotienten zweier Odds berechnen durch

$$\widehat{\text{OR}}(x_1, x_2) = \frac{\text{Odds}(P(Y = 1 | X = x_1))}{\text{Odds}(P(Y = 1 | X = x_2))} = \exp\left(\sum_{j=1}^m \hat{\beta}_j (x_{j1} - x_{j2})\right),$$

wobei x_1 und x_2 so gewählt sind, dass sie bis auf den interessierenden Faktor j übereinstimmen. So kann der Einfluss von X_j , $j = 1, \dots, m$ auf den Odds beschrieben werden. Demnach gilt, dass bei der Addition von $(x_{j1} - x_{j1})$ zu x_{j2} , die Odds von $P(Y = 1 | X = x_2)$ um den Faktor $\widehat{\text{OR}} = \exp(\hat{\beta}(x_{j1} - x_{j2}))$ verändert werden. (vgl. [Scheffner et al., 2002](#), S. 12-14).

3.4 Multivariate Varianzanalyse (MANOVA)

Mit der multivariaten Varianzanalyse kann der Einfluss eines Faktors auf mehrere, korrelierte Variablen untersucht werden. Dieser Faktor ist in g Gruppen unterteilt und es liegen p Variablen Y_1, \dots, Y_p vor.

Für jede Gruppe $i = 1, \dots, g$ liegen nun jeweils n_i unabhängige Messungen vor. So lässt es sich in einer Tabelle durch

Variable	Messwiederholungen						Mittelwert
	1	2	...	k	...	n_i	
Variable 1	$Y_{i1,1}$	$Y_{i1,2}$...	$Y_{i1,k}$...	Y_{i1,n_i}	\bar{Y}_{i1}
Variable 2	$Y_{i2,1}$	$Y_{i2,2}$...	$Y_{i2,k}$...	Y_{i2,n_i}	\bar{Y}_{i2}
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	⋮
Variable j	$Y_{ij,1}$	$Y_{ij,2}$...	$Y_{ij,k}$...	Y_{ij,n_i}	\bar{Y}_{ij}
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	⋮
Variable p	$Y_{ip,1}$	$Y_{ip,2}$...	$Y_{ip,k}$...	Y_{ip,n_i}	\bar{Y}_{ip}
Vektor	$Y_{i,1}$	$Y_{i,2}$...	$Y_{i,k}$...	Y_{i,n_i}	\bar{Y}_i

darstellen (vgl. [Pruscha, 2006](#), S. 232-233). So stellt jeder Vektor

$$Y_{i,k} = \begin{pmatrix} Y_{i1,k} \\ \vdots \\ Y_{ip,k} \end{pmatrix}$$

die k -te Messwiederholung der Gruppe i für die p Variablen dar, wobei $k = 1, \dots, n_i$ und $i = 1, \dots, g$. Es ergibt sich damit ein gesamter Stichprobenumfang von $n_1 + \dots + n_g = n$. So kann jedem der Mittelwertvektoren ein Erwartungswertvektor zugeordnet werden:

Gruppe	Erwartungswertvektor	Stichprobenumfang	Stichprobenvektoren				Mittelwertvektoren
1	μ_1	n_1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$...	Y_{1,n_1}	\bar{Y}_1
2	μ_2	n_2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$...	Y_{2,n_2}	\bar{Y}_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
i	μ_i	n_i	$Y_{i,1}$	$Y_{i,2}$...	Y_{i,n_i}	\bar{Y}_i
⋮	⋮	⋮	⋮		...	⋮	
g	μ_g	n_g	$Y_{g,1}$	$Y_{g,2}$...	Y_{g,n_g}	\bar{Y}_g

Damit bezeichnet nun $\mu_{ij} = E(Y_{ij,k})$ den Erwartungswert der Variable j der i -ten Gruppe. Das Modell lautet demnach

$$Y_{ij,k} = \mu_{ij} + e_{ij,k}, \quad i = 1, \dots, g, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, n_i$$

(vgl. [Pruscha, 2006](#), S. 233). Dabei ist jeder der n unabhängigen Zufallsvektoren $e_{i,k} = (e_{i1,k}, \dots, e_{ip,k})^T$ für $i = 1, \dots, g$, $k = 1, \dots, n_i$ $N_p(0, \Sigma)$ -verteilt, also p -dimensional normalverteilt mit $\Sigma = (\sigma_{jj'})_{\substack{j=1, \dots, p \\ j'=1, \dots, p}}$. Somit gilt, dass

$$E(e_{ij,k}) = 0, \quad Cov(e_{ij,k}, e_{ij',k}) = \sigma_{jj'}, \quad j, j' = 1, \dots, p$$

und in jeder der g Gruppen wird die gleiche Varianz zwischen den Variablen angenommen. Mit

$\mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{ip})^T$ kann das Modell nun auch durch

$$Y_{ik} = \mu_i + e_{i,k}, \quad i = 1, \dots, g, \quad k = 1, \dots, n_i$$

formuliert werden. Dabei stellt

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} Y_{ij,k}$$

den Schätzer für den Erwartungswert $\mu_{ij} = E(Y_{ij,k})$ und $\bar{Y}_i = (\bar{Y}_{i1}, \dots, \bar{Y}_{ip})^T$ somit den Schätzer für den Vektor des Erwartungswertes μ_i dar.

Die Kovarianz zweier Variablen j und j' kann durch

$$\hat{\sigma}_{jj'} = \frac{1}{n-g} \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ij,k} - \bar{Y}_{ij})(Y_{ij',k} - \bar{Y}_{ij'})$$

geschätzt werden, sodass die Schätzung der Varianz der Variablen Y_j innerhalb der Gruppen durch

$$\hat{\sigma}_j^2 = \hat{\sigma}_{jj} = \frac{1}{n-g} \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ij,k} - \bar{Y}_{ij})^2$$

erfolgt (vgl. [Pruscha, 2006](#), S. 234).

3.4.1 Wilks Lambda

Ist es von Interesse, ob sich die g Vektoren der Mittelwerte μ_1, \dots, μ_g unterscheiden, so kann innerhalb der multivariaten Varianzanalyse, kurz MANOVA der Wilks-Lambda-Test durchgeführt werden. Dafür werden zunächst bestimmte Notationen eingeführt:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{i,k} - \bar{Y})(Y_{i,k} - \bar{Y})^T$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})(\bar{Y}_i - \bar{Y})^T$$

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{i,k} - \bar{Y}_i)(Y_{i,k} - \bar{Y}_i)^T$$

Demnach wird die Gesamtstreuung durch die Matrix \mathbf{T} beschrieben, die Matrix \mathbf{B} gibt die Streuung zwischen den Gruppen an und mit \mathbf{W} wird die Streuung innerhalb der Gruppen berechnet.

Die Komponenten der Vektoren

$$\bar{Y}_i = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{i1} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{ip} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{\cdot 1} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{\cdot p} \end{pmatrix}$$

lassen sich durch

$$\bar{Y}_{ij} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} Y_{ij,k} \quad \text{bzw.} \quad \bar{Y}_{\cdot j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g n_i \bar{Y}_{ij}$$

berechnen. Mit der Streuungszerlegung gilt nun, dass

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} + \mathbf{W}$$

(vgl. [Pruscha, 2006](#), S. 235). Um schließlich die Hypothesen

$$\mathbf{H}_0 : \mu_1 = \dots = \mu_G \quad \text{gegen} \quad \mathbf{H}_1 : \text{mindestens zwei } \mu\text{'s sind ungleich}$$

zu testen, müssen zunächst alle Normalverteilungen die gleiche Kovarianzmatrix besitzen.

Somit kann nun Λ , die Teststatistik Wilks Lambda definiert werden. Für diese Teststatistik wird \mathbf{W} , die Streuung innerhalb der Gruppen in das Verhältnis gesetzt zu $\mathbf{W} + \mathbf{B}$, der Gesamtstreuung. Nach Bestimmung der Determinanten der Quotienten, wird Λ somit durch

$$\Lambda = \frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{W} + \mathbf{B})} = \frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{T})}$$

definiert. Die Determinante wird dabei als Streuungsmaß genutzt, da sie das eingenommene Volumen der Daten zur entsprechenden Kovarianzmatrix darstellt ([Schlittgen, 2009](#), S. 114).

Liegt eine erhöhte Streuung zwischen den Gruppen vor, so würde der Nenner den Zähler dominieren und die Teststatistik Λ würde sinken. Demnach wird die Nullhypothese \mathbf{H}_0 bei kleinen Werten von Λ abgelehnt. Für die Matrizen \mathbf{W} bzw. \mathbf{B} gilt unter \mathbf{H}_0 , dass sie Wishart-verteilt sind, genauer gilt $\mathbf{W} \sim W_p(\Sigma, n - g)$ bzw. $\mathbf{B} \sim W_p(\Sigma, g - 1)$. Deshalb ist nun die Teststatistik Λ Wilks Lambda-verteilt:

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n - g, g - 1)$$

(vgl. [Fahrmeir et al., 2015](#), S. 230).

3.5 Modelldiagnose

Zur Überprüfung der Annahmen von Modellen oder Tests muss oft eine Modelldiagnose durchgeführt werden. In diesem Kapitel werden möglich Verfahren für den uni- und multivariaten Fall vorgestellt.

3.5.1 Univariat: Residual- und QQ-Plot und Shapiro-Wilk Test

Unter anderem werden Residualplots betrachtet. Diese werden verwendet, um die Annahme der Varianzhomogenität der Messfehler und den linearen Zusammenhang der Variablen zu überprüfen. Dafür werden in einem Streudiagramm die geschätzten Werte \hat{y} gegen die Residuen $\hat{\epsilon}$ abgetragen. Sind die Residuen homoskedastisch, so sollten die Punkte im Diagramm unsystematisch um den Erwartungswert 0 streuen (vgl. [Tiede, 1987](#), S.199). Auffällige Muster in der Punktverteilung sind somit als Evidenz gegen einen linearen Zusammenhang zu interpretieren.

Um herauszufinden, ob eine Stichprobe aus einer Normalverteilung stammt, kann der Shapiro-Wilk Test genutzt werden. Die passenden Hypothesen für eine Zufallsvariable X lauten dann: $H_0 : P^X \in \{N(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ und $H_1 : P^X \notin \{N(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$. P^X bezeichnet die Verteilung von X . Die Nullhypothese sagt somit aus, dass X normalverteilt ist, während die Alternativhypothese das Gegenteil ausdrückt. Die Teststatistik des Shapiro Wilk-Tests ist unter Annahme, dass X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilt sind definiert durch

$$W = r^2(Q, X)$$

([Fahrmeir et al., 2003](#), S. 105-106). Dabei gibt $Q = (p_1, \dots, p_n)$ die Quantile der Standardnormalverteilung für die sortierten Daten X_i an. Die Berechnung dieser Quantile erfolgt durch: $p_i = \frac{i-0.5}{n}$. Die Statistik W wird somit durch die quadrierte Korrelation r^2 zwischen den Werten für die erwarteten Quantile und den sortierten Beobachtungen berechnet.

Mithilfe von Quantil-Quantil Plots (kurz: QQ-Plot) kann überprüft werden, ob Daten aus einer bestimmten Verteilung stammen. Ergänzend zum Shapiro-Wilk Test können somit Daten auf eine Normalverteilung überprüft werden. Dafür werden zunächst die Beobachtungen sortiert und den Quantilen der Normalverteilung gegenübergestellt. Diese werden dann als Wertepaare zusammengefasst und als Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen. Bilden diese Punkte schließlich annähernd eine Gerade, so wäre die Annahme einer Normalverteilung der Daten berechtigt. Liegt eine erhöhte Streuung um diese Gerade vor, so wäre diese Annahme ohne

weitere Tests nicht zulässig (vgl. [Holling and Gediga, 2015](#), S. 100-101). Mit diesem Test kann somit die Normalverteilungsannahme der Residuen überprüft werden.

3.5.2 Multivariat: Energy-Statistic-Test und Box's M-Test

Um zu überprüfen, ob multidimensionale Daten normalverteilt sind, existieren einige Möglichkeiten, die mittels statistischer Software leicht anwendbar sind. Einige dieser Tests wurden hinsichtlich ihrer Güte und Fehlerwahrscheinlichkeit mithilfe von Simulationen in einem Arbeitsbericht genauer untersucht ([Joenssen and Vogel, 2010](#)). So wurde der weit verbreitete „Multivariate Shapiro Wilk Test“ wegen seiner hohen relativen Fehlerhäufigkeit als ungeeignet eingestuft. Neben diesem Test kann jedoch auch der Energy-Statistic-Test nach ([Székely and Rizzo, 2005](#)) genutzt werden, um multivariate Daten auf Normalverteiltheit zu überprüfen. Nach den Ergebnissen des Berichts weist dieser Test eine höhere Güte auf und bietet sich somit an. Dieser Test wird mithilfe des Bootstrap Verfahrens durchgeführt und wird in dem Paper der Autoren genauer beschrieben (vgl. [Székely and Rizzo, 2005](#)).

Um die Gleichheit der Varianzen mehrerer Stichproben zu überprüfen, kann der Box's M-Test genutzt werden. Liegen g Stichproben bzw. Gruppen vor, so ist die Teststatistik M durch

$$M = \frac{\prod_{i=1}^g |\mathbf{C}_i|^{(n_i-1)/2}}{|\mathbf{C}|^{(n-g)/2}}$$

definiert ([Manly, 2004](#), S. 49). Dabei gibt n erneut die Anzahl aller Beobachtungen an und n_i die Anzahl der Beobachtungen in der i -ten Gruppe, sodass $\sum_{i=1}^g n_i = n$. Ist \mathbf{C}_i die Kovarianzmatrix der i -ten Gruppe, so wird die gepoolte Kovarianzmatrix \mathbf{C} durch

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^g \frac{(n_i - 1)}{(n - g)} \mathbf{C}_i$$

berechnet. Somit deuten große Werte für M darauf hin, dass zwei Stichproben nicht aus einer Population mit derselben Kovarianz stammen. Dieses Teststatistik M ist durch eine Transformation F -verteilt (vgl. [Manly, 2004](#), S. 50).

3.6 Kennzahlen für die Modellgüte: Das Bestimmtheitsmaß R^2 und das AIC

Ein mögliches Maß zur Bestimmung der Modellgüte bzw. Anpassung eines linearen Modells stellt das Bestimmtheitsmaß R^2 dar. Es misst bei der multiplen Regression den relativen Anteil

des Verhältnisses der durch die Regressoren erklärte Varianz und der Gesamtvarianz SYY , wobei

$$SYY = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{und} \quad SYY_{Reg} = SYY - RSS.$$

Damit ist das Bestimmtheitsmaß definiert durch

$$R^2 = \frac{SYY_{Reg}}{SYY} = 1 - \frac{RSS}{SYY}$$

(vgl. [Toutenburg, 2013](#), S. 146).

Vergleicht man jedoch zwei lineare Modelle mit unterschiedlicher Anzahl unabhängiger Variablen miteinander, ist das R^2 nicht geeignet. Es wächst mit der Anzahl der im Modell enthaltenen Variablen, sodass $R^2_{p+1} \geq R^2_p$ gilt. Somit besitzt das größte Modell automatisch das größte Bestimmtheitsmaß. Um dies zu vermeiden kann stattdessen das adjustierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 genutzt werden. Dieses wird durch

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1 - R^2)$$

definiert. Nach dieser Adjustierung ist es möglich, dass \bar{R}^2 für ein Modell mit p Variablen kleiner ist, als bei einem Modell mit $p + b$ Variablen, wobei das kleinere Modell im größeren enthalten ist (vgl. [Toutenburg, 2013](#), S. 148-149). Anzumerken ist, dass für die robuste Regression ein angepasstes (adjustiertes) Bestimmtheitsmaß genutzt wird (vgl. [Renaud and Victoria-Feser, 2010](#)).

Um bei dem Vergleich von mehreren logistischen Modellen ein möglichst „gutes“ zu bestimmen, werden verschiedene Kriterien zur Variablenselektion genutzt. Ein Verfahren ist hierbei das Akaike Information Criterion (AIC). Dabei wird beim Vergleich mehrerer Modelle das Modell mit einem minimalen AIC gewählt. Das AIC berechnet sich als

$$AIC = -2 \cdot l(\hat{\beta}_k, \hat{\sigma}^2) + 2 \cdot (k + 1),$$

wobei $l(\hat{\beta}_m, \hat{\sigma}^2)$ der maximale Wert der Log-Likelihood ist und $k + 1$ die Anzahl der geschätzten Parameter im Modell angibt. Anhand der Formel ist ersichtlich, dass eine größere Anzahl geschätzter Parameter zu einem höheren AIC führt, sodass Modelle mit vielen Parametern „bestraft“ werden (vgl. [Fahrmeir et al., 2013](#), S. 161).

4 Statistische Auswertung

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine Deskription der Variablen mithilfe von Grafiken und Tabellen. Es werden außerdem Modelle vorgestellt und optimiert, um die Zielvariablen möglichst gut zu beschreiben.

Für diese Untersuchung wird die statistische Software R in der Version 4.0.1 genutzt (R Core Team, 2020). Vor allem die Pakete `ggplot2` (Wickham, 2016), `gridextra` (Auguie, 2015), `Metrics` (Hamner et al., 2018), `MASS` (Venables and Ripley, 2002), `MatrixStats` (Bengtsson, 2022), `tibble` (Müller and Wickham, 2021) und `tidyverse` (Wickham, 2021) dienen dabei zur Ergänzung der gegebenen Funktionen. Weitere wichtige Funktionen und Pakete werden während der einzelnen Analysen erwähnt. In der gesamten Auswertung werden Zahlen konsequent auf drei Nachkommastellen gerundet.

4.1 Deskriptive Analyse

Im Folgenden findet die deskriptive Auswertung der Daten statt. Es werden zunächst jeweils Analysen durchgeführt, um geeignete Maßzahlen für die jeweils 15 Messungen pro Ritzspur zu bestimmen. Anschließend werden Boxplots, sowie passende Tabelle der Daten betrachtet, um einen Überblick über die einzelnen Variablen zu gewinnen und mögliche Unterschiede zwischen den einzelnen Ausprägungen der unabhängigen Variablen zu erkennen. Auch erste bivariate Zusammenhänge könnten dabei erkannt werden.

4.1.1 Die Flächen und Tiefen

Um mögliche Muster der Muldenflächen und Muldentiefen zu erkennen, werden Boxplots, sowie die Mittelwerte der vorhandenen Beobachtungen der Flächen und Tiefen betrachtet. So werden jeweils für die Spalten der *Fläche1.1* bis *Fläche3.5* Boxplots bzw. Mittelwerte berechnet. Diese beiden resultierenden Grafiken sind in Abbildung 5 dargestellt. Bei den Boxplots fällt vor allem auf, dass im hinteren Teil des Betonblocks immer extreme Ausreißer mit einer großen Muldenfläche gemessen werden. Diese Ausreißer ab *Fläche2.4* sind jedoch nur einer einzigen Ritzspur zuzuordnen. Für diese wurde speziell angemerkt, dass die Ritzspuren mit zunehmender Länge an Tiefe zunehmen. Trotzdem bleibt die Varianz wegen der tendenziell gleich bleibenden Breiten der Boxen relativ stabil. Der Mittelwert liegt meist sehr nah am Median oder befindet sich leicht darüber. Im unteren Plot sind leichtere Schwankungen der Mittelwerte deutlicher erkennbar, da die y-Achse weniger Breite besitzt. Dabei ist erkennbar, dass das Flächenmittel trotz deutlicher Schwankungen tendenziell in den späteren und somit weiter hinten liegenden

Teilen des Betonblocks ansteigt. Wegen dieser Auffälligkeiten ist es bei der Wahl des Mittels für die 15 Messungen pro Ritzung sinnvoll, ein Maß zu wählen, welches die sehr niedrigen und sehr hohen Werte nicht zu stark berücksichtigt. Der Median bietet sich dafür gut an, sodass in den folgenden Auswertungen und Modellen der Median der 15 gemessenen Werte der Muldenflächen pro Ritzspur genutzt wird. Dieser Median von den 15 Beobachtungen der Ritzspur wird im Folgenden als *MedFläche* bezeichnet.

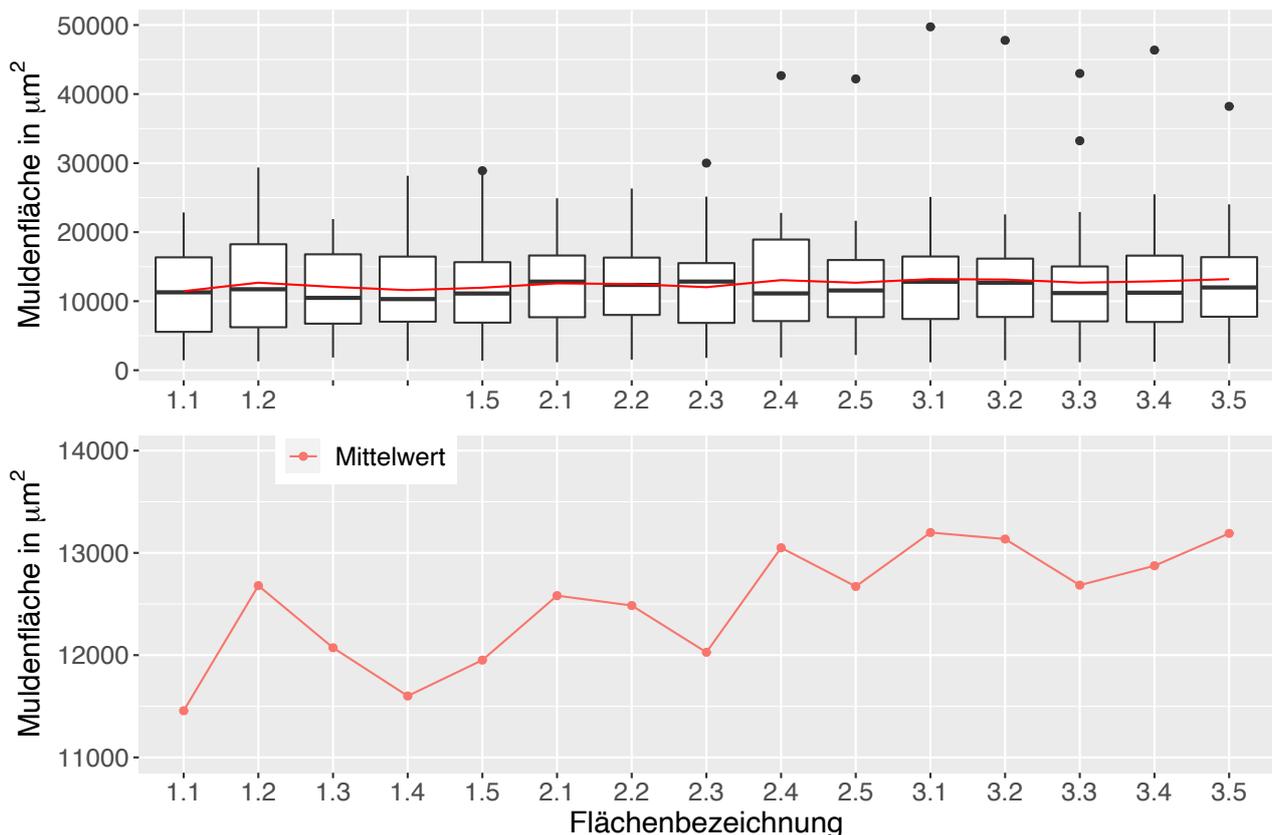


Abbildung 5: Boxplots mit Mittelwerten (oben) und Plot der Mittelwerte (unten) pro Flächenspalte (*Fläche1.1* bis *Fläche3.5*)

In Abbildung 6 sind nun für die Ritztiefe pro Spalte Boxplots und Mittelwerte dargestellt. Bei Betrachtung der Boxplots fällt auf, dass wegen der schwankenden Breiten der Boxen Unterschiede in den Varianzen vorliegen. Extreme Ausreißer sind nur für die *Fläche1.1* und in den hinteren Teilen des Betonblocks sichtbar. In der unteren Grafik wird deutlich, dass sich ausschließlich die Mittelwerte der Tiefen in Bereich 1.1 und 1.2 deutlich von den anderen Mittelwerten unterscheiden. Diese Auffälligkeit könnte jedoch an der Beschaffenheit der Betonblöcke liegen. So kann, wie in Abbildung 4 sichtbar ist, eine gewisse Tiefe erreicht werden ohne, dass die tatsächliche Tiefe festgehalten wird. Dies liegt an der möglichen „höheren“ Oberfläche des Blocks an einigen Stellen. Im weiteren Verlauf der deskriptiven Analyse wird dies genauer untersucht. In der Grafik sind zwar weiterhin Schwankungen erkennbar, diese liegen jedoch fast

ausschließlich im Bereich von 40 bis 42.5 μm . Auffällig ist, dass trotz der vorgegebenen Ritztiefe von 50 μm diese bei keinem der Spaltenmittel annähernd erreicht wird. Bei den Boxplots liegen jedoch meistens die oberen Ränder der Box mindestens an den voreingestellten 50 μm . Um auch für die Ritztiefe die beschriebenen Schwankungen nicht zu berücksichtigen, wird ebenfalls im Folgenden der Median der Tiefe genutzt und mit *MedTiefe* bezeichnet.

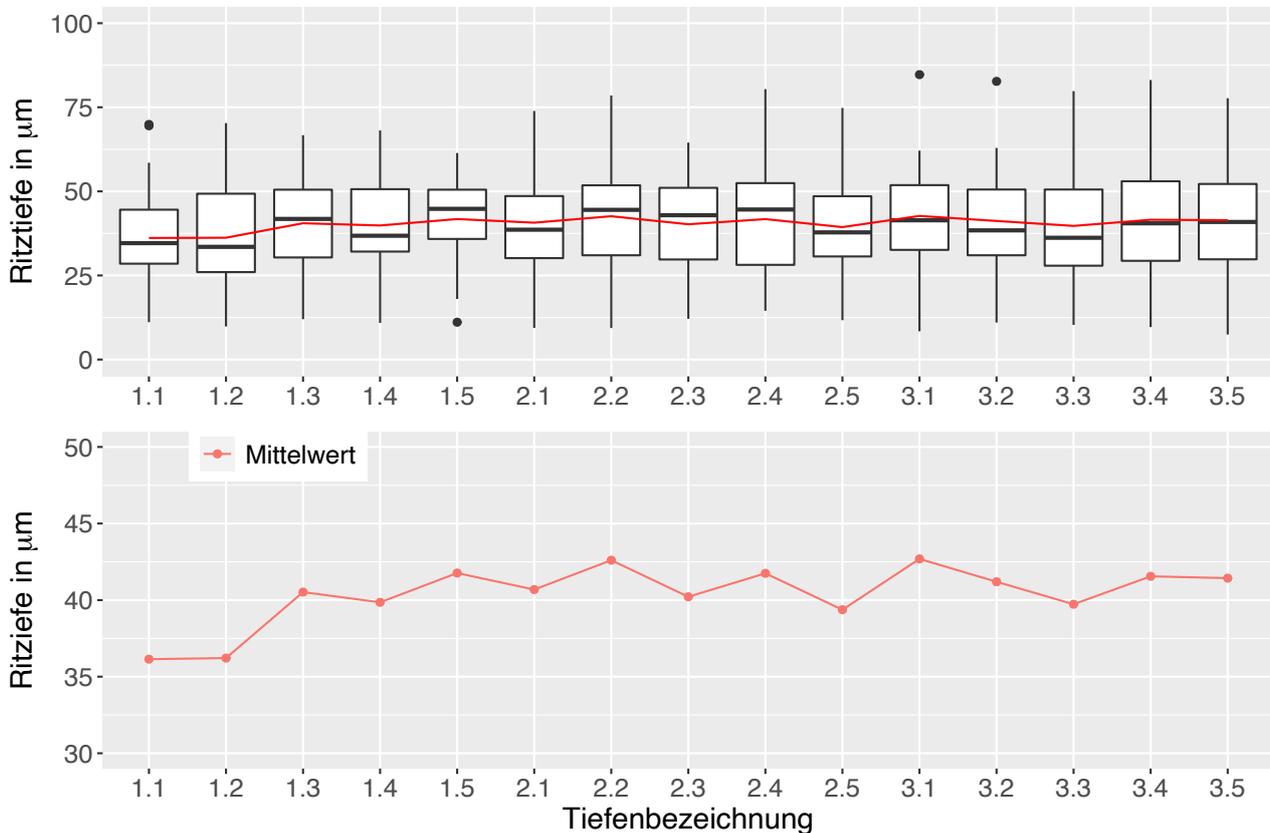


Abbildung 6: Boxplots mit Mittelwerten (oben) und Plot der Mittelwerte (unten) pro Tiefenspalte (*Tiefe1.1* bis *Tiefe3.5*)

Um einen Überblick über die Verteilung der gewählten Maße für die Flächen und Tiefen der Ritzspuren zu erhalten, sind in Abbildung 7 Boxplots abgebildet. Bei dem Boxplot der *MedFläche* ist erkennbar, dass der Median von 13498 μm^2 relativ weit rechts in der Box liegt, die Box aber gleichzeitig eher links liegt. Die Whisker erstrecken sich von 1378 bis 26751 μm^2 und sind gleichzeitig die kleinsten bzw. größten Beobachtung. Wegen des relativ großen Interquartilsabstandes ist von einer erhöhten Streuung bei den Muldenflächen auszugehen.

Die Box der *MedTiefe* ist deutlich nach rechts verschoben und der Median liegt mit 37.50 μm relativ mittig in der Box. Dieser Median der maximalen Ritztiefe pro Ritzspur liegt somit deutlich unter der vorgegebenen Tiefe von 50 μm . Die Whisker erstrecken sich dabei von 11 μm bis 59 μm , sodass eine Abweichung von ca. 35 μm in beide Richtungen vorliegt.

Die Korrelation dieser Tiefen- und Flächenwerte beträgt 0.752, sodass eine hohe positive Kor-

relation vorliegt (vgl. auch Abbildung [28](#), Anhang). Da sich die Fläche bei zunehmender Tiefe der Ritzspur vergrößert, ist diese positive Korrelation schlüssig.

Wählt man exemplarisch statt der *MedFläche* und *MedTiefe* die *MittelFläche* und *MittelTiefe*, also die Mittelwerte, so resultieren die Boxplots in Abbildung [27](#) (siehe Anhang). Dort ist der rechte Whisker für die *MittelFläche* kürzer und der Median liegt weiter links. Insgesamt sind diese Boxplots jedoch vergleichbar.

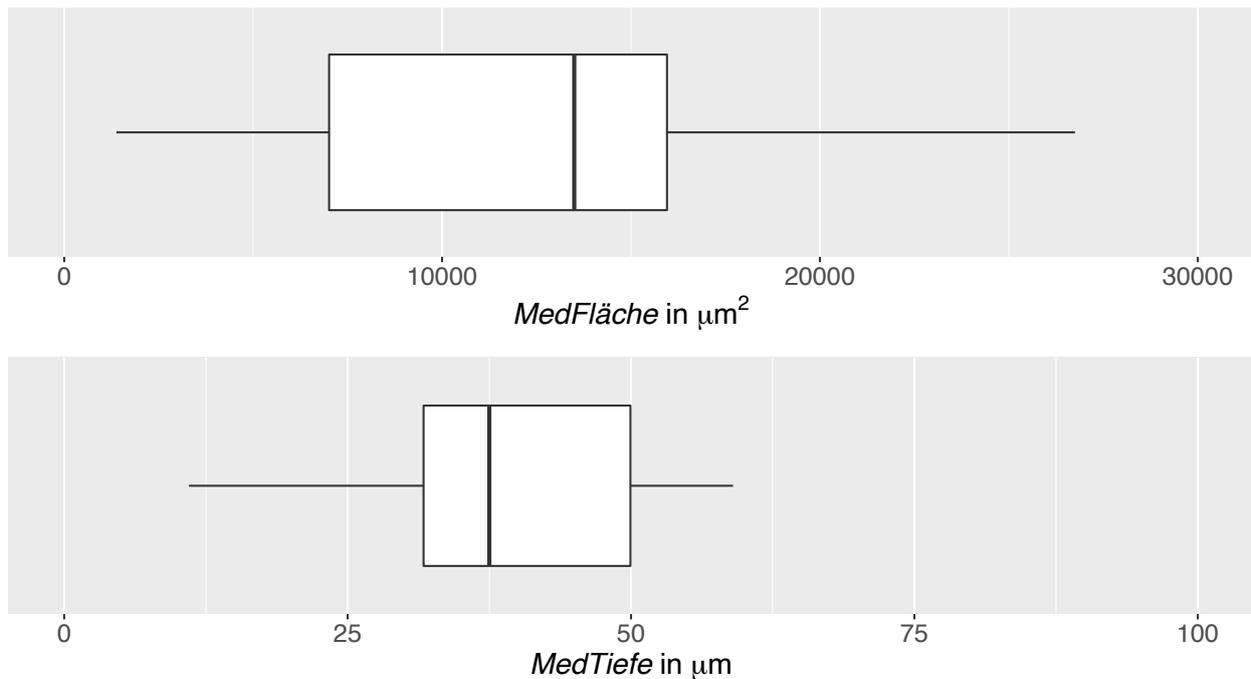


Abbildung 7: Boxplots der *MedFläche* und *MedTiefe*

Bei Betrachtung der Boxplots der *MedFläche*, aufgeteilt nach den verwendeten Lochplatten (vgl. Abbildung [8](#), links) fällt auf, dass sich die Verteilungen unterscheiden. So wird bei Verwendung der Lochplatte 1 zunächst das Maximum der *MedFläche* mit $26751 \mu\text{m}^2$ erreicht. Gleichzeitig ist der linke bzw. untere Whisker hier kaum sichtbar und der Boxplot endet dort bei $6675 \mu\text{m}^2$ und hat somit die größte kleinste Beobachtung der vier Boxplots. Der Median für die Lochplatte 8 liegt mit $10965 \mu\text{m}^2$ deutlich unter dem der ersten Lochplatte, aber liegt sehr nahe an dem Median der Lochplatte 10 mit $10567 \mu\text{m}^2$. Weiterhin ist der obere Whisker sehr kurz, sodass das Maximum bei nur $17266 \mu\text{m}^2$ liegt. Die Verteilung der *MedFläche* bei Verwendung der Lochplatte 9 ist etwas linksschief, da der Median deutlich- und die Box minimal nach links bzw. oben verschoben ist. Der Median ist mit $15732 \mu\text{m}^2$ am größten und dieser Boxplot hat die breiteste Box, sodass für diese Lochplatte 9 eine erhöhte Streuung vorliegt. Bei der Ritzung mit Lochplatte Nr. 10 wurde, wie am rechten Boxplot erkennbar ist, das Minimum der *MedFläche* mit $1378 \mu\text{m}^2$ gemessen. Die Box ist ebenfalls vergleichsweise weit nach unten

verschoben und das Maximum wird bei $15382 \mu\text{m}^2$ erreicht, was dem kleinsten Maximum der vier Boxplots entspricht. Auch der Median von $10567 \mu\text{m}^2$ wird nicht bei der Verwendung der übrigen drei Lochplatten unterschritten, sodass mit Lochplatte Nr. 10 tendenziell niedrige Werte der *MedFläche* erreicht wurden.

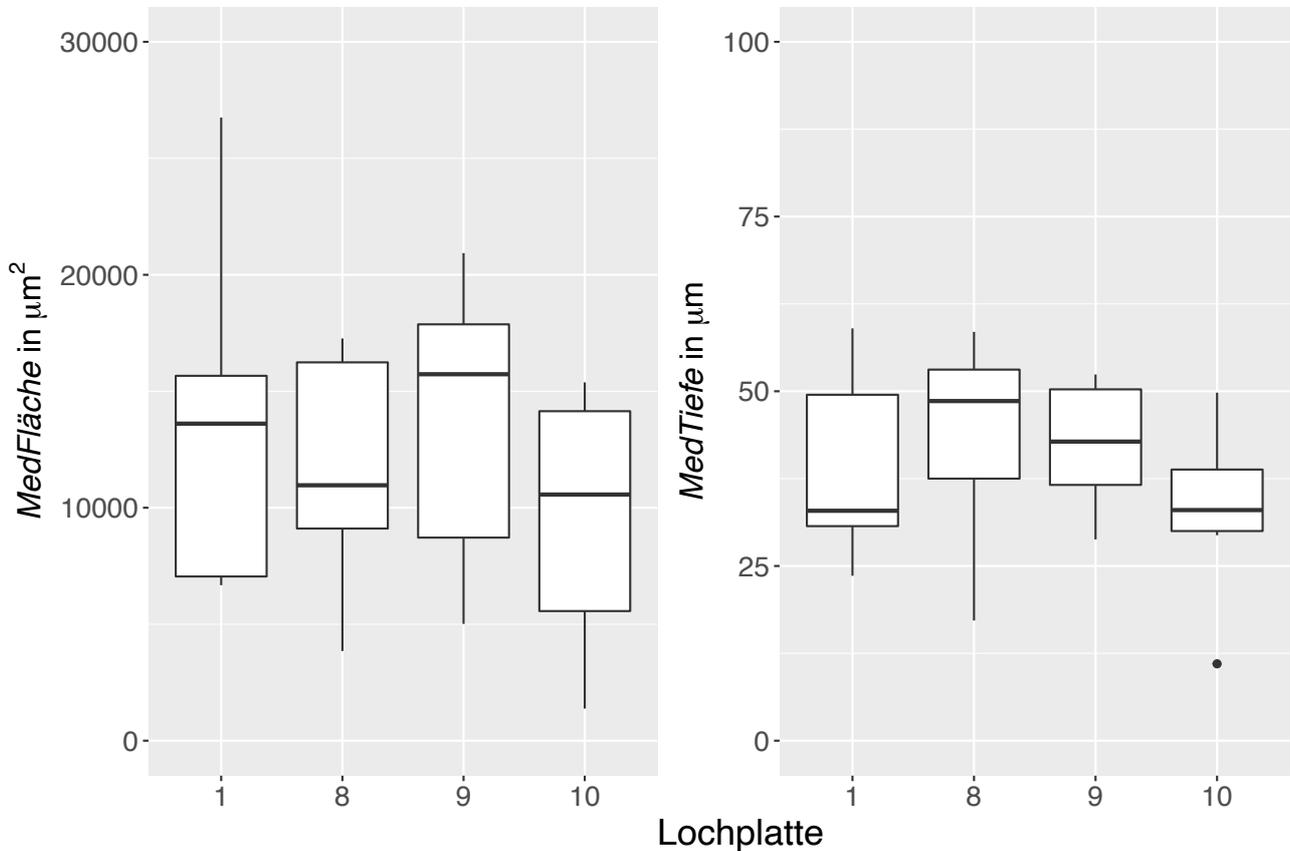


Abbildung 8: Boxplots der *MedFläche* (links) und der *MedTiefe* (rechts), aufgeteilt nach der Nummer der verwendeten Lochplatte

Neben der Muldenfläche wird nun die Ritztiefe anhand der verwendeten Lochplatte untersucht. Im rechten Teil der Abbildung [8](#) ist erkennbar, dass die Höhen der Boxplots verglichen zueinander etwas denen der Flächen ähneln. Dies passt zu der bereits erwähnten Korrelation der beiden Maße. Auch hier wird der größte Wert von $59.00 \mu\text{m}$ mit der Lochplatte 1 erreicht. Dieser erhöhte Wert wird ebenfalls wegen seines langen Whiskers für die Muldenfläche im Anschluss näher untersucht. Der Median ist für diese Lochplatte am untersten Rand der Box und die Box ist leicht nach unten verschoben. Es liegt somit eine rechtsschiefe Verteilung vor. Die Verteilung der Ritztiefe für die Lochplatte 8 ist rechtsschief. Auffällig ist, dass der Median bei etwa $50 \mu\text{m}$ liegt, sodass etwa 50% der Beobachtungen darüber liegen. Wie auch bei der Muldenfläche, wird der kleinste Wert mit der Lochplatte Nr. 10 erreicht. Dieser Ausreißer hat einen Wert von $11.00 \mu\text{m}$ und wird deshalb ebenfalls anschließend näher untersucht. Auffällig sind die verschiedenen Verläufe der Boxplots trotz der hohen Korrelation der *MedFläche* und *MedTiefe*.

Bei näherer Betrachtung des Maximums der Tiefe für die Lochplatte 1, welcher gleichzeitig das Maximum für die Fläche darstellt, fällt auf, dass dieser Versuch wiederholt werden musste. Laut der gegebenen Anmerkung zu diesem Versuch wurde diese Ritzspur mit zunehmender Länge tiefer. Dies erklärt zunächst die extremen Werte. Für den weiteren Ausreißer, welcher jeweils den minimalen Wert für die Fläche und Tiefe darstellt wurde ebenfalls eine Anmerkung hinterlegt. Das Segment lag demnach zu locker in der Hülse, sodass dies eine Erklärung für die niedrigen Werte darstellen könnte.

Wie zuvor erwähnt, können sich die Betonblöcke vor allem in ihrer Beschaffenheit unterscheiden, was beispielsweise dazu führen kann, dass sich die Tendenzen der gemessenen Größen unterscheiden. Deshalb werden nun die Boxplots der *MedFläche* und *MedTiefe* nach Betonblock A und B aus Abbildung 9 betrachtet und analysiert. Für die *MedFläche* fällt bei Nutzung des Betonblocks A auf, dass es sich um eine symmetrische Verteilung handelt. Der untere Whisker erstreckt sich bis zu einer *MedFläche* von $1378 \mu\text{m}^2$, was dem zuvor näher untersuchten Wert entspricht. Dies gilt auch für den extremen Ausreißer nach oben. Der Median von $10348 \mu\text{m}^2$ des Betonblocks A liegt deutlich unter dem des Betonblock B mit $15663 \mu\text{m}^2$. Zudem ist die gesamte Box, inklusive der Whisker deutlich schmaler, was auf eine sehr viel geringere Varianz hindeutet. Genauer liegt für Betonblock A eine Varianz von 36486347 vor und für Betonblock B beträgt sie 16285468, was ungefähr einer Verdopplung entspricht. Die Whisker des rechten Boxplots sind kaum sichtbar, jedoch sind drei Ausreißer gekennzeichnet. Weitere Anmerkungen zu diesen drei Versuchen sind jedoch nicht angegeben. Dass auf Block B deutlich größere *MedFlächen* gemessen wurden ist vermutlich auf die Brüchigkeit des Materials zurückzuführen. So könnte Betonblock B deutlich weicher sein, sodass mehr Material abgetragen wird.

Für die Tiefe ist Ähnliches beobachtbar. Der Boxplot der *MedTiefe* des Betonblocks A ist verglichen mit dem des Betonblocks B nach unten verschoben. Vor allem die Mediane von $34.95 \mu\text{m}$ (Block A) und $49.80 \mu\text{m}$ (Block B) unterscheiden sich deutlich. So liegen hier circa 50% der Beobachtungen des Betonblocks B über den vorgegebenen $50 \mu\text{m}$. Das Minimum von $32.90 \mu\text{m}$ bei Betonblock B entspricht dabei nahezu diesem Median von $34.95 \mu\text{m}$. Auch wurde der sehr niedrige Wert von $11 \mu\text{m}$, sowie der größte Wert von $59 \mu\text{m}$ bereits durch die Anmerkungen erläutert.

Während dieser deskriptiven Analyse bei der Aufteilung nach Betonblock Typ A und B ist deutlich erkennbar, dass bei einer Ritzung auf Block A eher niedrigere *MedFlächen*, sowie *MedTiefen* Werte gemessen werden, als bei einer Ritzung auf Betonblock B. Die größten Ausreißer treten jedoch auf Block A auf. Diese Ergebnisse lassen zunächst vermuten, dass vor allem die Heterogenität des Materials einen erheblichen Einfluss auf die Ritzversuche hat. Ähnliche Effek-

te, die vermutlich auf den Betonblock zurückzuführen sind wurden bereits in einem Paper zur Analyse des Verschleißes von mit diamantenbesetzten Werkzeugen beobachtet (vgl. [Malevich et al., 2021](#), S. 6).

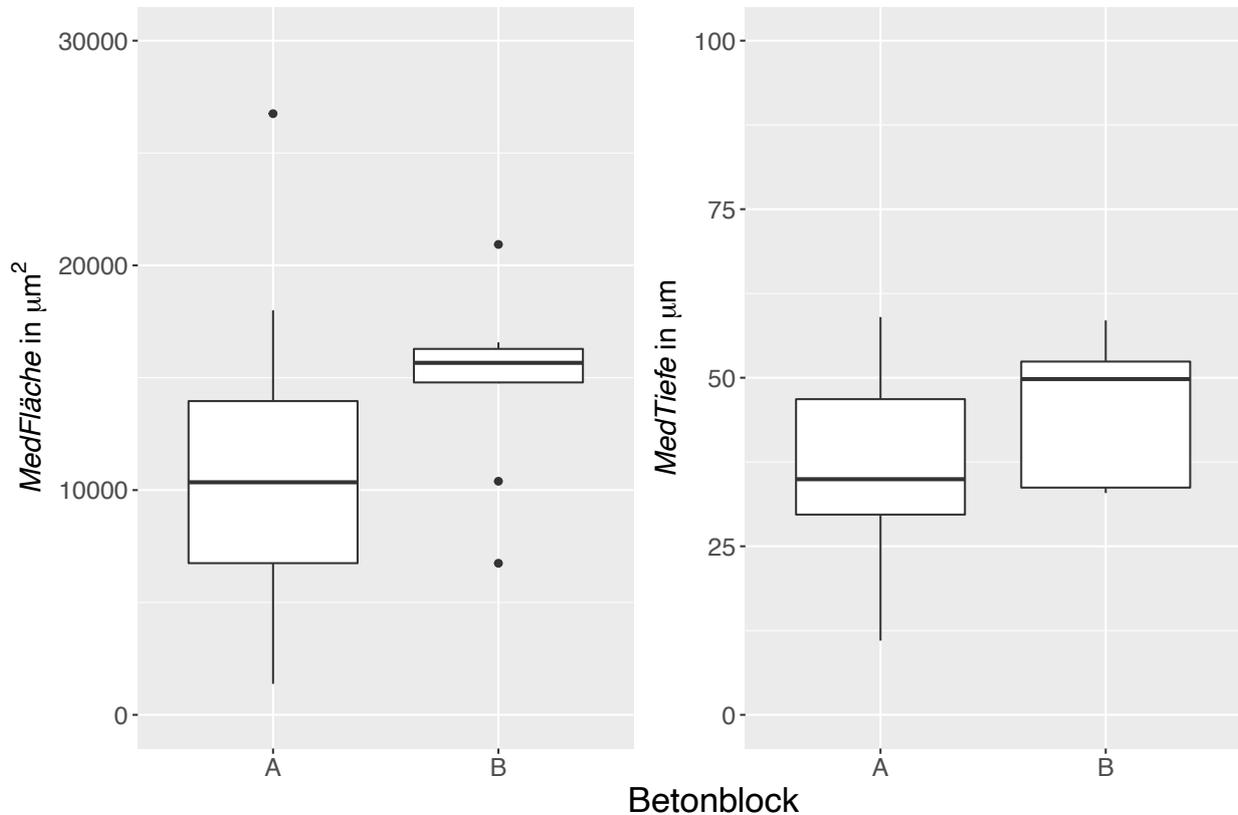


Abbildung 9: Boxplots der *MedFläche* (links) und der *MedTiefe* (rechts), aufgeteilt nach der verwendeten Betonplatte

Da trotz verwendeter Lochplatten nicht alle Diamanten am Eingriff beteiligt waren, ist eine Analyse nach der vorgenommenen Klasseneinteilung nötig. In [Abbildung 10](#) ist zunächst für die *MedFläche* ein aufsteigender Verlauf erkennbar. Zwar liegt die rechte Box etwas unter der Mittleren, der Whisker ist jedoch länger. Es fällt auf, dass die *MedFläche* für 1 oder 2 Diamanten rechtsschief verteilt ist. Weiterhin werden für diese Klasse, neben einem Ausreißer die niedrigsten Werte gemessen. Die Verteilung der *MedFläche* ist, falls zwei bis drei oder genau drei Diamanten am Eingriff beteiligt waren linksschief. Der Median ist dort mit $14377 \mu\text{m}^2$ mehr als doppelt so hoch wie der Median im linken Boxplot. Waren drei bis vier oder alle Diamanten an der Ritzung beteiligt, so ist anhand des vergleichsweise großen Interquartilsabstandes eine erhöhte Streuung erkennbar. Da bei dem Einsatz von mehr Diamanten mehr Fläche abgetragen wird, ist der beschriebene Verlauf begründet.

Die Boxplots der *MedTiefe* verhalten sich recht ähnlich. Allerdings ist die *MedTiefe* für die Kategorie “3-4 oder alle“ Diamanten rechtsschief verteilt und die größte Tiefe von $58.50 \mu\text{m}$ wird mit zwei bis drei oder drei Diamanten erreicht. Zudem liegen auch für diese Diamantenan-

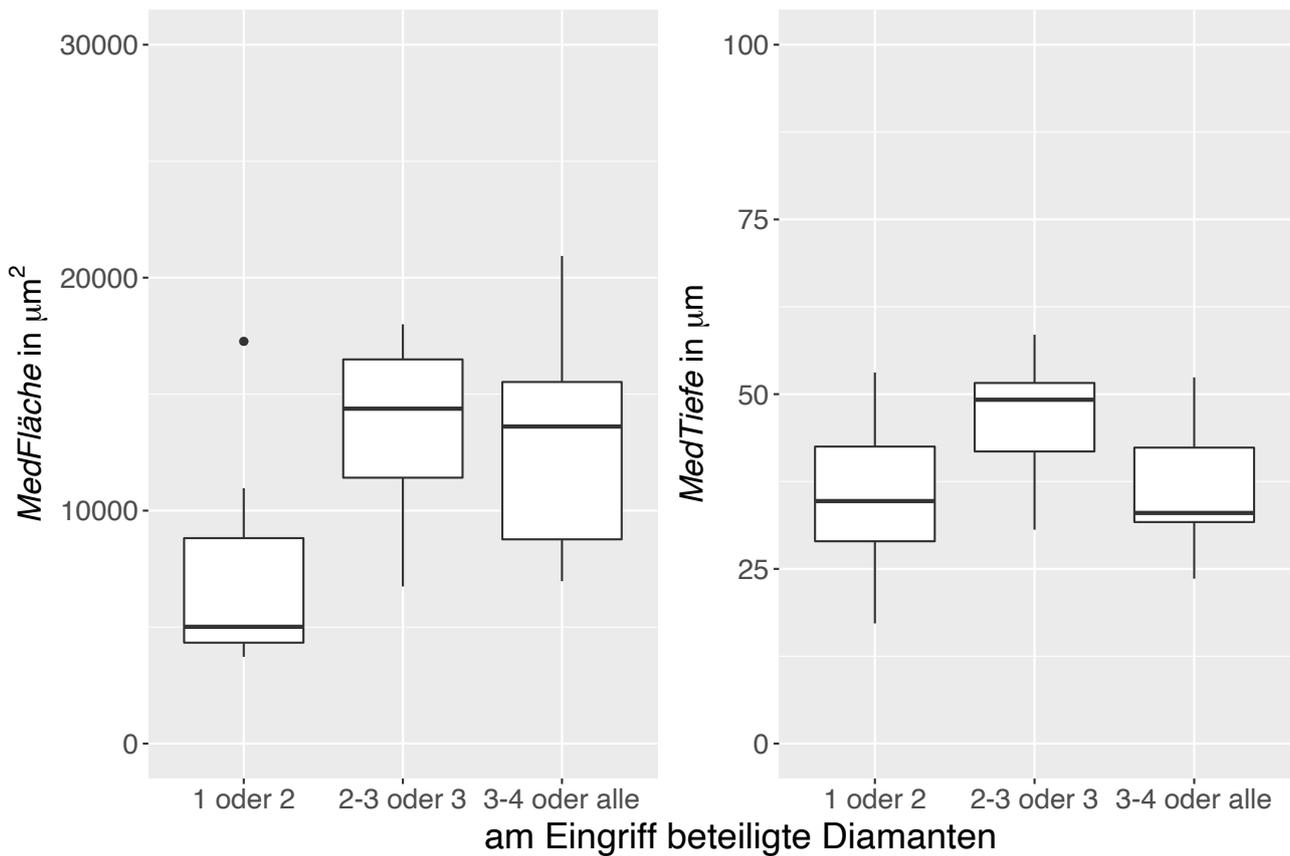


Abbildung 10: Boxplots der *MedFläche* (links) und der *MedTiefe* (rechts), aufgeteilt nach der Anzahl am Eingriff beteiligten Diamanten

zahl etwa 50% der Beobachtungen über den vorgegebenen 50 µm. Der Verlauf entspricht einem umgedrehten "V". So ist hier erkennbar, dass mehr Diamanten zwar zu einer größeren Fläche, jedoch nicht unbedingt zu einer tieferen Ritzung beitragen müssen.

Bei Betrachtung der *MedFläche* und der Versuchsanzahl (Nutzung) des Werkzeugs (Abbildung 11) fällt zunächst auf, dass bei dem zweiten Versuch eine größere *MedFläche* abgetragen wird. Der Median von 14672 µm² (vgl. Tabelle 23) für den zweiten Versuch ist nahezu doppelt so groß wie der beim Ersten mit 7407 µm² und liegt über dem Rand der linken Box. Das Maximum und Minimum wird jedoch bei einem ersten Versuch erreicht, wobei auch eine rechtsschiefe (1. Versuch) und eine linksschiefe Verteilung (2. Versuch) vorliegt. Mit einer Varianz von 45052810 ist beim ersten Versuch auch eine deutlich höhere Streuung erkennbar, als beim Zweiten mit einer Varianz von 19408084. Auch bei der *MedTiefe* liegt der Median der zweiten Ritzung leicht über dem der ersten. Die Boxen sind jedoch auf ähnlicher Höhe. Das Minimum wird bei der ersten Verwendung eines Werkzeugs erreicht. Diese Unterschiede zwischen den Versuchen könnten auf den „Sharpening effect“ des Werkzeugs (vgl. Malevich et al., 2021, S. 1-2) zurückzuführen sein. Demnach können bei der Nutzung der Diamanten durch die Schärfung bei erster Nutzung

neue Kanten entstehen, welche später zu einer besseren Leistung beitragen.

Insgesamt fällt auf, dass sich die *MedFläche* und *MedTiefe* trotz ihrer Korrelation in den verschiedenen Variablen teilweise deutlich unterscheiden. Weiterhin wurde deutlich, dass tendenziell kleinere *MedTiefen* gemessen wurden als die vorgegebenen 50 μm , sodass dies bei der noch folgenden Modellierung genauer betrachtet werden sollte.

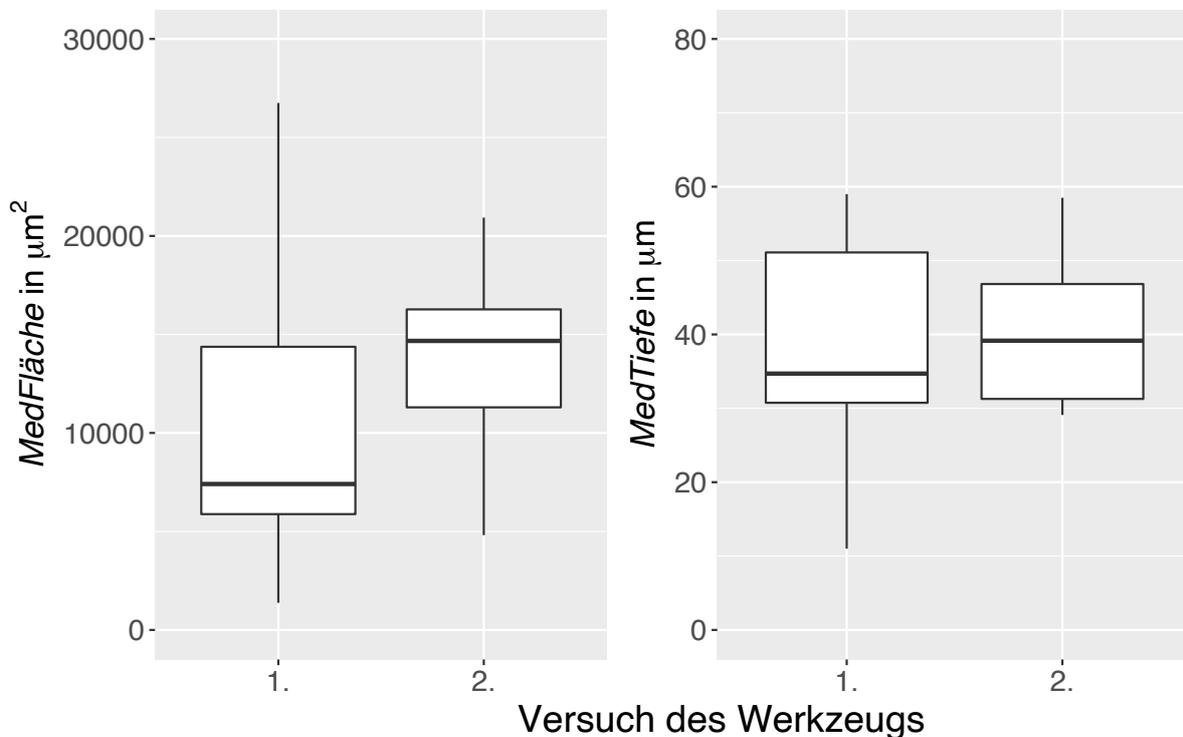


Abbildung 11: Boxplots der *MedFläche* (links) und der *MedTiefe* (rechts), aufgeteilt nach der Nutzung

4.1.2 Die Kräftemessungen

Nach der deskriptiven Analyse der Flächen und Tiefen der Ritze, werden nun die dabei entstandenen Kräfte in Newton (kurz N) visualisiert und deskriptiv analysiert. Dabei wird für die Konsistenz ebenfalls der Median der Kräfte genutzt, welcher im Folgenden mit *MedKraftX*, *MedKraftY* bzw. *MedKraftZ* bezeichnet wird.

In Abbildung [12](#) ist eine leicht linksschiefe Verteilung mit einem Median von -206.60 N für die *MedKraftX* erkennbar. Der Boxplot des Medians der Querkraft bildet eine um ca. 0 symmetrische Verteilung ab. Die Verteilung der *MedKraftZ* ist hingegen rechtsschief mit einem Median von 45.11 N und einem maximalen Ausreißer von 120.31 Newton.

Auch für die Kräftemessungen sind bei Betrachtung der verwendeten Lochplatten Unterschiede erkennbar (vgl. Abbildung [13](#)). So ist vor allem bei Lochplatte 1 und 10 für die *MedKraftX* eine erhöhte Streuung erkennbar (vgl. Tabelle [25](#), Anhang). Dieser große Interquartilsabstand

bei Verwendung der Lochplatte 10 ist ebenfalls bei der *MedKraftY* und *MedKraftZ* erkennbar. Weiterhin wurde bei der Messung der *MedKraftX* mit der Lochplatte 8 die größte (-460.50 N), sowie kleinste (-41.20 N) Normalkraft gemessen. Die größte *MedKraftY* von -26.25 N wird mit der Lochplatte 10 erreicht. Die Werte für Lochplatte 9 und vor allem Lochplatte 8 bewegen sich in einem eher kleinen Bereich. Die Mediane der *MedKraftZ* liegen nur zwischen 41.82 und 46.17 Newton. Das Maximum, sowie Minimum wird mit Lochplatte 1 erreicht. Auch hier wird deutlich, dass sich die Verläufe stark unterscheiden. Werden diese Boxplots erneut nach den beiden Betonblöcken aufgeteilt (vgl. Abb. [29](#) und [30](#), Anhang), so sind für Block A ähnliche Verläufe erkennbar. Auffällig ist beispielsweise die extrem große Box für die *MedKraft* bei Lochplatte 10, die auf eine hohe Varianz hinweist. Da auf Block B nur ein einziger Versuch mit Lochplatte 9 und 10 durchgeführt wurde, ist kein Vergleich möglich.

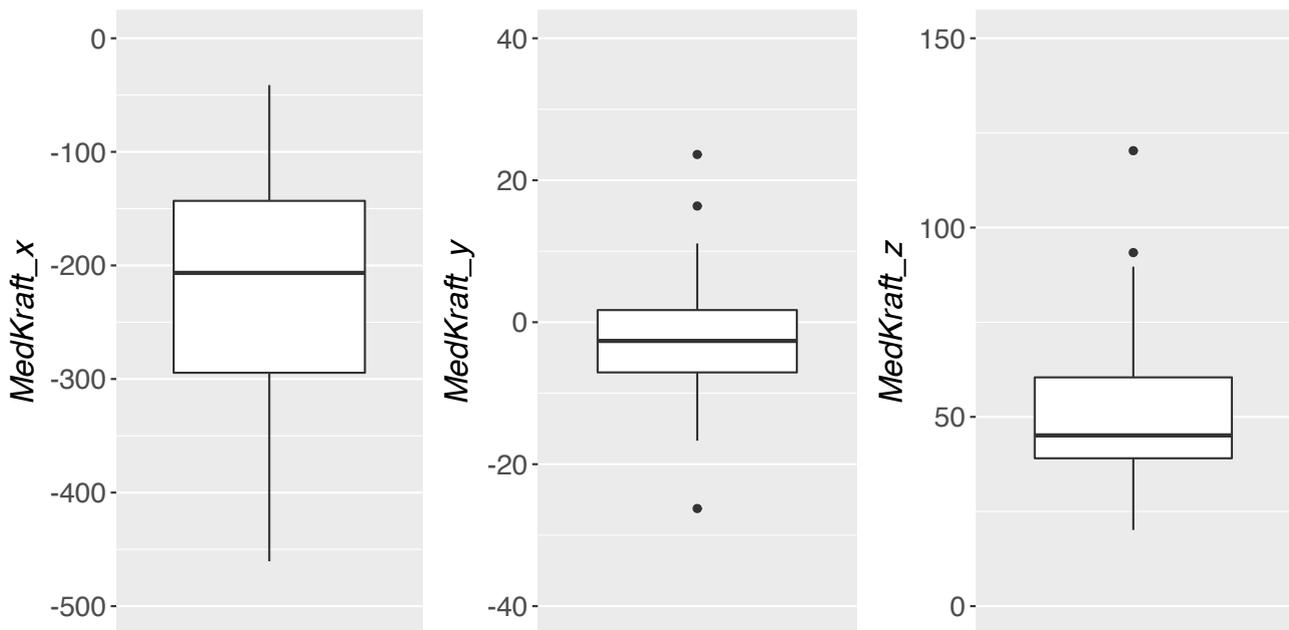


Abbildung 12: Boxplots der *MedKraftX*, der *MedKraftY* und der *MedKraftZ*

Bei Betrachtung der *MedKraftX* in Abbildung [14](#) fällt auf, dass sich die Boxplots für Betonblock A und B nur wenig unterscheiden. Lediglich die Varianz bei der Ritzung auf Block A ist wegen des größeren Interquartilsabstandes höher (vgl. auch Tabelle [25](#), Anhang). Die *MedKraftY* fällt auf Block A mit einem Median von -4.17 N höher aus als die des Blocks B mit dem Median von 1.96 N. Der extreme Ausreißer von -26.25 wurde auf Block A erreicht. Bei der *MedKraftZ* wurde ebenfalls das Maximum von 120.31 N auf dem Block A erreicht und das Minimum von 20.12 N auf Block B. Die Mediane liegen nah beieinander, doch der Interquartilsabstand des Boxplots für Block B entspricht etwa einem Drittel des Blocks A. Auch die Whisker sind dabei kaum zu

erkennen. Somit scheint sich der Betonblock auch auf die Kräftermessungen auszuwirken.

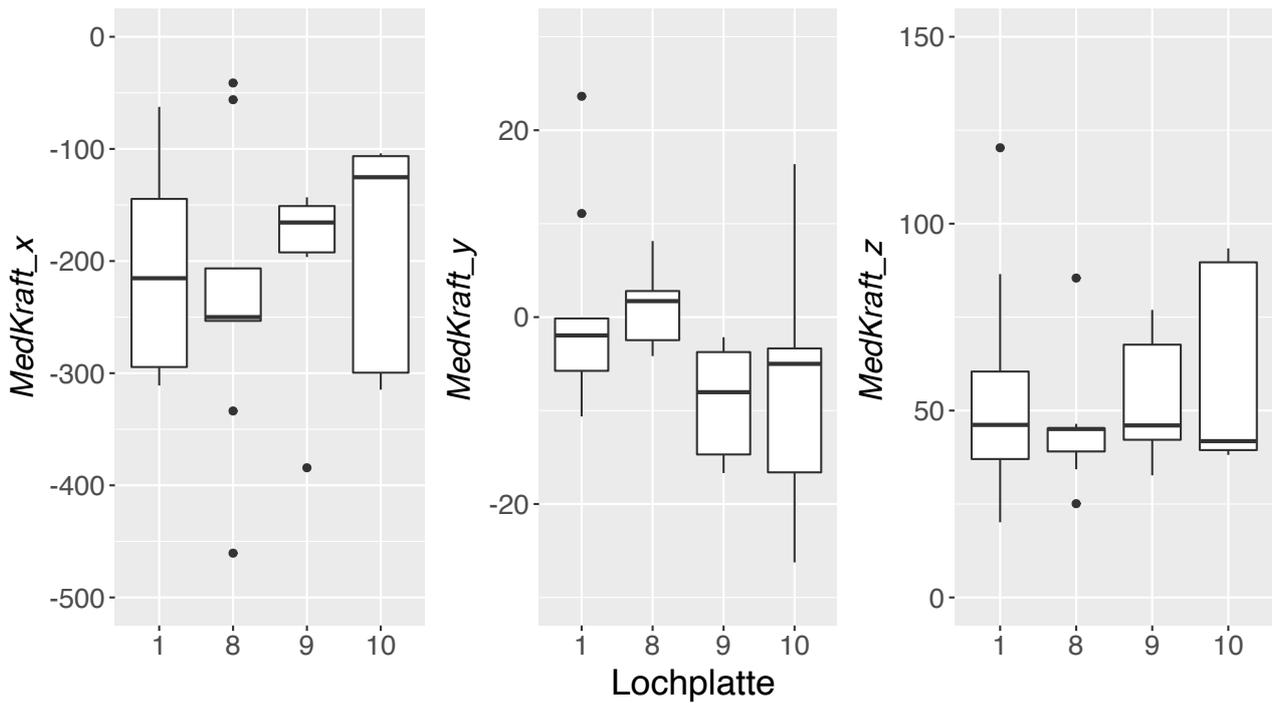


Abbildung 13: Boxplots der *MedKraftX* (links), der *MedKraftY* (mittig) und der *MedKraftZ* (rechts), aufgeteilt nach genutzter Lochplatte

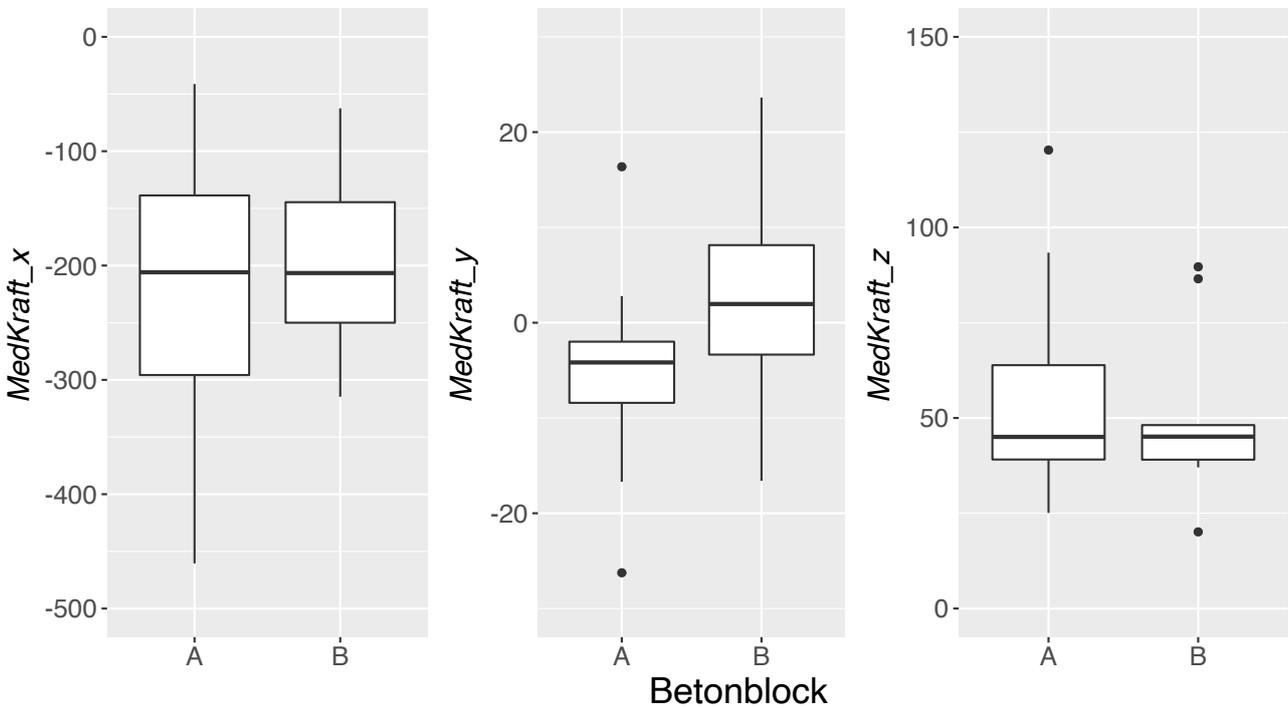


Abbildung 14: Boxplots der *MedKraftX* (links), der *MedKraftY* (mittig) und der *MedKraftZ* (rechts), aufgeteilt nach benutztem Betonblock

Je nach Anzahl beteiligter Diamanten treten ebenfalls Unterschiede bei den Kräften auf (vgl. Abbildung [15](#)). Für die *MedKraftX* bewegen sich die Mediane zwischen -165.26 und -252.30

N. Die minimale *MedKraftX* von -41.20 N, sowie eine maximale Kraft von -460.50 N wird bei Nutzung von ein oder zwei beteiligten Diamanten erreicht. Dabei ist ebenfalls die größte Varianz von 20298.45 erkennbar (vgl. Tabelle [25](#)). Für die *MedKraftY* wird die maximale Kraft von -26.25 N ebenfalls beim Einsatz von einem oder zwei Diamanten erreicht. Dabei handelt es sich um einen extremen Ausreißer, da die Breite des Boxplots sehr gering ist und die Whisker ebenfalls sehr kurz sind. Die Mediane der drei Boxplots unterscheiden sich jedoch kaum und bewegen sich zwischen -2.00 und -2.91 Newton. Die Verläufe der Boxplots der *MedKraftX* und *MedKraftY* ähneln sich. Zwischen den Boxplots für die *MedKraftZ* sind extremere Unterschiede erkennbar. So wird das Maximum von 93.39 N bei der Beteiligung von drei bis vier oder vier Diamanten erreicht, wobei bei dieser rechtsschiefen Verteilung gleichzeitig die größte Varianz auftritt (vgl. Tabelle [27](#), Anhang). Es erscheint plausibel, dass der Einsatz vieler Diamanten somit für eine höhere Schnittkraft sorgt. Das Minimum von 20.12 N wurde mit zwei bis drei oder drei Diamanten gemessen, wobei die Box des Boxplots einen kleinen Interquartilsabstand, gleichzeitig aber die extremsten Ausreißer besitzt. Bei der Beteiligung von nur ein oder zwei Diamanten, resultiert eine linksschiefe Verteilung.

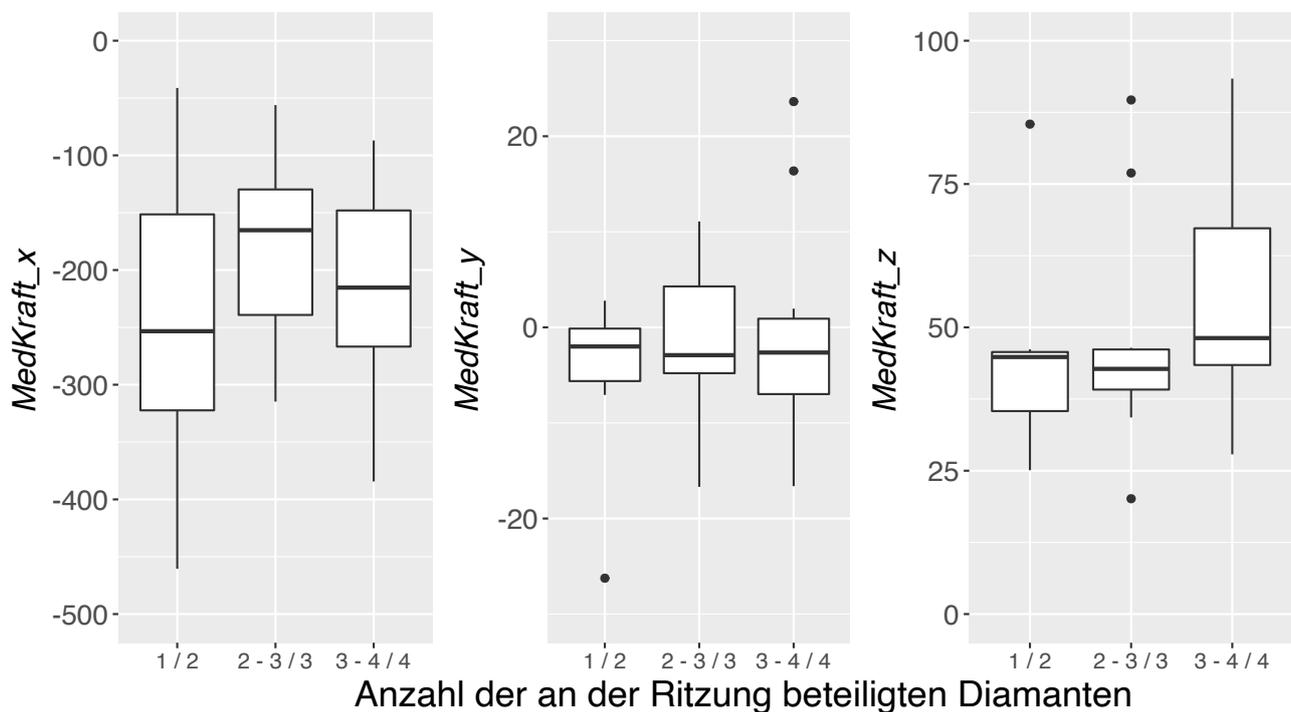


Abbildung 15: Boxplots der *MedKraftX* (links), der *MedKraftY* (mittig) und der *MedKraftZ* (rechts), aufgeteilt nach der Anzahl an der Ritzung beteiligter Diamanten

Bei Aufteilung in die erste und zweite Nutzung (Abbildung [16](#)) der Werkzeuge fällt auf, dass sich die Boxplots jeweils vor allem in ihrer Höhe unterscheiden. So wird eine betragsmäßig höhere *MedKraftX* bei zweiter Verwendung erreicht. Die Boxplots für die mediane Querkraft

verhalten sich um den Ursprung relativ ähnlich und der Median liegt mit -3.760 N und -1.9611 N ebenfalls relativ nah bei 0. Für die *MedKraftZ* sind hingegen größere Unterschiede erkennbar. Zwar sind bei der ersten Nutzung drei extreme Ausreißer vorhanden, jedoch erstreckt sich die sehr breite, rechte Box in Richtung der höheren Kraft. Die Mediane liegen wegen der stark rechtsschiefen Verteilung bei zweiter Nutzung dennoch sehr nah beieinander.

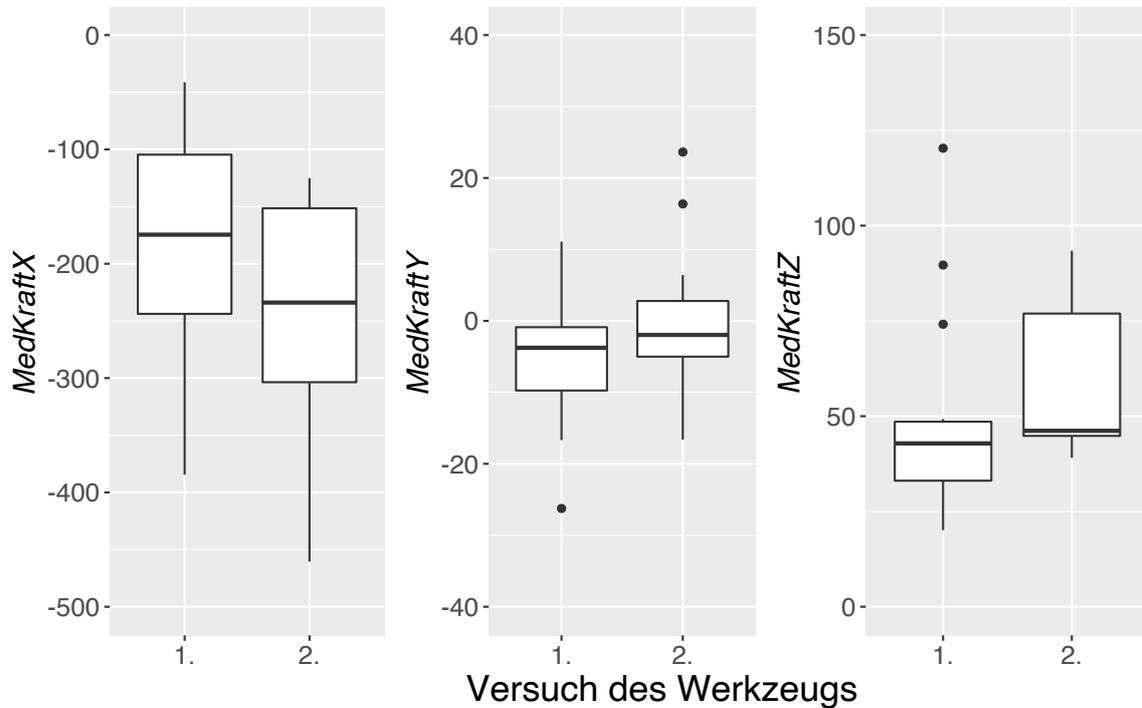


Abbildung 16: Boxplots der *MedKraftX* (links), der *MedKraftY* (mittig) und der *MedKraftZ* (rechts), aufgeteilt nach der Nutzung des Werkzeugs

4.2 Modellierungen der Größen

In diesem Unterkapitel werden Modelle ermittelt, welche die abhängigen Variablen *MedFläche*, *MedTiefe*, *MedKraftX*, *MedKraftY* und die *MedKraftZ* anhand der gegebenen Variablen beschreiben. Dafür werden die in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren genutzt. So werden zunächst volle Modelle ohne Wechselwirkungen aufgestellt und anhand dieser die Modellvoraussetzungen überprüft. Können die Voraussetzungen angenommen werden so werden die Modelle durch Hinzunahme von Wechselwirkungen und Variablenselektion optimiert. Ist dies nicht der Fall, werden robuste Regressionen durchgeführt.

4.2.1 *MedFläche*

Zunächst wird jeweils ein lineares Modell aufgestellt, welches die abhängige Variable anhand der unabhängigen Variablen erklärt. Wechselwirkungen werden in diesem ersten Modell vorerst nicht betrachtet. Das Modell zur Schätzung der *MedFläche* ergibt sich als

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \dots + \hat{\beta}_5 x_{5i}$$

Dabei steht \hat{y}_i für die geschätzte *MedFläche* der i -ten Ritzspur und x_{1i}, \dots, x_{5i} stehen für die Messwerte der i -ten Ritzspur bezüglich der Variablen X_1, \dots, X_5 . Die Schätzungen der Parameter sind in Tabelle 5 angegeben.

Tabelle 5: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedFläche*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p -Wert
-	Achsenabschnitt	6923.462	
X_1	Länge A	-0.007	0.992
X_2	Länge B	-0.430	0.726
X_3	Werkstück (Block B)	1954.156	0.364
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	5679.702	0.031
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	3377.747	0.175
X_5	Nutzung (2. Versuch)	3904.692	0.032

Nach diesen Schätzungen, ist zunächst ein Achsenabschnitt von $6923.462 \mu\text{m}^2$ gegeben. Die *MedFläche* nimmt mit der Länge A bzw. B pro μm leicht ab. Nimmt man Lochplatte 8 als Beispiel, so würde die *MedFläche* um $3500 \cdot 0.007 = 23.692 \mu\text{m}^2$ für Länge A und um $3000 \cdot 0.430 = 1290.054 \mu\text{m}^2$ für Länge B sinken. Verglichen zu Betonblock A, wird nach dieser Schätzung auf Betonblock B eine um $1954.156 \mu\text{m}^2$ größere *MedFläche* erreicht. So bekräftigt diese Schätzung die Tendenz während der deskriptiven Analyse. Dies gilt ebenfalls für die Anzahl der beteiligten

Diamanten. So wird mit zwei bis drei oder drei Diamanten eine um ca. $5600 \mu\text{m}^2$ größere *MedFläche* erreicht als mit nur einem oder zwei Diamanten. Mit drei bis vier oder allen Diamanten wird somit „nur“ eine um ca. $3377 \mu\text{m}^2$ größere Fläche abgetragen als mit einem oder zwei Diamanten. Dieser unerwartete Unterschied könnte jedoch auch damit zusammenhänge, dass nicht für jeder Ritzspur eine eindeutige Anzahl an Diamanten bestimmbar war. Auch die zweite Nutzung eines Werkzeugs vergrößert die *MedFläche* um $3904.692 \mu\text{m}^2$, verglichen zur ersten Nutzung. Dies könnte an der bereits erwähnten Schärfung des Werkzeugs während des ersten Versuchs liegen.

Anhand des QQ-Plots in Abbildung 17 ist erkennbar, dass der Großteil der Residuen sehr nah an der Geraden liegt. Nur zwei bis drei Datenpunkte weichen etwas deutlicher ab. Dies führt jedoch nicht dazu, dass die Normalverteilung hier nicht angenommen werden kann. Der p -Wert von 0.743 des Shapiro-Wilk- Tests bestätigt dies zusätzlich. Anhand des Residualplots (Abbildung 18) sind keine Auffälligkeiten oder Muster beobachtbar. Somit kann von einer Homoskedastizität der Residuen ausgegangen werden und die p -Werte können genutzt werden.

Die p -Werte einer Diamantengruppe und der Werkzeugnutzung sind signifikant. Es ist jedoch eine Adjustierung dieser p -Werte nach Bonferroni nötig. Dabei wird das multiple Signifikanzniveau nach oben abgeschätzt, um für jeden einzelnen Test das Niveau so zu wählen, dass das multiple Signifikanzniveau von α eingehalten wird. Werden k Tests zum Niveau $\frac{\alpha}{k}$ durchgeführt gilt, dass das multiple Niveau höchstens α beträgt (vgl. Benesch, 2012, S. 172-173). Nach dieser Adjustierung, durch die Multiplikation mit der Variablenanzahl sind diese Signifikanzen zum $\alpha = 0.05$ -Niveau nicht mehr vorhanden.

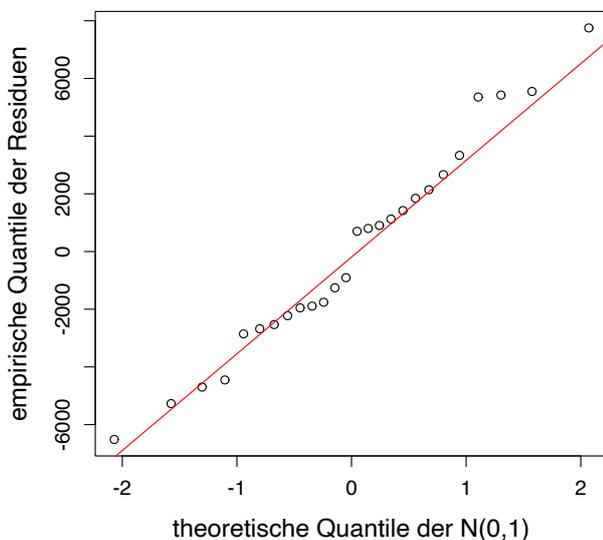


Abbildung 17: QQ-Plot *MedFläche*

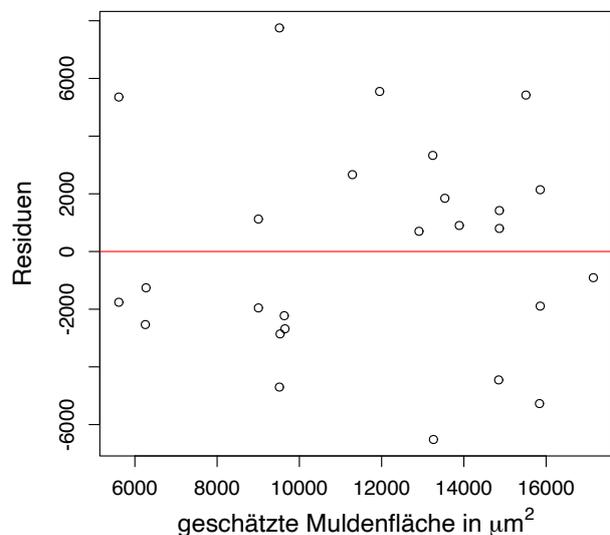


Abbildung 18: Residualplot *MedFläche*

Für das volle Modell ohne Wechselwirkungen hat das adjustierte Bestimmtheitsmaß einen Wert von $\bar{R}^2 = 0.320$. Um dieses Modell zu verbessern, werden nun ebenfalls Wechselwirkungen hinzugezogen und es wird eine Variablenselektion durchgeführt. Für die Suche nach dem besten Modell werden alle möglichen Modelle berechnet und jenes mit dem größten betragsmäßigen \bar{R}^2 genutzt und genauer analysiert. Wechselwirkungen werden dabei nur in Kombination mit den zugehörigen Haupteffekten zugelassen. In Tabelle 6 wurden alle möglichen Koeffizienten aufgeführt. Wurden diese nicht in das Modell aufgenommen, so sind diese durchgestrichen. Zunächst liegt ein geschätzter Achsenabschnitt von $\hat{\beta}_0 = 10741.072 \mu\text{m}^2$ vor. Länge A und B sind negativ, sodass es pro μm der Länge A bzw. B zu einer Reduktion von etwa drei bzw. zwei μm^2 Fläche kommt. Länge B wird zusätzlich in der Interaktion mit dem Werkstück aufgeführt. So verringert sich für jeden μm der Länge B bei einer Ritzung auf Block B die *MedFläche* um $3.962 \mu\text{m}^2$, verglichen zu Betonblock A. Entspricht Länge B, wie bei Lochplatte 8 einer Länge von $3000 \mu\text{m}$, so käme es verglichen zu Block A zu einer Verringerung von $9784.275 \mu\text{m}^2$. Der geschätzte Koeffizient von $\beta_3 = 11610.208$ für das Werkstück sagt aus, dass auf Block B ca. $11610 \mu\text{m}^2$ mehr *MedFläche* erreicht wird als auf Block A. Zu beachten ist hier jedoch, dass dieser Effekt auch durch die erwähnte Interaktion beeinflusst wird, sodass der Einfluss sinkt. Ähnlich wie im ersten Modell wird mit zwei bis drei oder drei Diamanten mehr Fläche abgetragen als mit einem oder zwei. Dasselbe gilt für drei bis vier oder alle Diamanten, wobei die Schätzung mit $\hat{\beta}_4 = 4914.780 \mu\text{m}^2$ geringer ausfällt. Die Schätzung des Koeffizienten der Nutzung des Werkzeuges ist ebenfalls vergleichbar mit der im ersten Modell.

Tabelle 6: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen des besten Modells mit WW - *MedFläche*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p-Wert
-	Achsenabschnitt	10741.072	-
X_1	Länge A	-3.262	0.085
X_2	Länge B	-2.483	0.011
X_3	Werkstück (Block B)	11610.208	0.089
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	6579.547	0.011
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	4914.780	0.052
X_5	Nutzung (2. Versuch)	3937.640	0.023
X_6	Länge A : Länge B	1.422e-03	0.125
	Länge A : Werkstück (Block B)	-	-
	Länge A : Diamanten (2-3 oder 3)	-	-
	Länge A : Diamanten (3-4 oder alle)	-	-
	Länge B : Werkstück (Block B)	-	-
	Länge B : Diamanten (2-3 oder 3)	-	-
	Länge B : Diamanten (3-4 oder alle)	-	-
X_7	Länge B : Werkstück (Block B)	-3.962	0.131

Da eine Normalverteilung vorliegt, können die p -Werte des t -Tests genutzt werden, um mögliche Signifikanzen aufzudecken. Demnach beeinflussen sowohl die Länge B, als auch die Anzahl der Diamanten (2-3 oder 3) die *MedTiefe* signifikant auf einem 5%-Signifikanzniveau. Nach Anwendung dieser Adjustierung mit $\alpha = 0.05$ auf die p -Werte durch Multiplikation mit der Anzahl der durchgeführten Tests, ist keine Signifikanz vorhanden.

Mit diesem Modell resultiert ein adjustiertes Bestimmtheitsmaß von $\bar{R}^2 = 0.415$. Somit hat die Hinzunahme der Interaktionen, bzw. eine Selektion der Variablen zu einer Verbesserung und mehr Varianzerklärung des Modells beigetragen.

4.2.2 *MedTiefe*

Für die *MedTiefe* wurden die Koeffizienten in Tabelle 7 geschätzt. So ist demnach ein Achsenabschnitt von 33.975 μm gegeben und alle Haupteffekte wurden beibehalten. Weiterhin nimmt die Tiefe mit der Länge A zu. So vergrößert sich bei Nutzung der Lochplatte 8 die *MedTiefe* zum Beispiel um $3000 \cdot 0.001 = 3 \mu\text{m}$. Nach der Schätzung des Koeffizienten für Länge B nimmt die Tiefe mit dieser Länge jedoch ab. Im Vergleich zu Werkstück A wird auf dem Block B eine um $\hat{\beta}_3 = 8.416 \mu\text{m}$ tiefere *MedTiefe* erreicht. Diese Tendenz konnte schon bei der deskriptiven Analyse beobachtet werden (vgl. Abbildung 9). Weiterhin wird nach diesem Modell eine um 7.052 μm tiefere *MedTiefe* erreicht, falls zwei bis drei oder drei statt einem oder zwei Diamanten im Einsatz waren. Auch dies war bereits gut in Abbildung 10 erkennbar. Waren drei bis vier oder alle vier Diamanten Einsatz, so sinkt die *MedTiefe* verglichen zu einem oder zwei Diamanten um fast 3 μm . Bei der zweiten Nutzung eines Werkzeugs nimmt die *MedTiefe* um $\hat{\beta}_5 = 1.374 \mu\text{m}$ zu. Auch dies könnte an der Schärfung des Werkzeugs bei der ersten Ritzung liegen.

Tabelle 7: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedTiefe*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p -Wert
-	Achsenabschnitt	33.975	
X_1	Länge A	0.001	0.609
X_2	Länge B	-0.001	0.832
X_3	Werkstück (Block B)	8.416	0.116
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	7.054	0.249
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	-2.885	0.626
X_5	Nutzung (2. Versuch)	1.374	0.741

Anhand des QQ-Plots in Abbildung 19 ist erkennbar, dass der Großteil der Residuen sehr nah an der Geraden liegt. Erneut weichen zwei Punkte deutlicher ab. Der p -Wert von $p = 0.939$ des Shapiro-Wilk Tests bestätigt jedoch deutlich, dass diese Abweichungen nicht zu einer Ableh-

nung der Normalverteilungsannahme führen sollten. Anhand des Residualplots (vgl. Abbildung 20) sind ebenfalls keine deutlichen Auffälligkeiten oder Muster beobachtbar. Somit kann auch hier von einer Homoskedastizität der Residuen ausgegangen werden. Nach der Annahme der Voraussetzungen können nun die p -Werte der t -Tests genutzt werden. Anhand der p -Werte in Tabelle 7 lassen sich jedoch keine Signifikanzen zum 5%-Signifikanzniveau feststellen.

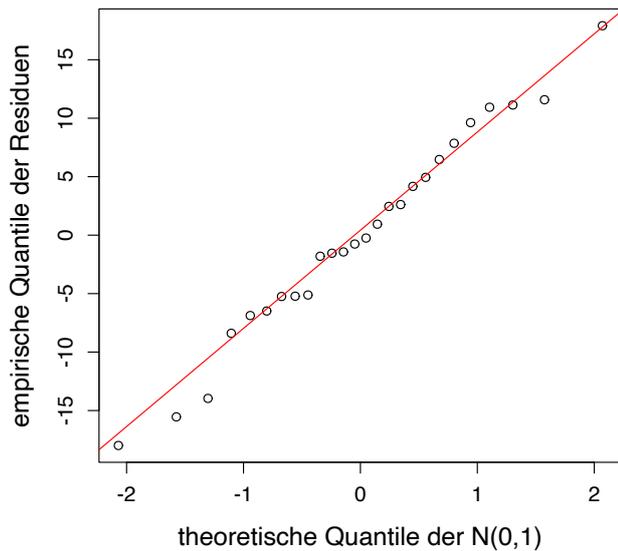


Abbildung 19: QQ-Plot - *MedTiefe*

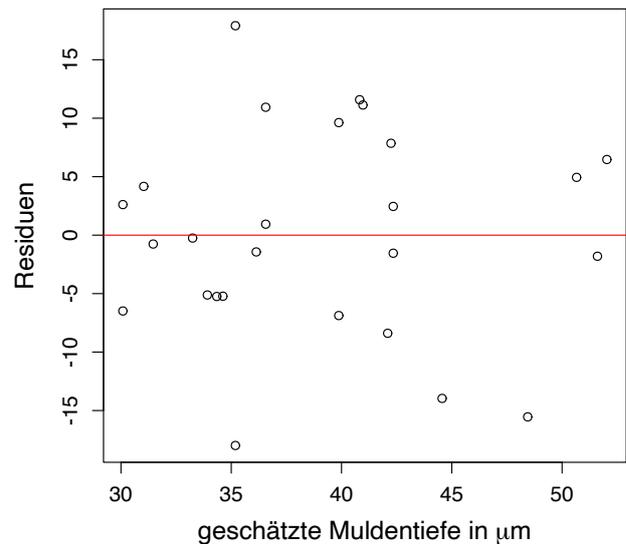


Abbildung 20: Residualplot - *MedTiefe*

Mit dem zuvor beschriebenen Modell wird ein \bar{R}^2 von $\bar{R}^2 = 0.147$ erreicht. Um dies zu verbessern, werden nun erneut Wechselwirkungen betrachtet und alle möglichen Modelle werden hinsichtlich ihrer Güte anhand des \bar{R}^2 verglichen. Für das „beste“ Modell der *MedTiefe* resultieren die Schätzungen der Koeffizienten aus Tabelle 8.

Tabelle 8: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen des besten Modells mit WW - *MedTiefe*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	<i>p</i> -Wert
-	Achsenabschnitt	50.214	-
X_1	Länge A	-0.006	0.287
X_2	Länge B	-0.011	0.004
X_3	Werkstück (Block B)	8.995	0.047
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	9.725	0.404
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	12.916	0.243
	Nutzung (2. Versuch)	-	-
X_5	Länge A : Länge B	4.180e-06	0.055
	Länge A : Werkstück (Block 3)	-	-
X_6	Länge A : Diamanten (2-3 oder 3)	-7.370e-04	0.852
X_6	Länge A : Diamanten (3-4 oder alle)	-0.005	0.193
	Länge B : Werkstück (Block 3)	-	-
	Länge B : Diamanten (2-3 oder 3)	-	-
	Länge B : Diamanten (3-4 oder alle)	-	-
	Länge B : Werkstück (Block B)	-	-

Demnach ist der Achsenabschnitt mit $\hat{\beta}_0 = 50.214$ nahezu doppelt so hoch wie im letzten Modell. Die Schätzung des Koeffizienten für Länge A entspricht ca. der Hälfte des Koeffizienten für Länge B. So käme es bei Verwendung von Lochplatte 8 zu einer Verringerung der *MedTiefe* um $0.006 \cdot 3000 = 18 \mu\text{m}$ für Länge A und um $0.011 \cdot 3500 = 38.5 \mu\text{m}$ für Länge B. Die Variable der Länge A findet sich allerdings auch in weiteren Interaktionen wieder. So wird mit der Multiplikation der Länge A und B Tiefe dazugewonnen. Wird erneut Lochplatte 8 betrachtet, so käme es zu einer Erhöhung der *MedTiefe* um $4.759\text{e-}06 = 43.890 \mu\text{m}$. Verglichen zum Einsatz von einem oder zwei Diamanten, kommt es mit zwei bis drei oder drei Diamanten pro μm von Länge A zu einer Abnahme der *MedTiefe*. Bei Verwendung von Lochplatte 8 entspräche dies einer Abnahme von $7.370\text{e-}04 \cdot 3000 = 2.211 \mu\text{m}$. Ähnliches gilt für die Variable der meisten Diamanten. Im Vergleich nimmt die Tiefe bei Verwendung von Lochplatte 8 um $0.005 \cdot 3000 = 15 \mu\text{m}$ ab.

Bei Betrachtung des *p*-Wertes der Variable X_2 fällt auf, dass dieser auch nach der Adjustierung $0.004 \cdot 8 = 0.032 < 0.05$ ist. Demnach wirkt sich die Länge B signifikant auf die *MedTiefe* aus. Auch der Effekt des Betonblocks wäre ohne eine Adjustierung des *p*-Wertes signifikant.

Mit diesem Modell wird ein adjustiertes Bestimmtheitsmaß von $\bar{R}^2 = 0.315$ erreicht. Somit konnte auch dieses Modell in seiner Güte verbessert werden.

Für die Tiefenmessungen wurde bereits bei der deskriptiven Analyse deutlich, dass die vorgegebene Tiefe von $50 \mu\text{m}$ oft unterschritten wurde. Deshalb wird für das folgende logistische Modell das Maximum der Tiefe, die *MaxTiefe* genutzt und modelliert. So wird nun die Modellgleichung

$$\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5}, \quad \pi_i = \frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)}$$

betrachtet, wobei $x_{i0} = 1$ ist und π_i die Wahrscheinlichkeit angibt, dass für die i -te Ritzspur eine *MaxTiefe* von mindestens 50 μm vorliegt.

Tabelle 9: Schätzer $\hat{\beta}$ und Odds Ratio des vollen logistischen Modells - *MaxTiefe*

Bezeichnung	Variable	ML-Schätzung $\hat{\beta}$	Odds Ratio	p -Wert
$X^{(0)}$	Achsenabschnitt	-1.152	-	-
$X^{(1)}$	Länge A	3.395e-05	1.000	0.928
$X^{(2)}$	Länge B	8.371e-05	1.000	0.896
$X^{(3)}$	Werkstück - Block B	0.940	2.559	0.417
$X^{(4)}$	Diamanten - 2-3 oder 3	1.890	6.619	0.152
$X^{(4)}$	Diamanten 3-4 oder 4	0.624	1.867	0.614
$X^{(5)}$	Nutzung - 2. Versuch	-0.177	0.838	0.846

Mithilfe der Odds Ratios lassen sich die Schätzungen (vgl. Tabelle 9) für das logistische Modell der *MaxTiefe* interpretieren. Für diese Interpretation werden die momentan nicht betrachteten Variablen als konstant angesehen. Da das Odds-Ratio für Länge A und B einen Wert von 1 hat, sind keine weiteren Interpretationen nötig. Wurde die Ritzung jedoch auf Block B durchgeführt, so vergrößert sich die „Chance“ für eine *MaxTiefe* von mindestens 50 μm um den Faktor 2.559, verglichen zur Ritzung auf Block B. Eine Vergrößerung der Chance um die Faktoren 6.619 bzw. 1.867 ist ebenfalls erkennbar, falls mit zwei bis drei oder drei Diamanten bzw. mit drei bis vier oder allen Diamanten geritzt wurde, verglichen zu einer Ritzung mit einem oder zwei Diamanten. Die Chance einer tieferen *MaxTiefe* als 50 μm ist jedoch um 0.838 geringer, falls das Werkzeug zum zweiten Mal genutzt wird. Nach diesem Modell sind es vor allem der Betonblock und die Anzahl der Diamanten die die Chance der maximalen Tiefe von mindestens 50 μm vergrößern. Keiner der p -Werte deutet auf eine Signifikanz hin.

Mit diesem Modell wird ein AIC von $AIC = 44.889$ erreicht. Auch dieses logistische Modell kann mithilfe von Variablenselektion optimiert werden. Wechselwirkungen werden wegen der Kompliziertheit eines solchen Modells jedoch nicht betrachtet. Damit resultieren die Schätzungen in Tabelle 10.

Tabelle 10: ML-Schätzer $\hat{\beta}$ und Odds Ratio des logistischen Modells nach Selektion - *MaxTiefe*

Bezeichnung	Variable	ML-Schätzung $\hat{\beta}$	Odds Ratio	p -Wert
X_0	Achsenabschnitt	-0.916	-	-
X_1	Länge A	-	-	-
X_2	Länge B	-	-	-
X_3	Werkstück - Block B	-	-	-
X_4	Diamanten - 2-3 oder 3	2.303	10.000	0.045
X_4	Diamanten 3-4 oder 4	1.098	3.000	0.287
X_5	Nutzung - 2. Versuch	-	-	-

Somit wurde nur die Variable der Diamanten, die am Eingriff beteiligt waren in das Modell aufgenommen. Nach deren Koeffizienten-Schätzungen, ist die Chance eine *MaxTiefe* von mindestens 50 μm zu erreichen zehn mal höher wenn zwei bis drei oder drei Diamanten an der Ritzung beteiligt sind, verglichen zu einem oder zwei Diamanten. Die Chance mit drei bis vier oder allen vier Diamanten ist nur etwa drei mal so hoch.

Für dieses Modell gilt, dass $AIC = 39.542$, sodass es zu einer leichten Verbesserung zum vollen Modell kommt. Auffällig ist jedoch, dass wegen des AIC s, welches eine hohe Variablenanzahl bestraft das Modell deutlich kleiner geworden ist.

4.2.3 *MedKraftX*

Neben den Flächen und Tiefen, werden im Folgenden auch die Kräfte modelliert. Dafür wird bei negativen Kräften der Betrag der Kräfte genutzt. Stellt man ein Modell für die betragsmäßige *MedKraftX*, also die mediane Normalkraft auf, so resultieren die folgenden Schätzungen

Tabelle 11: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedKraftX*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$
-	Achsenabschnitt	204.653
X_1	Länge A	0.006
X_2	Länge B	-0.003
X_3	Werkstück (Block B)	14.353
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	-84.018
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	-34.364
X_5	Nutzung (2. Versuch)	67.945

Bei Betrachtung des QQ-Plots in Abbildung [21](#) fällt jedoch auf, dass in den Ecken der Grafik deutliche Abweichungen vorliegen. Auch in der Nähe des Ursprungs sind Schwankungen erkennbar. Wendet man daraufhin den Shapiro-Wilk Test an, so ergibt sich ein p -Wert von $p = 0.303$. Dieser Wert lehnt die Normalverteilung der Residuen auf dem 5%-Niveau nicht ab. Trotzdem bestätigt dieser- vor allem für die kleine Beobachtungszahl niedrige p -Wert die Tendenz, dass nicht deutlich von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann und Aus-

reißer die Schätzungen beeinflussen könnten. Unter diesen Umständen können die p -Werte der Regression nicht interpretiert werden. Anhand des Residualplots sind jedoch keine auffälligen Muster erkennbar, sodass nichts gegen die Annahme der Homoskedastizität spricht.

Die Schätzungen in Tabelle [11](#) berücksichtigen dies nicht. Deshalb werden diese Koeffizienten nun erneut mittels einer robusten Regression geschätzt.

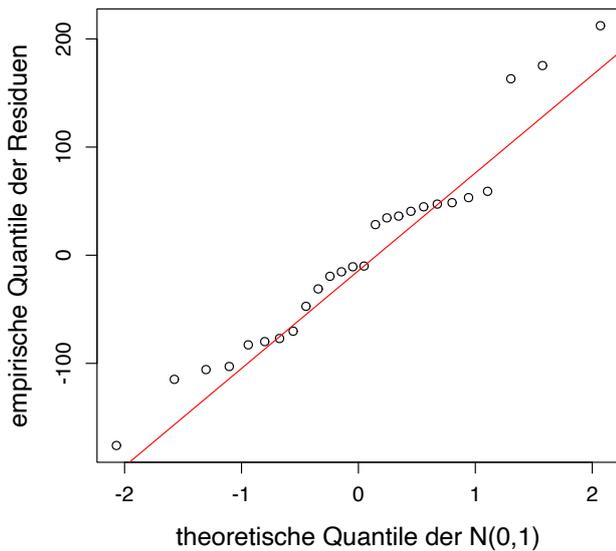


Abbildung 21: QQ-Plot - *MedKraftX*

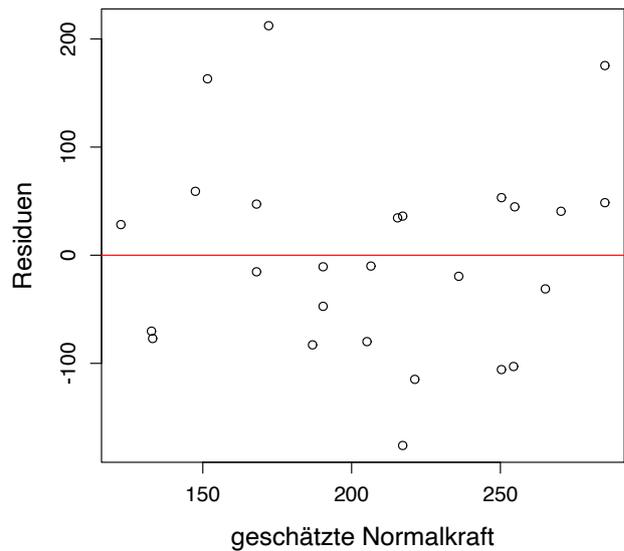


Abbildung 22: Residualplot - *MedKraftX*

Die robuste Regression wird mithilfe des R-Pakets `robustbase` ([Maechler et al., 2022](#)) und der Funktion `lmrob()` durchgeführt. Damit resultieren die folgenden Schätzer in Tabelle [12](#). Verglichen zu den Schätzungen in Tabelle [11](#) fällt zunächst auf, dass der Achsenabschnitt gesunken ist und das geschätzte $\hat{\beta}_2$ nun positiv ist. Auch $\hat{\beta}_4$ und $\hat{\beta}_5$ sind deutlicher gesunken bzw. gestiegen. Wegen dieser Änderungen der Schätzungen, ist davon auszugehen, dass Ausreißer einen mindestens leichten Einfluss auf die Schätzungen in Tabelle [11](#) haben.

Tabelle 12: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedKraftX*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p -Wert
-	Achsenabschnitt	178.154	
X_1	Länge A	0.007	0.599
X_2	Länge B	0.007	0.868
X_3	Werkstück (Block B)	12.045	0.816
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	-87.245	0.080
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	-45.611	0.395
X_5	Nutzung (2. Versuch)	74.001	0.076

So nimmt nach diesen Schätzungen die *MedKraftX* mit der Länge A bzw. B um 0.007 pro μm zu. Werden die Maße von Lochplatte Nr. 8 eingesetzt, so entspricht dies einem Kräftezuwachs von $0.007 \cdot 3500 = 24.5 \text{ N}$ bzw. $0.007 \cdot 3000 = 21 \text{ N}$. So steigt auch die *MedKraftX* um ca. 12 Newton, falls auf dem Block B geritzt wurde, verglichen zu einer Ritzung auf Block A. Wird mit zwei bis drei oder 3 Diamanten geritzt, verringert sich die *MedKraftX* um ca. 87 N im Gegensatz zu einer Ritzung mit einem oder zwei Diamanten. Eine etwas geringere Verringerung von etwa 45 Newton erfolgt bei einer Ritzung mit drei bis vier oder allen vier Diamanten. Bei zweiter Verwendung eines Werkzeugs kommt es nach $\hat{\beta}_5$ zu einer um etwa 74 Newton größeren *MedKraftX*, verglichen zur ersten Anwendung. Durch dieses Modell wird ein adjustiertes Bestimmtheitsmaß von nur $\hat{R}^2 = 0.0125$ erreicht. Jedoch kann auch dieses, wie gewohnt mittels einer Variablenselektion optimiert werden, um das bestmögliche adjustierte Bestimmtheitsmaß zu erhalten. Nach der Bestimmung aller möglichen Modelle, führen die Schätzungen in Tabelle [13](#) zu dem Modell mit dem betragsmäßig größtem \bar{R}^2 .

Demnach wurden Länge A und das Werkstück aus dem Modell entfernt. Die Schätzung der Länge B hat sich, verglichen zum letzten Modell etwa verdoppelt. So wird deshalb mit Lochplatte 8 die *MedKraftX* um $0.017 \cdot 0.017 = 51 \text{ N}$ vergrößert. Die Schätzungen für die Diamantenzahlen $\hat{\beta}_2$ ist nahezu gleich geblieben. Auch die Schätzung für $\hat{\beta}_3$ ist ähnlich geblieben, sodass eine um ca. 80 Newton höhere *MedKraftX* gemessen wird, falls das Werkzeug erneut genutzt wird. Diese Variable wird nur vor einer nötigen Adjustierung des p -Wertes als signifikant eingestuft.

Schließlich wird mit diesem Modell ein \bar{R}^2 von $\bar{R}^2 = 0.161$, was hinsichtlich des ursprünglich sehr kleinen \hat{R}^2 einer deutlichen Verbesserung der Modellgüte entspricht.

Tabelle 13: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im optimierten Modell - *MedKraftX*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p -Wert
-	Achsenabschnitt	170.074	-
	Länge A	-	-
X_1	Länge B	0.017	0.679
	Werkstück (Block B)	-	-
X_2	Diamanten (2-3 oder 3)	-87.42	0.085
X_2	Diamanten (3-4 oder alle)	-52.460	0.382
X_3	Nutzung (2. Versuch)	80.566	0.036

4.2.4 *MedKraftY*

Auch für die betragsmäßige Querkraft F_y wird zunächst das volle Modell bestimmt. Die Schätzungen dazu sind in Tabelle [14](#) angegeben.

Tabelle 14: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$
-	Achsenabschnitt	19.215
X_1	Länge A	0.12e-03
X_2	Länge B	-0.005
X_3	Werkstück (Block B)	4.431
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	-3.298
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	0.199
X_5	Nutzung (2. Nutzung)	-1.032

Jedoch sind in dem QQ-Plot in Abbildung 23 erneut zwei Ausreißer erkennbar, welche deutlich abweichen, sodass p -Werte nicht genutzt werden können und die Schätzungen beeinflusst werden. Der Residualplot (vgl. Abbildung 24) ist hingegen unauffällig. Der p -Wert des Shapiro-Wilk Tests beträgt $p = 0.325$, sodass er für die vorliegende Anzahl an Beobachtungen relativ niedrig erscheint. Somit wird erneut eine robuste Regression durchgeführt, um einen möglichen Effekt dessen auszuschließen.

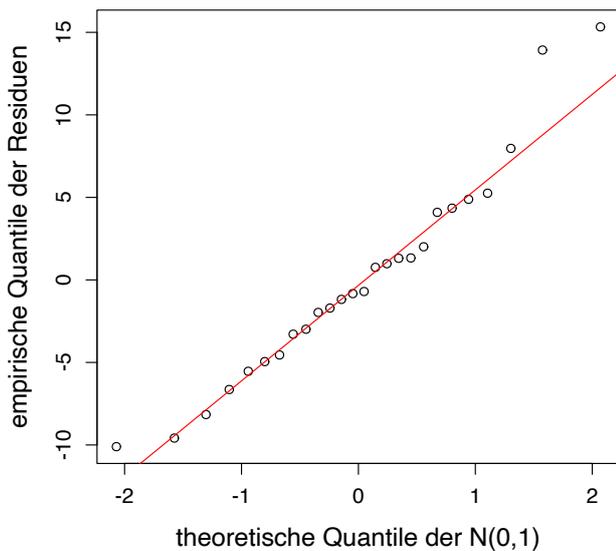


Abbildung 23: QQ-Plot - *MedKraftY*

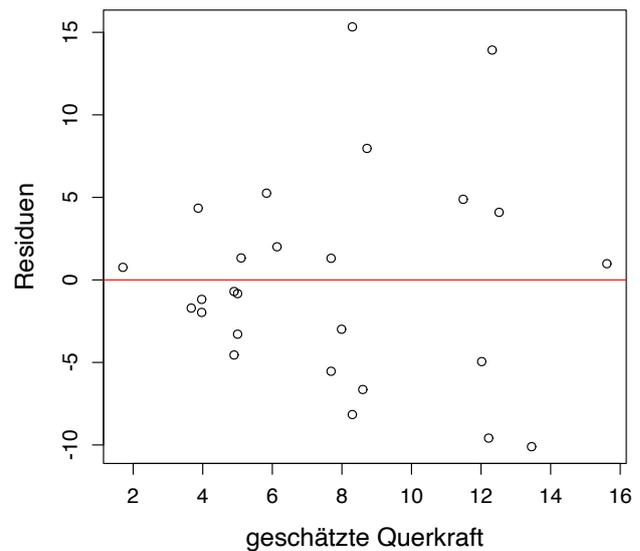


Abbildung 24: Residualplot - *MedKraftY*

Die nun robusten Schätzungen in Tabelle 15 unterscheiden sich zwar nur wenig, jedoch sind vor allem bei den Schätzungen für die Anzahl der Diamanten Unterschiede erkennbar. Nach diesen Schätzungen nimmt die *MedKraftY* unter Verwendung der Lochplatte Nr. 8 um $3500 \cdot 0.270e-03 = 0.421$ N zu und wegen Länge B um $3000 \cdot (-0.005) = -15$ N ab. Verglichen zu Block A wird auf Block B eine um 3.234 höhere *MedKraftY* gemessen. Die zweite Nutzung eines Werkzeugs verringert die gemessene *MedKraftY* demnach um 1.163 Newton.

Auch dieses Modell, durch welches ein adjustiertes Bestimmtheitsmaß von $\bar{R}^2 = 0.022$ folgt,

Tabelle 15: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedKraftY*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	<i>p</i> -Wert
-	Achsenabschnitt	17.201	
X_1	Länge A	0.270e-03	0.8028
X_2	Länge B	-0.005	0.1066
X_3	Werkstück (Block B)	3.235	0.3988
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	-1.413	0.7281
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	1.173	0.7342
X_5	Nutzung (2. Versuch)	-1.163	0.6775

wird nun ebenfalls durch Variablenselektion optimiert.

Damit resultieren die Schätzungen in Tabelle [16](#). Bis auf die Länge B zwischen den Diamanten wurden alle anderen Variablen aus dem Modell entfernt. Die Schätzung dafür ist mit $\hat{\beta}_1$ ähnlich zu der Schätzung ohne Variablenselektion (Tabelle [15](#)). Wird das Maß von Lochplatte 8 in Länge B eingesetzt, so sinkt die *MedKraftY* um $0.004 \cdot 3000 = 12$ Newton. Signifikant ist dieser Parameter jedoch nicht.

Mit diesem sehr einfachen Modell wird ein adjustiertes Bestimmtheitsmaß von $\bar{R}^2 = 0.1765$ erreicht, sodass eine deutliche Verbesserung zum Ursprungsmodell erreicht wurde.

Tabelle 16: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im optimierten Modell - *MedKraftY*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	<i>p</i> -Wert
-	Achsenabschnitt	15.410	-
	Länge A	-	-
X_1	Länge B	-0.004	0.132
	Werkstück (Block B)	-	-
	Diamanten (2-3 oder 3)	-	-
	Diamanten (3-4 oder alle)	-	-
	Nutzung (2. Versuch)	-	-

4.2.5 *MedKraftZ*

Auch für den Median der Schnittkraft F_z wird zunächst das volle Modell ohne Wechselwirkungen bestimmt. Die Schätzungen dazu sind in Tabelle [17](#) angegeben.

Bei Betrachtung des QQ-Plots fällt auf, dass sehr viele Punkte deutlich von der Geraden abweichen, vor allem an den Rändern. Es kann somit zunächst keine Normalverteilung angenommen werden. Auch der Shapiro-Wilk Test bestätigt dies mit einem *p*-Wert von $p = 0.029 < 0.05$.

Somit wird nun auch für die mediane Schnittkraft *MedTiefeZ* eine robuste Regression durchgeführt. Die robusten Schätzungen der Koeffizienten sind in Tabelle [18](#) angegeben.

Auffällig ist zunächst, dass sich die Schätzungen, verglichen zum nicht-robusten Modell verändert haben. Es ist somit dazu auszugehen, dass die erwähnten Ausreißer einen Einfluss auf das letzte

Tabelle 17: KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedKraftZ*

Bezeichnung	Variable	$\hat{\beta}$	p-Wert
-	Achsenabschnitt	53.002	-
X_1	Länge A	0.003	0.474
X_2	Länge B	-0.008	0.193
X_3	Werkstück (Block B)	1.423	0.891
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	-0.510	0.967
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	10.119	0.400
X_5	Nutzung (2. Versuch)	13.706	0.113

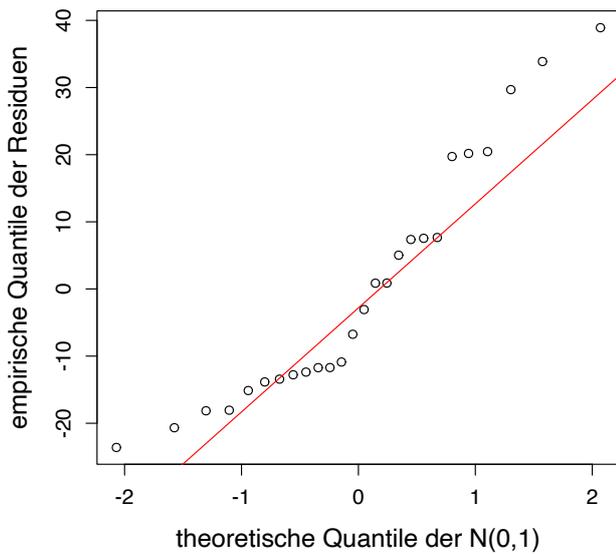


Abbildung 25: QQ-Plot - *MedKraftZ*

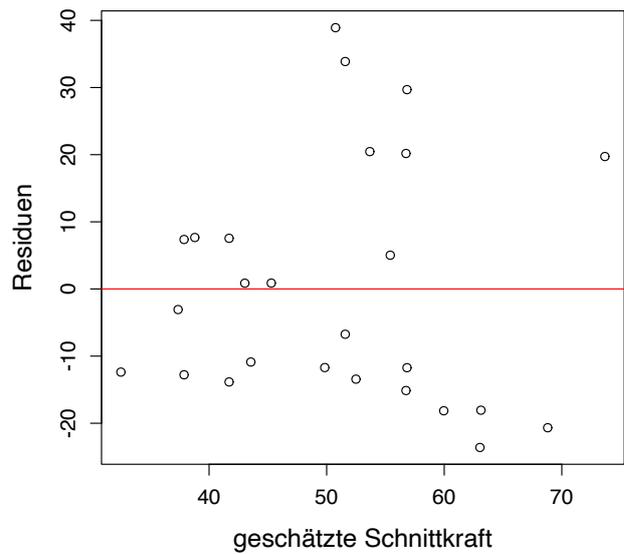


Abbildung 26: Residualplot - *MedKraftZ*

Modell gehabt haben.

Nach diesem Modell nimmt die *MedKraftZ* mit der Länge A pro μm um etwa $\hat{\beta}_1 = 0.002$ Newton zu und mit Länge B um 0.006 Newton ab. Mit Lochplatte 8 entspräche dies einer Zunahme der Kraft von $3500 \cdot 0.002 = 7$ N bzw. einer Abnahme von $3000 \cdot 0.006 = 18$ N. Im Vergleich zur Ritzung auf Werkstück A, wird nach diesem Modell eine um 3.517 niedrigere *MedKraftZ* auf Block B erreicht. Diese Schätzung passt gut zu der Tendenz, welche während der Analyse des passenden Boxplots (vgl. Abbildung [14](#)) sichtbar wurde. Die nicht-robuste Schätzung für diesen Koeffizienten war hingegen positiv. Ebenso wird nach den Schätzungen von $\hat{\beta}_4$ eine höhere mediane Schnittkraft erreicht, vor allem wenn drei bis vier oder alle Diamanten beteiligt waren. Dieses Ergebnis passt sowohl zum logischen Zusammenhang der Schnittkraft und der Anzahl der Diamanten, als auch zum Ergebnis der deskriptiven Analyse (vgl. Abbildung [15](#)). Zuletzt wurde nach $\hat{\beta}_5 = 14.438$ bei der zweiten Nutzung eines Werkzeugs eine um 14.438 Newton höhere *MedKraftZ* gemessen. Mit diesem Modell wird ein \bar{R}^2 von 0.027 erreicht, sodass dieses

Modell keine hohe Modellgenauigkeit besitzt.

Tabelle 18: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im vollen Modell - *MedKraftZ*

Bezeichnung		$\hat{\beta}$	<i>p</i> -Wert
-	Achsenabschnitt	48.262	
X_1	Länge A	0.002	0.601
X_2	Länge B	-0.006	0.459
X_3	Werkstück (Block B)	-3.517	0.827
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	0.940	0.908
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	12.235	0.162
X_5	Nutzung (2. Versuch)	14.438	0.091

Nach einer durchgeführten Variablenselektion, unter Berücksichtigung des \bar{R}^2 aller möglichen Modelle, resultieren nun die Schätzungen aus Tabelle 19. Demnach wird auf Betonblock B eine um ca. 11 Newton niedrigere *MedKraftZ* gemessen als auf Betonblock A. Dies entspricht etwa einer Verdreifachung der Schätzung des vollen Modells. Jedoch wurden in diesem optimierten Modell die Längen zwischen den Diamanten nicht aufgenommen. Die drei übrigen Schätzungen haben sich jedoch kaum verändert. So wächst die *MedKraftZ* mit der Anzahl der beteiligten Diamanten und bei zweiter Nutzung eines Werkzeugs wird eine um $\hat{\beta}_5 = 15.993$ Newton höhere mediane Schnittkraft gemessen. Auch hier weist keiner der *p*-Werte auf eine Signifikanz hin.

Tabelle 19: Robuste Schätzer $\hat{\beta}$ der Variablen im optimierten Modell - *MedKraftZ*

Bezeichnung		$\hat{\beta}$	<i>p</i> -Wert
-	Achsenabschnitt	36.399	
X_1	Länge A	-	-
X_2	Länge B	-	-
X_3	Werkstück (Block B)	-11.397	0.231
X_4	Diamanten (2-3 oder 3)	1.802	0.818
X_4	Diamanten (3-4 oder alle)	13.239	0.165
X_5	Nutzung (2. Versuch)	15.993	0.113

Aus diesem Modell resultiert schließlich ein \bar{R}^2 von $\bar{R}^2 = 0.183$, sodass dieses Modell nun mehr Varianz erklärt.

4.3 MANOVA

Führt man in R eine multivariate Regression mithilfe des Befehls `lm(cbind(c(MedFläche, MedTiefe) ~ Länge.A + Länge.B + Werkstück + Körner_Gruppe + Nutzung)` durch, resultieren genau die Modelle und deren Schätzungen, welche im letzten Kapitel bestimmt wurden. So werden damit mehrere univariate Regressionen durchgeführt. Da die Normalverteilung nur für die *MedFläche* und *MedTiefe* angenommen wurde, wird die MANOVA zunächst auf diese

beiden abhängigen Variablen angewandt. Zusätzlich wird nun statt der stetigen Variablen der Länge A und Länge B die Variable „Lochplatte“ (wie in der deskriptiven Analyse) genutzt, da kategoriale Variablen nötig sind.

Vorab muss jedoch eine Überprüfung der Voraussetzungen erfolgen. Diese sind die Normalverteilung der Residuen innerhalb der Gruppen, sowie die Homogenität der Kovarianzmatrizen. Ersteres kann mithilfe des Energy-Statistics-Test mit der R-Funktion `mvnorm.etest()` aus dem Paket `energy` (Rizzo and Szekely, 2022) überprüft werden. Die Varianzhomogenität wird mithilfe des Box's M-Tests des R-Pakets `heplots` (Fox et al., 2021) überprüft. Dieser wird mit `boxM()` aufgerufen.

Nach der Durchführung dieser Tests auf die kategorialen Variablen resultieren die Ergebnisse aus Tabelle 20.

Tabelle 20: Ergebnisse der Tests auf Normalverteilung der Residuen und Varianzhomogenität - *MedTiefe* und *MedFläche*

Variable	<i>p</i> -Wert <code>mvnorm.etest()</code>	<i>p</i> -Wert <code>boxM()</code>
Lochplatte - Nr. 1	0.246	} 0.694
Lochplatte - Nr. 8	0.433	
Lochplatte - Nr. 9	0.917	
Lochplatte - Nr. 10	0.933	} 0.655
Werkstück - Block A	0.975	
Werkstück - Block B	0.052	} 0.984
Diamanten - 1 oder 2	0.244	
Diamanten - 2-3 oder 3	0.575	
Diamanten 3-4 oder 4	0.177	} 0.336
Werkzeug (1. Nutzung)	0.237	
Nutzung (2. Versuch)	0.825	

Demnach kann für jede Gruppe sowohl die Normalverteilung der Residuen, als auch die Varianzhomogenität angenommen werden. Somit kann die MANOVA für die *MedFläche* und *MedTiefe* als abhängige Variablen mit Wilk's Test nun auf die unabhängigen Variablen der Lochplatte, des Werkstücks, der Diamantenzahl, sowie der Nutzung des Werkzeugs angewandt werden. Nach Eingabe des R-Befehls `Anova(lm(cbind(MedTiefe, MedFläche) ~ Variable, data = Daten, test.statistic = "Wilks"))` resultieren für jede einzelne Variable die Ergebnisse

aus Tabelle [21](#)

Tabelle 21: Wilk's Lambda Test für *MedTiefe* und *MedFläche*

Variable	<i>p</i> -Wert (Wilks Λ)
Lochplatte	0.374
Werkstück	0.142
Diamanten	0.009
Nutzung (2. Versuch)	0.110

Somit wird nur bei der Anzahl der an der Ritzung beteiligten Diamanten ein signifikantes Ergebnis zum 5%-Signifikanzniveau erreicht. Dieser *p*-Wert bleibt auch nach der Adjustierung durch $0.009 \cdot 4 = 0.036$ signifikant. Somit wirkt sich die Anzahl der beteiligten Diamanten sowohl auf die *MedTiefe*, als auch auf die *MedFläche* aus.

Auch für die Kräfte wird nun eine Varianzanalyse durchgeführt. Nach der Überprüfung der Voraussetzungen für die Kräfte *MedKraftX*, *MedKraftY* und *MedKraftZ*, resultieren die Ergebnisse in Tabelle [22](#).

Tabelle 22: Ergebnisse der Tests auf Normalverteilung der Residuen und Varianzhomogenität - *MedKraftX*, *MedKraftY* und *MedKraftZ*

Variable	<i>p</i> -Wert mvnorm.etest()	<i>p</i> -Wert boxM()
Lochplatte - Nr. 1	0.742	} 0.050
Lochplatte - Nr. 8	0.169	
Lochplatte - Nr. 9	0.049	
Lochplatte - Nr. 10	0.498	
Werkstück - Block A	0.004	} 0.518
Werkstück - Block B	0.169	
Diamanten - 1 oder 2	<2.2e-16	} 0.759
Diamanten - 2-3 oder 3	0.795	
Diamanten 3-4 oder 4	0.265	
Nutzung (1. Versuch)	0.133	} 0.887
Nutzung (2. Versuch)	0.130	

Da die Normalverteilung der Residuen für die Lochplatte 9 und für ein bis zwei Diamanten abgelehnt wird, kann die MANOVA mit Wilks Lambda nun ausschließlich für die Nutzung des Werkzeugs durchgeführt werden. Es resultiert ein *p*-Wert von $p = 0.301$, sodass die Nutzung demnach keinen signifikanten Einfluss auf die Kräfte hat.

5 Zusammenfassung

Es wurde ein Datensatz untersucht, der die Ergebnisse von 34 geplanten Ritzversuchen mittels eines mit diamantenbesetzten Bohrers enthielt. Das Ziel der Versuchsreihe bestand darin, mithilfe von Modellierungen und Testverfahren zu untersuchen inwieweit die Konfigurationen des Werkzeugs diese Ritzungen beeinflussen. Genauer wurde untersucht wie sich die Flächen, Tiefen und Kräftemessungen von der Lochplatte bzw. des Abstandes zwischen den Diamanten, der Anzahl beteiligter Diamanten, dem Betonblock und der Nutzung des Werkzeugs beeinflussen lassen. Dies geschah anhand von linearen und logistischen Modellen, sowie multivariater Varianzanalyse.

Vor der eigentlichen Analyse wurde stellvertretend für die 15 Messungen pro Ritzspur die mediane Fläche bzw. Tiefe eingeführt und mit *MedFläche* *MedTiefe* bezeichnet.

So fiel sowohl für die mediane abgetragene Fläche, als auch für die mediane Tiefe der Ritzspur auf, dass auf dem Betonblock B jeweils deutlich höhere Werte gemessen wurden als auf Block A. Dieser Effekt, welcher schon während der deskriptiven Analyse deutlich wurde zeigt, dass sich die Beschaffenheit der Betonblöcke unterscheidet. Auch in früheren Arbeiten war dieser Effekt schon sichtbar (Malevich et al., 2021) und (Müller et al., 2022). Signifikante Ergebnisse anhand des p -Wertes resultierten in dieser Arbeit jedoch nicht. Ähnliches konnte für die Nutzung des Werkzeugs beobachtet werden. Anhand der Schätzungen der linearen Modelle wurde deutlich, dass die zweite Nutzung des Werkzeugs zu einem größeren Flächenabtrag, sowie zu mehr Tiefe führt, verglichen zur ersten Nutzung. Nach einer Adjustierung der p -Werte konnten jedoch auch keine Signifikanzen dafür nachgewiesen werden. Auffällig war, dass nach den KQ-Schätzungen mit zwei bis drei Diamanten im Einsatz mehr Fläche abgetragen wurde als mit drei bis vier oder allen. Ähnliches war für die *MedTiefe* beobachtbar, sodass mit drei bis vier oder allen Diamanten sogar weniger Tiefe erreicht wurde als mit einem oder zwei. Inwieweit diese Gruppierungen anhand der Spuren der Diamanten zuverlässig sind, ist jedoch fraglich. Nach den Schätzungen kommt es zu weniger Flächenabtrag, je größer die Abstände zwischen den Diamanten ist. Bei der Tiefe führt ein größerer vertikaler Abstand jedoch zu mehr Tiefe. Da die Tiefe der Ritzung bei dem Versuch mit 50 μm vorgegeben war, wurde mithilfe von logistischer Regression überprüft, wie dieser Wert erreicht wurde. So war die Chance diese Tiefe zu erreichen größer, falls auf Block B geritzt wurde, 2-3 oder 3 Diamanten beteiligt waren oder auch falls 3-4 oder alle Diamanten beteiligt waren, verglichen dem Einsatz von weniger Diamanten. Auch dabei war die Chance mit zwei bis drei Diamanten größer als mit drei bis vier oder allen. Zu signifikanten Ergebnissen kam es jedoch nicht.

Da die Normalverteilung der Residuen bei den Kräftemessungen nicht deutlich war, wurden robuste Regressionen für die *MedKraftX*, die *MedKraftY* und die *MedKraftZ* durchgeführt. Aufgrund dieser robusten Schätzungen konnte beobachtet werden, dass der horizontale Abstand der Diamanten grundsätzlich die Kräfte vergrößert. Auf Werkstück B waren die Kräfte ebenfalls größer, als auf Werkstück A. Dies deutet wegen ähnlicher Ergebnisse für die *MedFläche* darauf hin, dass für einen höheren Flächenabtrag mehr Kraft benötigt wird. Für die Anzahl der Diamanten und die Nutzung des Werkzeugs kam es je nach betrachteter Kraft zu unterschiedlichen Auswirkungen. Auffällig war jedoch, dass die mediane Schnittkraft mit der Anzahl der beteiligten Diamanten wächst, was sinnvoll ist.

Neben den einzelnen Modellen wurde eine multivariate Varianzanalyse, gepaart mit dem Wilks-Lambda-Test durchgeführt. Nach der Überprüfung der Voraussetzungen konnte anhand des signifikanten p -Wertes festgestellt werden, dass sich die Anzahl der Diamanten signifikant auf die *MedFläche* und *MedTiefe* auswirkt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sollten jedoch mit Vorsicht interpretiert werden. Wegen der sehr geringen Anzahl an Beobachtungen sind die Koeffizientenschätzungen und die zugehörigen p -Werte nicht zuverlässig. Die teilweise sehr geringen \bar{R}^2 deuten ebenso daraufhin, dass mehr Daten wahrscheinlich zu besseren Ergebnissen führen würden. Zudem wurde anhand der einzelnen Stichprobenanzahlen sichtbar, dass gewisse Merkmalskombinationen häufiger auftreten als andere. Dies führt dazu, dass sich die Stichprobengrößen teilweise stark unterscheiden.

Für weitere Untersuchungen der Daten wären weitere Analysen sinnvoll, welche (multivariate) Korrelationen berücksichtigen. Um ähnliche Gruppengrößen zu erhalten, wäre dabei ein balancierter Versuchsplan von Vorteil. Da der Median der Daten jeder Ritzspur verwendet wurde, wären zudem Analysen mit anderen Maßen interessant.

Literatur

- Auguie, B. (2015). *gridExtra: Miscellaneous Functions for "Grid" Graphics*. R package version 2.0.0.
- Behnke, J. (2015). *Logistische Regressionsanalyse: Eine Einführung*. Methoden der Politikwissenschaft. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Benesch, T. (2012). *Schlüsselkonzepte zur Statistik: die wichtigsten Methoden, Verteilungen, Tests anschaulich erklärt*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Bengtsson, H. (2022). *matrixStats: Functions that Apply to Rows and Columns of Matrices (and to Vectors)*. R package version 0.62.0.
- Bruker alicona (2022). Alicona: Optische Koordinatenmesstechnik Rauheitsmessung. <https://www.alicon.com/de/>. Eingesehen am 05.04.2022.
- Czado, C. and T. Schmidt (2011). *Mathematische Statistik*. Statistik und ihre Anwendungen. Springer Berlin Heidelberg.
- Dreier, J., M. Ferreira, D. Malcherzyk, D. Biermann, C. H. Müller, and W. Tillmann (2022). The influence of different diamond spacings in diamond impregnated tools on the wear behavior and material removal.
- Fahrmeir, L., A. Hamerle, and G. Tutz (2015). *Multivariate statistische Verfahren*. De Gruyter.
- Fahrmeir, L., T. Kneib, and S. Lang (2013). *Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen*. Statistik und ihre Anwendungen. Springer Berlin Heidelberg.
- Fahrmeir, L., I. Pigeot, and G. Tutz (2003). *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. München: Springer Verlag.
- Fox, J., M. Friendly, and G. Monette (2021). *heplots: Visualizing Tests in Multivariate Linear Models*. R package version 1.3-9.
- Hamner, B., M. Frasco, and E. LeDell (2018). *Metrics: Evaluation Metrics for Machine Learning*. (Version 0.1.4).
- Heritier, S. and E. Ronchetti (1994). Robust bounded-influence tests in general parametric models. *Journal of the American Statistical Association* 89(427), 897–904.

- Holling, H. and G. Gediga (2015). *Statistik – Testverfahren*. Bachelorstudium Psychologie. Hogrefe Verlag.
- Huber, P. and E. Ronchetti (2009). *Robust Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Joensen, D. W. and J. Vogel (2010, Nov). *Zur Güte von Signifikanztests auf mehrdimensionale Normalverteiltheit*, Volume 02, 2010 of *Ilmenauer Beiträge zur Wirtschaftsinformatik*. Ilmenau: Technische Universität Ilmenau, Institut für Wirtschaftsinformatik.
- Maechler, M., P. Rousseeuw, C. Croux, V. Todorov, A. Ruckstuhl, M. Salibian-Barrera, T. Verbeke, M. Koller, E. L. T. Conceicao, and M. Anna di Palma (2022). *robustbase: Basic Robust Statistics*. R package version 0.95-0.
- Malevich, N., C. H. Müller, J. Dreier, M. Kansteiner, D. Biermann, M. De Pinho Ferreira, and W. Tillmann (2021). Experimental and statistical analysis of the wear of diamond impregnated tools. *Wear* 468-469, 203574.
- Manly, B. (2004). *Multivariate Statistical Methods: A Primer, Third Edition*. Taylor & Francis.
- Müller, C. H., H. Dohme, D. Malcherczyk, D. Biermann, and W. Tillmann (2022). Detecting diamond breakouts of diamond impregnated tools for core drilling of concrete by force measurements.
- Müller, K. and H. Wickham (2021). *tibble: Simple Data Frames*. R package version 3.1.2.
- Pruscha, H. (2006). *Statistisches Methodenbuch: Verfahren, Fallstudien, Programmcodes*. Statistik und ihre Anwendungen. Springer Berlin Heidelberg.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.
- Renaud, O. and M.-P. Victoria-Feser (2010). A robust coefficient of determination for regression. *Journal of Statistical Planning and Inference* 140(7), 1852–1862.
- Rizzo, M. and G. Szekely (2022). *energy: E-Statistics: Multivariate Inference via the Energy of Data*. R package version 1.7-10.
- Scheffner, A., M. Meyners, and K. Langohr (2002). *Logistische Regression*. Arbeitsbericht. Univ., Fachbereich Statistik.

- Schlittgen, R. (2009). *Multivariate Statistik*. Lehr- und Handbücher der Statistik. De Gruyter.
- Székely, G. J. and M. L. Rizzo (2005). A new test for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis* 93(1), 58–80.
- Tiede, M. (1987). *Statistik: Regressions- und Korrelationsanalyse*. Oldenbourg.
- Toutenburg, H. (2013). *Lineare Modelle: Theorie und Anwendungen*. Physica-Verlag HD.
- Venables, W. N. and B. D. Ripley (2002). *Modern Applied Statistics with S* (Fourth ed.). New York: Springer. ISBN 0-387-95457-0.
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York.
- Wickham, H. (2021). *tidyr: Tidy Messy Data*. R package version 1.1.3.
- Wolf, C. and H. Best (2010). *Handbuch der sozialwissenschaftlichen Datenanalyse*. VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Anhang

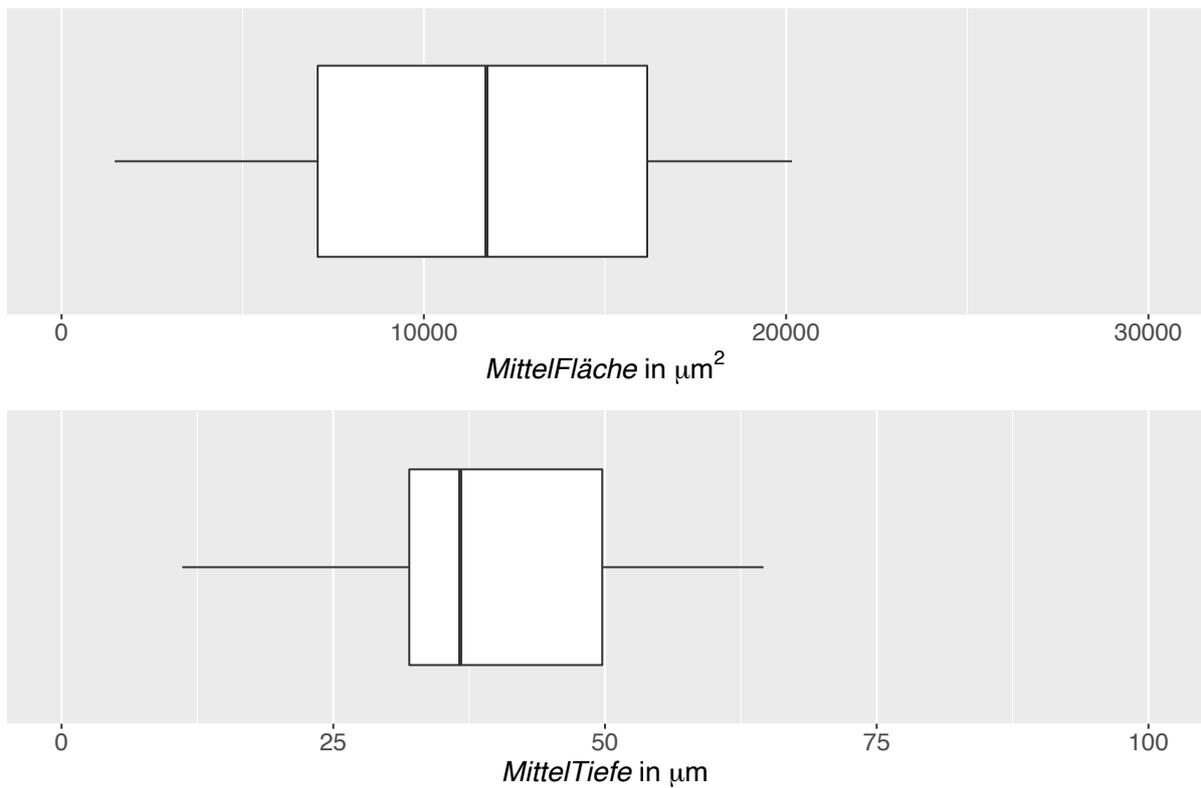


Abbildung 27: Boxplots der *MittelFläche* und der *MittelTiefe*

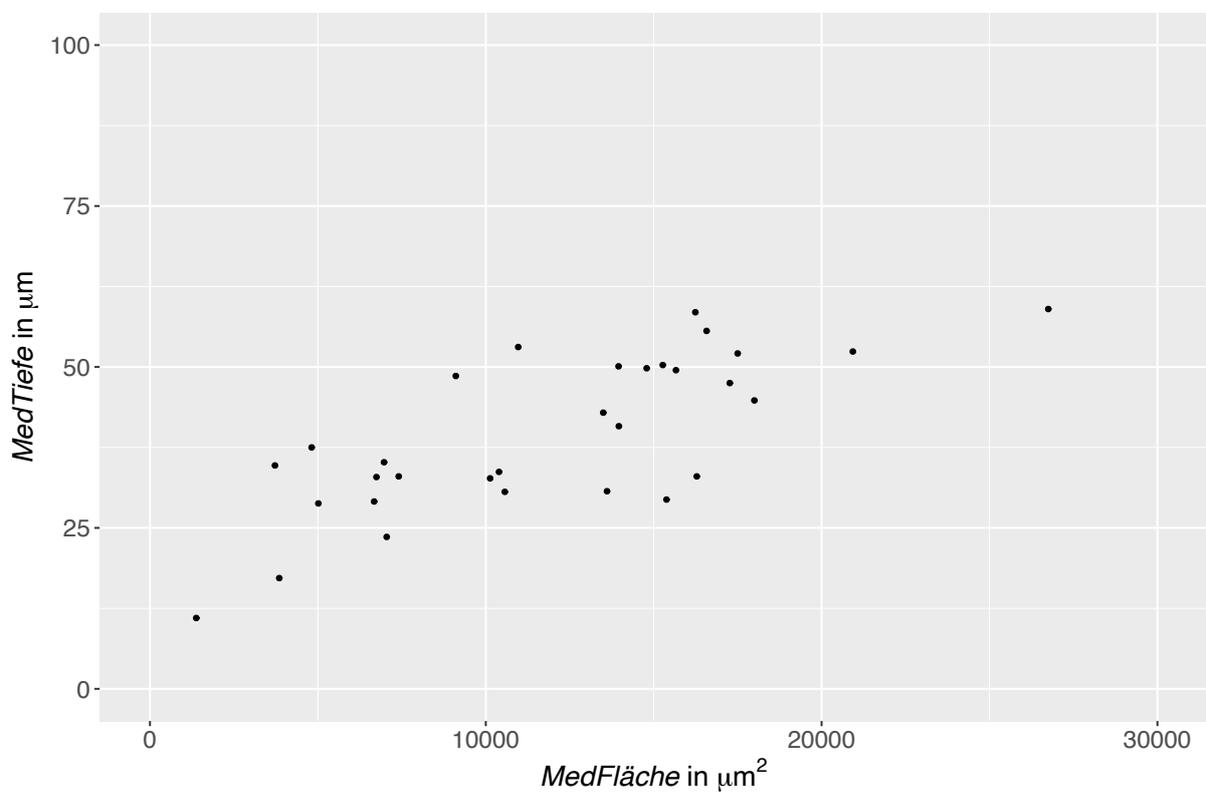


Abbildung 28: Plot der *MedTiefe* (x-Achse) und der *MedFläche* (y-Achse)

Tabelle 23: Kennzahlen der *MedFläche*, getrennt nach Variablen

	Minimum	Median	Mittelwert	Maximum	Varianz
	1378	13498	11950	26751	33234138
Lochplatte					
1	6675	13610	13131	26751	41892000
8	3850	10965	11463	17266	24743185
9	5014	15732	13729	20931	41200733
10	1378	10567	9535	15382	30573223
Block					
A	1378	10348	10799	26751	36486347
B	6744	15663	14766	20931	16285468
Anzahl Diamanten					
1 oder 2	3722	5014	7472	17266	24841134
2-3 oder 3	6744	14377	13744	17998	14247524
3-4 oder alle	6970	13610	12644	20931	20867417
Nutzung (1. oder 2.)					
1	1378	7407	10187	26751	45052810
2	4814	14672	13806	20931	19408084

Tabelle 24: Kennzahlen der *MedTiefe*, getrennt nach Variablen

	Minimum	Median	Mittelwert	Maximum	Varianz
	11.00	37.50	39.62	59.00	147.68
Lochplatte					
1	23.60	32.90	37.87	59.00	142.92
8	17.20	48.60	44.64	58.50	170.14
9	28.80	42.80	42.35	52.40	87.84
10	11.00	33.00	33.06	49.80	147.64
Block					
A	11.00	34.95	36.93	59.00	145.55
B	32.90	49.80	46.19	58.50	103.27
Anzahl Diamanten					
1 oder 2	17.20	34.70	35.41	53.10	146.51
2-3 oder 3	30.60	49.20	46.38	58.50	84.38
3-4 oder alle	23.60	33.00	36.68	52.40	91.08
Nutzung (1 oder 2)					
1	11.00	34.70	37.92	59.00	215.33
2	29.10	39.15	40.03	58.50	90.43

Tabelle 25: Kennzahlen der *MedKraftX*, getrennt nach Variablen

	Minimum	Median	Mittelwert	Maximum	Varianz
	-460.50	-206.60	-208.00	-41.2	10631.81
Lochplatte					
1	-310.98	-215.32	-198.64	-62.51	8681.52
8	-460.5	-250.0	-232.1	-41.2	16471.19
9	-384.4	-165.6	-201.0	-143.1	8482.16
10	-314.7	-125.3	-190.0	-104.0	11533.50
Block					
A	-460.5	-205.9	-213.9	-41.2	12157.91
B	-314.73	-206.57	-194.94	-62.51	8057.46
Anzahl Diamanten					
1 oder 2	-460.5	-253.3	-243.2	-41.2	20298.45
2-3 oder 3	-314.73	-165.26	-174.22	-56.13	7017.78
3-4 oder alle	-384.36	-215.32	-208.46	-86.98	8515.60
Nutzung (1 oder 2)					
1	-384.4	-174.6	-181.4	-41.2	10907.74
2	-460.5	-234.0	-242.5	-125.3	9478.71

Tabelle 26: Kennzahlen der *MedKraftY*, getrennt nach Variablen

	Minimum	Median	Mittelwert	Maximum	Varianz
	-26.246	-2.633	-2.665	23.63	101.54
Lochplatte					
1	-10.632	-1.961	0.386	23.630	114.39
8	-4.171	1.713	0.914	8.142	19.95
9	-16.69	-8.03	-9.02	-2.15	41.59
10	-26.25	-5.00	-6.97	16.37	256.57
Block					
A	-26.25	-4.17	-5.14	16.37	74.17
B	-16.69	1.96	2.82	23.63	130.11
Anzahl Diamanten					
1 oder 2	-26.25	-2.00	-5.28	2.79	96.64
2-3 oder 3	-16.69	-2.91	-1.72	11.09	69.44
3-4 oder alle	-16.61	-2.63	-1.14	23.63	149.26
Nutzung (1 oder 2)					
1	-26.25	-3.76	-5.25	11.0880	97.87
2	-16.60	-1.96	0.47	23.63	111.50

Tabelle 27: Kennzahlen der *MedKraftZ*, getrennt nach Variablen

	Minimum	Median	Mittelwert	Maximum	Varianz
	20.12	45.11	52.53	120.31	558.47
Lochplatte					
1	20.12	46.17	54.75	120.31	971.59
8	25.09	45.06	45.64	85.45	272.65
9	32.67	46.02	52.90	76.93	333.63
10	38.13	41.82	60.49	93.39	806.44
Block					
A	25.09	45.04	53.31	120.31	602.72
B	20.12	45.11	50.79	89.66	518.29
Anzahl Diamanten					
1 oder 2	25.09	44.83	45.37	85.45	372.06
2-3 oder 3	20.12	42.76	47.67	89.66	417.53
3-4 oder alle	27.86	48.13	55.34	93.39	437.15
Nutzung (1 oder 2)					
1	20.12	42.86	49.21	120.31	763.18
2	39.06	46.17	57.86	93.39	408.28

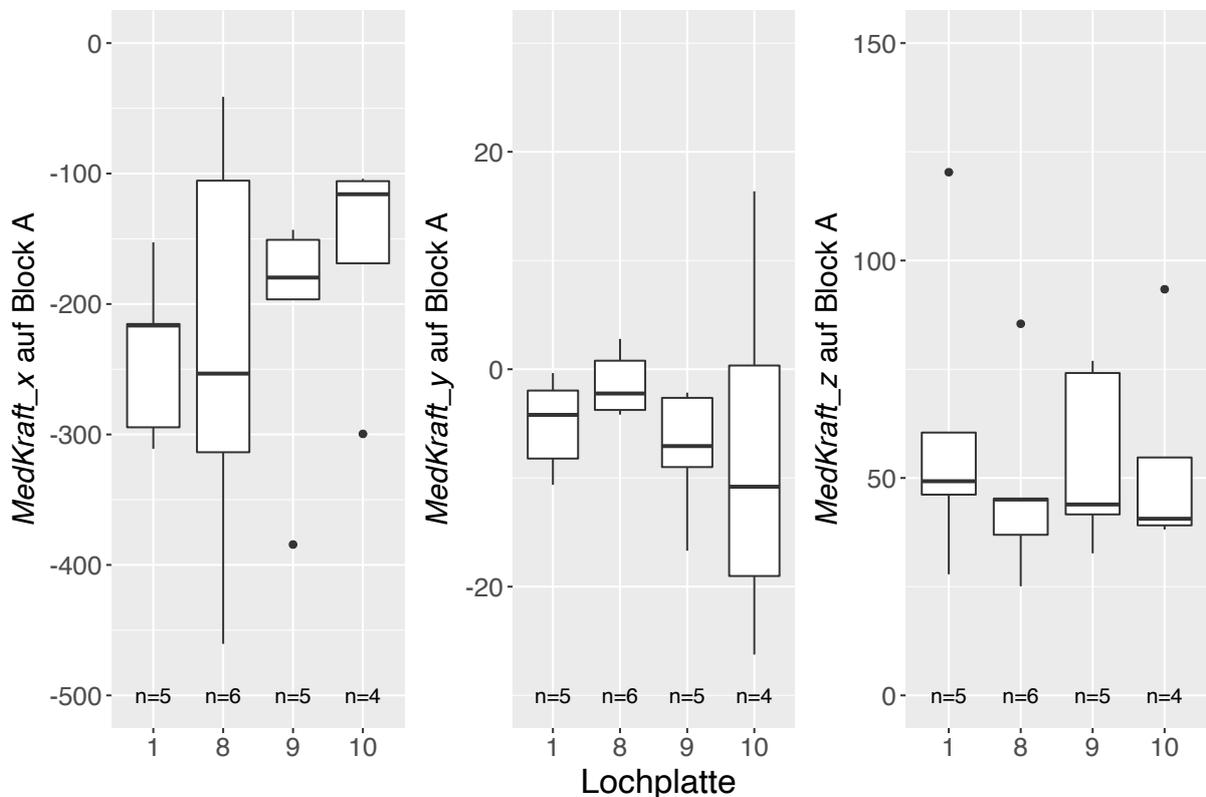


Abbildung 29: Boxplots der *MedKraftX*, *MedKraftY* und *MedKraftZ*, aufgeteilt nach Lochplatten auf Block A

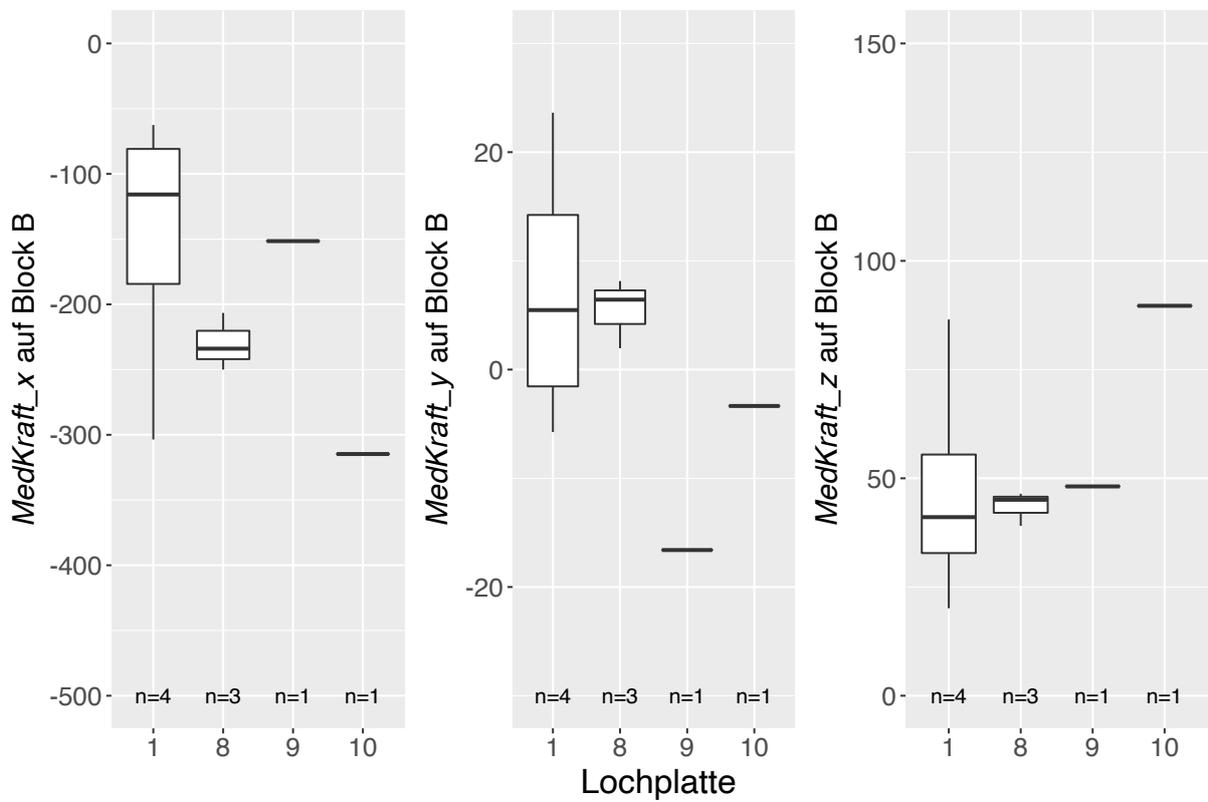


Abbildung 30: Boxplots der *MedKraftX*, *MedKraftY* und *MedKraftZ*, aufgeteilt nach Lochplatten auf Block B

Eidesstattliche Versicherung

(Affidavit)

Mleczkowski, Melissa Maria

Name, Vorname
(surname, first name)

204122

Matrikelnummer
(student ID number)

Bachelorarbeit
(Bachelor's thesis)

Masterarbeit
(Master's thesis)

Titel
(Title)

Analyse und Modellierung von Mehrkorn-
Mitzversuchen mittels univariater und
multivariater Methoden

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem oben genannten Titel selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

I declare in lieu of oath that I have completed the present thesis with the above-mentioned title independently and without any unauthorized assistance. I have not used any other sources or aids than the ones listed and have documented quotations and paraphrases as such. The thesis in its current or similar version has not been submitted to an auditing institution before.

Bochum, 28.08.2022

Ort, Datum
(place, date)

Mleczkowski

Unterschrift
(signature)

Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG -).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Official notification:

Any person who intentionally breaches any regulation of university examination regulations relating to deception in examination performance is acting improperly. This offense can be punished with a fine of up to EUR 50,000.00. The competent administrative authority for the pursuit and prosecution of offenses of this type is the Chancellor of TU Dortmund University. In the case of multiple or other serious attempts at deception, the examinee can also be unenrolled, Section 63 (5) North Rhine-Westphalia Higher Education Act (*Hochschulgesetz, HG*).

The submission of a false affidavit will be punished with a prison sentence of up to three years or a fine.

As may be necessary, TU Dortmund University will make use of electronic plagiarism-prevention tools (e.g. the "turnitin" service) in order to monitor violations during the examination procedures.

I have taken note of the above official notification:*

Bochum, 28.08.2022

Ort, Datum
(place, date)

Mleczkowski

Unterschrift
(signature)

***Please be aware that solely the German version of the affidavit ("Eidesstattliche Versicherung") for the Bachelor's/ Master's thesis is the official and legally binding version.**